UNIDADE B

Capítulo 11

As leis de Kirchhoff

Sempre que um circuito não pode ser reduzido a um circuito simples, recorremos às leis de Kirchhoff. Por meio dessas leis, é possível determinar todas as intensidades de corrente elétrica que percorrem os ramos do circuito.

As leis de Kirchhoff são utilizadas para determinar as intensidades de corrente elétrica em circuitos que não podem ser convertidos em circuitos simples.

11.1 As leis de Kirchhoff

A lei dos nós e a lei das malhas são utilizadas para determinar a distribuição da corrente nos circuitos elétricos.

11.2 Potenciômetro de Poggendorff

O potenciômetro de Poggendorff é utilizado para medir a força eletromotriz de um gerador elétrico.

Seção 11.1

As leis de Kirchhoff

Objetivos

- Compreender as leis de Kirchhoff.
- Aplicar as leis de Kirchhoff para os circuitos elétricos.

Termos e conceitos

- ramo
- malha

A lei de Pouillet permite determinar a intensidade de corrente num circuito simples. Quando o circuito não pode ser reduzido a um circuito simples, para a determinação de todas as intensidades de corrente elétrica recorre-se às chamadas **leis de Kirchhoff*: lei dos nós** e **lei das malhas**.

Considere uma **rede elétrica** constituída de dois geradores, (E_1, r_1) e (E_2, r_2), de um receptor, (E_3, r_3), e de resistores de resistências elétricas, R_1, R_2 e R_3 (**fig. 1**).

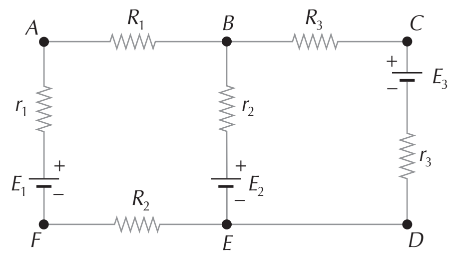


Figura 1. Rede elétrica.

Numa rede elétrica chama-se **nó** o ponto no qual a corrente elétrica se divide. No exemplo dado, *B* e *E* são nós. Os trechos de circuito entre dois nós consecutivos são denominados **ramos**. Na rede elétrica dada, os ramos são três: *BAFE*, *BE* e *BCDE*.

Qualquer conjunto de ramos formando um percurso fechado recebe o nome de **malha**. No circuito em questão as malhas são: *ABEFA*, *BCDEB* e *ABCDEFA*.

A cada ramo do circuito atribuímos um sentido de corrente elétrica (**fig. 2**). Esse sentido, embora arbitrário, deve ser coerente com o elemento de circuito do ramo. Sendo gerador, a corrente entra pelo terminal negativo e, sendo receptor, pelo positivo.

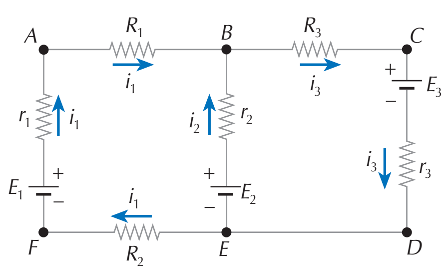


Figura 2.

A **primeira lei de Kirchhoff** ou **lei dos nós** estabelece:

> Em um nó, a soma das intensidades de corrente que chegam é igual à soma das intensidades de corrente que saem.

* **KIRCHHOFF**, Gustav Robert (1824-1887), físico alemão que apresentou importantes contribuições para a Física experimental, além de dar tratamento matemático a numerosos problemas físicos, como, por exemplo, o cálculo da distribuição de correntes elétricas em circuitos elétricos.

A **lei dos nós** aplicada ao nó B fornece: $i_1 + i_2 = i_3$ ①

Observe que essa lei aplicada ao nó E leva à equação ①.

