CAPÍTULO 1

Noções de conjuntos

Introdução

De uso corrente em Matemática, a noção básica de conjunto não é definida, ou seja, é aceita intuitivamente e, por isso, chamada **noção primitiva**. Ela foi utilizada primeiramente por Georg Cantor (1845-1918), matemático nascido em São Petersburgo, Rússia, mas que passou a maior parte da vida na Alemanha. Segundo Cantor, a noção de conjunto designa uma coleção de objetos bem definidos e discerníveis, chamados elementos do conjunto.

Pretendemos aqui introduzir alguns conceitos que também consideramos primitivos:

- **conjunto:** designado, em geral, por uma letra latina maiúscula (A, B, C, ..., X, Y, Z);
- **elemento:** designado, em geral, por uma letra latina minúscula (a, b, c, ..., x, y, z);
- **pertinência:** a relação entre elemento e conjunto, denotada pelo símbolo $\in$, que se lê "pertence a".

Assim, por exemplo, se **A** é o conjunto das cores da bandeira do Brasil, designadas por **v** (verde), **a** (amarelo), **z** (azul) e **b** (branco), podemos falar que **v**, **a**, **z**, **b** são elementos de **A**, o qual pode ser representado colocando-se os elementos entre chaves, como segue:

$$A = \{v, a, z, b\}$$

Dizemos, então, que $v \in A$, $a \in A$, $z \in A$ e $b \in A$.

OBSERVAÇÕES

- Os símbolos $\notin$ e $\neq$ são usados para expressar as negações de $\in$ e $=$, respectivamente.
  No exemplo acima, temos $v \neq a$, $v \neq z$, $v \neq b$, $a \neq z$, $a \neq b$, $b \neq z$ e, se designarmos a cor preta por **p**, temos que $p \notin A$.
- Além de poder ser descrito enumerando-se um a um seus elementos, como mostrado no exemplo anterior, um conjunto pode ser designado por uma propriedade característica de seus elementos. Nesse caso, podemos representá-lo da seguinte forma:

$$A = \{x \underset{\substack{\downarrow \\ \text{(lê-se: tal que)}}}{|} x \text{ é cor da bandeira do Brasil}\}$$

Igualdade de conjuntos

Dois conjuntos **A** e **B** são iguais se todo elemento de **A** pertence a **B** e, reciprocamente, todo elemento de **B** pertence a **A**.

Assim, por exemplo:

- se $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{b, c, a\}$, temos que $A = B$;
- se $A = \{x \mid x - 2 = 5\}$ e $B = \{7\}$, temos que $A = B$;
- se **A** é o conjunto das letras da palavra "garra" e **B** é conjunto das letras da palavra "agarrar", temos $A = B$. Note que, dentro de um mesmo conjunto, não precisamos repetir elementos. Apesar de a palavra "garra" ter cinco letras e a palavra "agarrar" ter sete, temos $\{g, a, r, r, a\} = \{a, g, a, r, r, a, r\} = \{a, g, r\}$.

OBSERVAÇÕES

- Há conjuntos que possuem um único elemento, chamados **conjuntos unitários**, e há um conjunto que não possui elementos, chamado **conjunto vazio** e indicado por $\{\ \}$ ou $\varnothing$. Por exemplo:

  a) São conjuntos unitários:

  $$A = \{5\}$$

  $$B = \{x \mid x \text{ é capital da França}\} = \{\text{Paris}\}$$

  b) São conjuntos vazios:

  $$C = \text{conjunto das cidades de Goiás banhadas pelo oceano Atlântico} = \varnothing$$

  $$D = \{x \mid x \neq x\} = \varnothing$$

- Há conjuntos cujos elementos são conjuntos, como, por exemplo:

  $$F = \{\varnothing, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$$

  Assim, temos: $\varnothing \in F$; $\{a\} \in F$; $\{c\} \in F$; $\{a, b\} \in F$; $\{a, c\} \in F$ e $\{a, b, c\} \in F$.

  Observe que $a \notin F$ e $c \notin F$, pois **a** e **c** não são elementos do conjunto **F**.

  Logo, $a \neq \{a\}$ e $c \neq \{c\}$.

PENSE NISTO:

Os conjuntos $\{a\}$ e $\{\{a\}\}$ são iguais?

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

1 Indique se cada um dos elementos -4; $\frac{1}{3}$; 3 e 0,25 pertence ou não a cada um destes conjuntos:

$A = \{x \mid x \text{ é um número inteiro}\}$

$B = \{x \mid x < 1\}$

$C = \{x \mid 15x - 5 = 0\}$

$D = \left\{x \,\middle|\, -2 \leqslant x \leqslant \frac{1}{4}\right\}$

2 Considerando que $F = \{x \mid x \text{ é estado do Sudeste brasileiro}\}$ e $G = \{x \mid x \text{ é capital de um país sul-americano}\}$, quais das sentenças seguintes são verdadeiras?

a) Rio de Janeiro $\in F$

b) México $\in G$

c) Lima $\notin G$

d) Montevidéu $\in G$

e) Espírito Santo $\notin F$

f) São Paulo $\in F$

3 Em cada caso, reescreva o conjunto dado enumerando seus elementos:

$A = \{x \mid x \text{ é letra da palavra “beterraba”}\}$

$B = \{x \mid x \text{ é nome de um estado brasileiro cuja letra inicial é p}\}$

$C = \left\{x \,\middle|\, x = \frac{a}{b}, \text{ em que a e b são números inteiros, } a \neq b,\ 1 < a < 4 \text{ e } 1 < b < 4\right\}$

4 Dado $H = \{-1, 0, 2, 4, 9\}$, reescreva cada um dos conjuntos seguintes enumerando seus elementos.

$A = \{x \mid x \in H \text{ e } x < 1\}$

$B = \left\{x \,\middle|\, x \in H \text{ e } \frac{2x - 1}{3} = 1\right\}$

$C = \{x \mid x \in H \text{ e } x \text{ é um quadrado perfeito}\}$

$D = \{x \mid x \in H \text{ e } x < 0\}$

$E = \{x \mid x \in H \text{ e } 3x + 1 = 10\}$

5 Classifique em verdadeira (**V**) ou falsa (**F**) cada uma das sentenças seguintes:

a) $0 \in \varnothing$

b) $\{a, b\} \in \{a, b, c, d\}$

c) $\{x \mid 2x + 9 = 13\} = \{2\}$

d) $a \in \{a, \{a\}\}$

e) $\{x \mid x < 0 \text{ e } x \geqslant 0\} = \varnothing$

f) $\varnothing \in \{\