De modo geral, sendo n o número de nós, a lei deve ser aplicada para $(n - 1)$ nós. Para a determinação de i_1, i_2 e i_3 faltam duas equações. Considere, então, a malha $ABEFA$ (**fig. 3**) e sejam V_A, V_B, V_E e V_F os potenciais elétricos dos pontos A, B, E e F, respectivamente. Percorrendo a malha no sentido horário (α), por exemplo, vem:

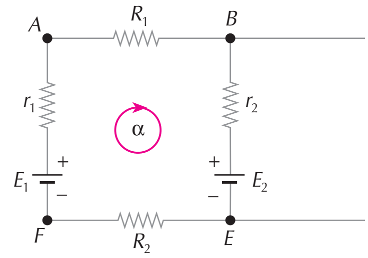


Figura 3.

$$V_A - V_B + V_B - V_E + V_E - V_F + V_F - V_A = 0 \quad \Rightarrow \quad U_{AB} + U_{BE} + U_{EF} + U_{FA} = 0 \quad ②$$

O resultado ② constitui a **segunda lei de Kirchhoff** ou **lei das malhas**:

> Percorrendo-se uma malha num certo sentido, partindo-se e chegando-se ao mesmo ponto, a soma algébrica das ddps é nula.

Para a aplicação da lei das malhas, observe que num resistor a ddp é do tipo $\pm R \cdot i$, valendo o sinal $+$ se o sentido da corrente coincide com o sentido do percurso adotado e o sinal $-$ no caso contrário (**fig. 4**):

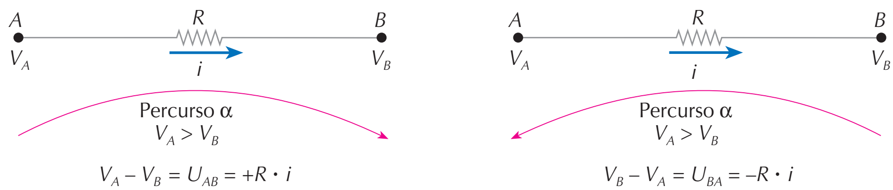


Figura 4.

Para as fem e fcem vale o sinal de entrada no sentido do percurso adotado (**fig. 5**):

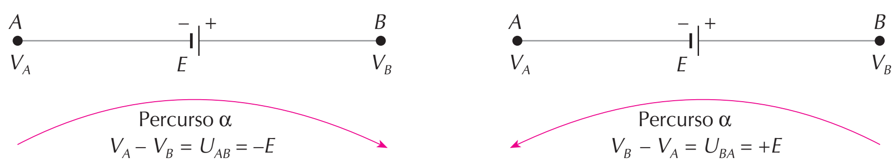


Figura 5.

Assim, na malha $ABEFA$, a partir de A e no sentido do percurso α (**fig. 6**), temos:

$$R_1 \cdot i_1 - r_2 \cdot i_2 + E_2 + R_2 \cdot i_1 - E_1 + r_1 \cdot i_1 = 0 \quad ③$$

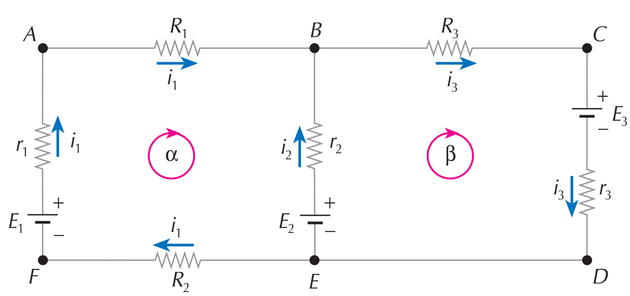


Figura 6.

Na malha $BCDEB$, a partir de C e no sentido do percurso β, temos:

$$E_3 + r_3 \cdot i_3 - E_2 + r_2 \cdot i_2 + R_3 \cdot i_3 = 0 \quad ④$$

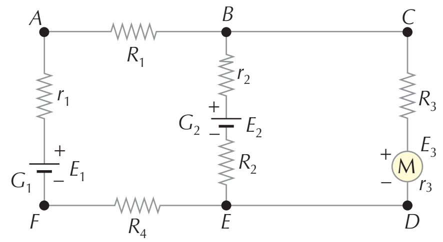
Das expressões ①, ③ e ④, podemos determinar as intensidades das correntes elétricas i_1, i_2 e i_3 em todos os ramos do circuito.

Entre na rede No endereço eletrônico http://www.vestibulandoweb.com.br/simulajava/java/kirch2/index.html (acesso em agosto/2009), você encontra aplicações das leis de Kirchhoff.

R. 107 O esquema representa uma rede de distribuição de energia elétrica que consta de:

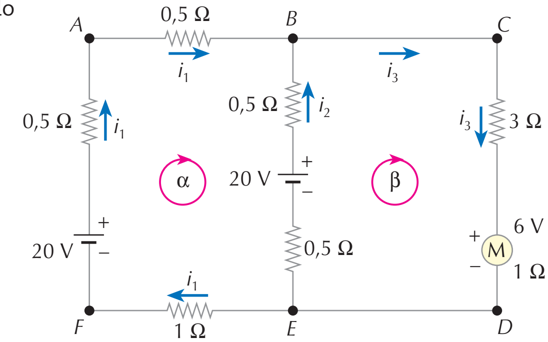
- geradores G_1 e G_2 de fem $E_1 = E_2 = 20$ V e resistências internas $r_1 = r_2 = 0{,}5\ \Omega$
- motor M de fcem $E_3 = 6$ V e resistência interna $r_3 = 1\ \Omega$
- resistores de resistências $R_1 = R_2 = 0{,}5\ \Omega$, $R_3 = 3\ \Omega$ e $R_4 = 1\ \Omega$

Determine as intensidades das correntes elétricas em cada ramo do circuito.



Solução:

Inicialmente atribuímos a cada ramo do circuito um sentido de corrente.



- Primeira lei de Kirchhoff ou lei dos nós

Nó B: $i_1 + i_2 = i_3$ ①

- Segunda lei de Kirchhoff ou lei das malhas

Malha *ABEFA* (a partir de *A* e no sentido α):

$0{,}5i_1 - 0{,}5i_2 + 20 - 0{,}5i_2 + 1i_1 - 20 + 0{,}5i_1 = 0$

$2i_1 - i_2 = 0$ ②

Malha *BCDEB* (a partir de *B* e no sentido β):

$3i_3 + 6 + 1i_3 + 0{,}5i_2 - 20 + 0{,}5i_2 = 0$

$4i_3 + i_2 - 14 = 0$ ③

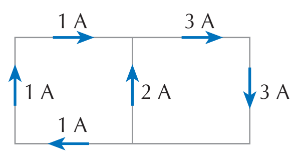
Das expressões ①, ② e ③, obtivemos o sistema:

$$\begin{cases} i_1 + i_2 = i_3 \\ 2i_1 - i_2 = 0 \\ 4i_3 + i_2 - 14 = 0 \end{cases}$$

A resolução desse sistema nos fornece: $\boxed{i_1 = 1\text{ A}}$; $\boxed{i_2 = 2\text{ A}}$ e $\boxed{i_3 = 3\text{ A}}$

Se o valor de uma corrente elétrica resultar negativo, significa que o sentido adotado não é o correto.

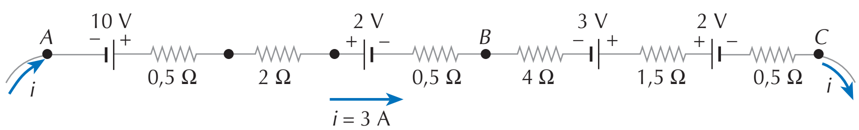
Resposta:



R. 108 Para o trecho de circuito da figura calcule a ddp:

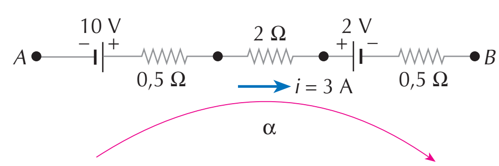
a) entre os pontos *A* e *B* ($V_A - V_B$);

b) entre os pontos *C* e *B* ($V_C - V_B$).



Solução:

a) Para o cálculo da ddp entre dois pontos, *A* e *B*, de um trecho de circuito, escolhemos um sentido α de percurso e efetuamos a soma algébrica das ddps de todos os elementos do trecho. Adotando α no sentido de *A* para *B*, calculamos $V_A - V_B$. Lembre-se, ainda, de que para as fems e fcems vale o sinal de entrada no sentido do percurso adotado. Para os resistores a ddp é $\pm R \cdot i$, valendo o sinal + se o sentido de *i* coincide com o de α e o sinal − no caso contrário.

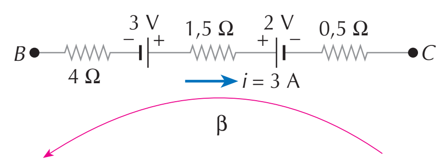


Assim, temos:

$V_A - V_B = -10 + 0{,}5 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 2 + 0{,}5 \cdot 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{V_A - V_B = 1\text{ V}}$

b) Adotando-se o sentido de percurso β de *C* para *B*, calculamos $V_C - V_B$:



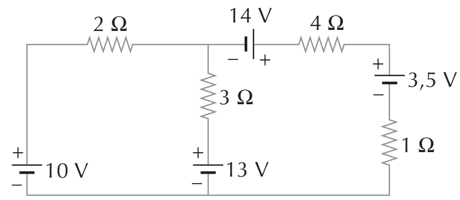
$V_C - V_B = -0{,}5 \cdot 3 - 2 - 1{,}5 \cdot 3 + 3 - 4 \cdot 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{V_C - V_B = -17\text{ V}}$

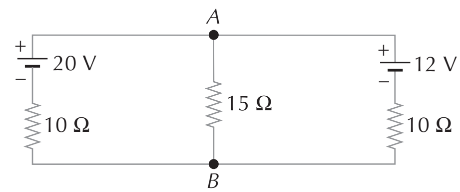
Resposta: a) 1 V; b) −17 V

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

P. 268 Para o circuito da figura, determine as intensidades das correntes elétricas em todos os ramos.



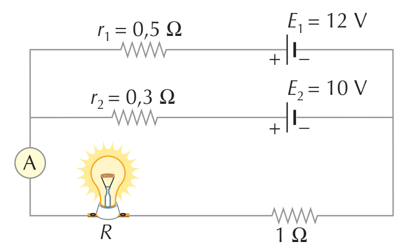
P. 269 No circuito dado, determine a diferença de potencial $V_A - V_B$ no ramo AB.



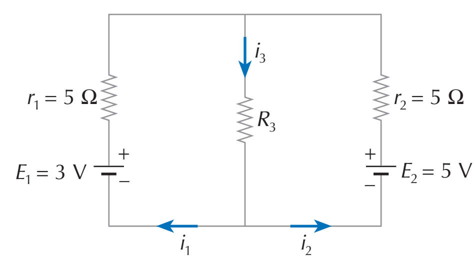
P. 270 (Efei-MG) As duas baterias do circuito, associadas em paralelo, alimentam: o amperímetro A ideal, a lâmpada de incandescência de resistência R e o resistor de resistência 1 Ω, todos em série. Se o amperímetro registra 4 A, calcule:

a) as intensidades de corrente i_1 e i_2 nas baterias;

b) a resistência elétrica R da lâmpada.

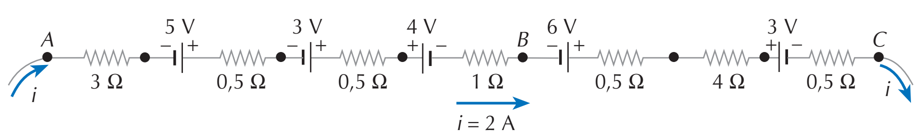


P. 271 (FEI-SP) No circuito da figura, a intensidade de corrente i_1 vale 0,2 A. Determine i_2, i_3 e R_3.

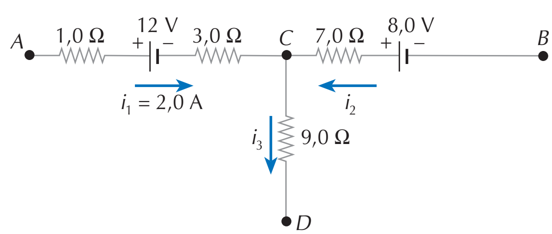


P. 272 Para o trecho de circuito dado abaixo, calcule a ddp entre os pontos:

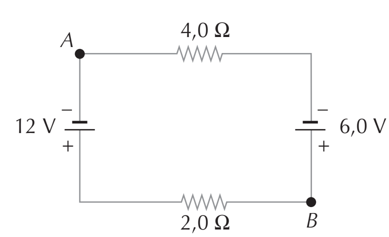
a) A e B $(V_A - V_B)$ **b)** C e B $(V_C - V_B)$



P. 273 No trecho de circuito da figura, sabe-se que a ddp entre os pontos A e B é nula. Calcule as intensidades das correntes i_2 e i_3.



P. 274 (UFPE) Calcule o potencial elétrico no ponto A, em volts, considerando que as baterias têm resistências internas desprezíveis e que o potencial no ponto B é igual a 15 volts.



Seção 11.2

Potenciômetro de Poggendorff

Objetivos

- Compreender o funcionamento do potenciômetro de Poggendorff.
- Analisar a condição de equilíbrio para o potenciômetro.

Assim como a ponte de Wheatstone serve para medir resistências elétricas, o **potenciômetro de Poggendorff*** é usado para medir, com precisão, a força eletromotriz de um gerador.

O potenciômetro de Poggendorff é um circuito que obedece ao esquema da **figura 7**, baseando-se na associação em paralelo de geradores de fems diferentes. O uso do potenciômetro como aparelho de precisão deve-se à existência de pilhas padrão, cujas fems são perfeitamente conhecidas. Esse circuito permite comparar a fem E_x de uma pilha desconhecida com a fem E_{pilha} de uma pilha padrão.

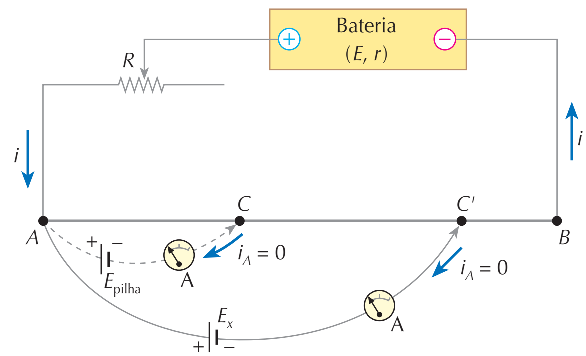


Figura 7. Potenciômetro de Poggendorff.

Entre A e B temos um fio homogêneo de seção transversal constante. Uma bateria de acumuladores de fem E maior do que E_{pilha} e E_x fornece energia ao circuito.

Utilizando-se, de início, a pilha padrão, existe para o cursor uma posição C em que não passa corrente pela pilha:

$$\boxed{i_A = 0} \quad \text{e} \quad \boxed{U_{AC} = E_{pilha}}$$

Nessas condições, **o potenciômetro é considerado em equilíbrio**. Como R_{AC} é a resistência elétrica do ramo AC e i, a corrente que a bateria mantém no circuito restante, pela lei de Ohm, temos:

$$E_{pilha} = R_{AC} \cdot i \quad ①$$

Trocando-se a pilha padrão pela pilha cuja fem E_x se quer medir, o equilíbrio do potenciômetro se realizará quando o cursor for levado a uma nova posição C' de AB tal que o amperímetro novamente indique zero. Como $R_{AC'}$ é a resistência elétrica do ramo AC' e a bateria mantém a mesma corrente i no circuito restante, temos:

$$E_x = R_{AC'} \cdot i \quad ②$$

Dividindo-se ② por ①, temos:

$$\boxed{\frac{E_x}{E_{pilha}} = \frac{R_{AC'}}{R_{AC}}}$$

* **POGGENDORFF**, Johann Christian (1796-1877), físico alemão que, baseando-se na associação em paralelo de geradores de fems diferentes, idealizou um método preciso para a medição de uma força eletromotriz. Realizou, também, trabalhos em Óptica, como o método para a medição de ângulos pequenos.

Como as resistências dos ramos AC e AC' são diretamente proporcionais aos respectivos comprimentos, escrevemos:

$$\boxed{\frac{E_x}{E_{pilha}} = \frac{AC'}{AC}}$$

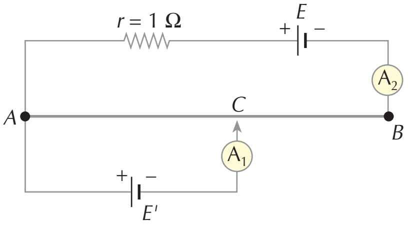
Dessa igualdade pode-se determinar, com precisão, o valor da fem E_x.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R. 109 No circuito, o fio AB é homogêneo, de seção transversal constante. A corrente que atravessa o amperímetro A_1 é nula para $\frac{AC}{AB} = \frac{4}{5}$, quando a ddp entre A e B é 2,5 V.

a) Calcule a fcem E'.

b) Se o amperímetro A_2 indica 0,5 A, calcule a fem E.



Solução:

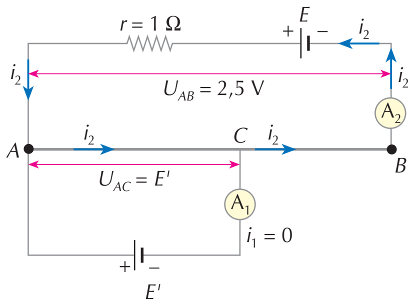
a) Como o fio AB é homogêneo e de seção transversal constante,

$$\frac{R_{AC}}{R_{AB}} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{R_{AC}}{R_{AB}} = \frac{4}{5}$$

Se A_1 indica zero, tem-se $U_{AC} = E'$, e, pela lei de Ohm:

$$\begin{cases} U_{AC} = R_{AC} \cdot i_2 \\ U_{AB} = R_{AB} \cdot i_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{U_{AC}}{U_{AB}} = \frac{R_{AC}}{R_{AB}} \Rightarrow \frac{E'}{2{,}5} = \frac{4}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{E' = 2\text{ V}}$$



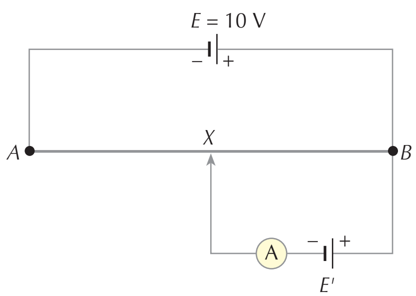
b) Sendo a indicação de A_2 0,5 A, pela equação do gerador, temos:

$$U_{AB} = E - r \cdot i_2 \Rightarrow 2{,}5 = E - 1 \cdot 0{,}5 \Rightarrow \boxed{E = 3\text{ V}}$$

Resposta: a) 2 V; b) 3 V

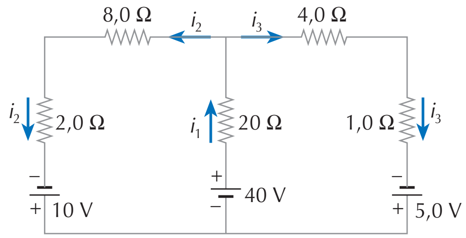
EXERCÍCIO PROPOSTO

P. 275 No circuito dado, os geradores têm resistências internas desprezíveis e AB é um fio homogêneo de seção transversal constante. Sabe-se que o amperímetro A não indica passagem de corrente numa posição X, tal que $BX = \frac{2 \cdot AB}{5}$. Calcule a fem E'.

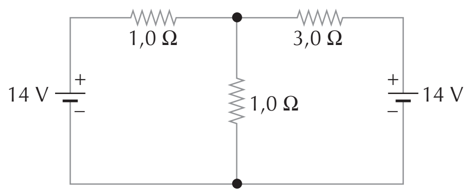


EXERCÍCIOS PROPOSTOS DE RECAPITULAÇÃO

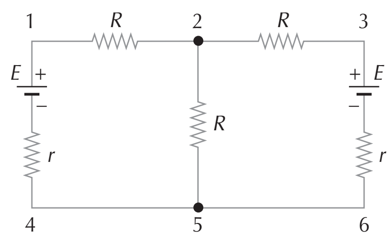
P. 276 Considere o circuito abaixo. Determine as intensidades das correntes elétricas i_1, i_2 e i_3.



P. 277 Determine a potência elétrica dissipada no resistor de 3,0 Ω do circuito esquematizado.

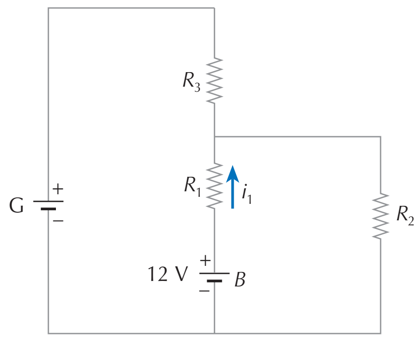


P. 278 (EEM-SP) No circuito são dados:
E = força eletromotriz de cada gerador = 12,0 V
r = resistência interna de cada gerador = 1,00 Ω
R = resistência de cada fio condutor = 3,00 Ω



Determine a intensidade e o sentido de corrente elétrica que percorre o trecho 2-5.

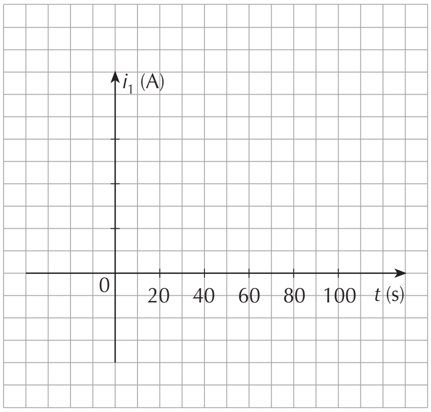
P. 279 (Fuvest-SP) No circuito mostrado na figura abaixo, os três resistores têm valores $R_1 = 2\ \Omega$, $R_2 = 20\ \Omega$ e $R_3 = 5\ \Omega$. A bateria B tem tensão constante de 12 V. A corrente i_1 é considerada positiva no sentido indicado. Entre os instantes $t = 0$ s e $t = 100$ s, o gerador G fornece uma tensão variável $V = 0{,}5t$ (V em volts e t em segundos).



a) Determine o valor da corrente i_1 para $t = 0$ s.

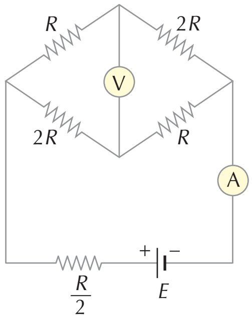
b) Determine o instante t_0 em que a corrente i_1 é nula.

c) Numa folha de papel quadriculado reproduza a figura abaixo. Em seguida, trace a curva que representa a corrente i_1 em função do tempo t, no intervalo de 0 a 100 s. Utilize os eixos da figura indicando claramente a escala da corrente em ampère (A).



d) Determine o valor da potência *Pot* recebida ou fornecida pela bateria B no instante $t = 90$ s.

P. 280 (Fuvest-SP) Considere o circuito da figura, em que $E = 10$ V e $R = 1.000\ \Omega$.



a) Qual a leitura do amperímetro A?

b) Qual a leitura do voltímetro V?

(Considere o amperímetro e o voltímetro ideais.)

P. 281 Determine a diferença de potencial entre os pontos A e B do circuito da figura.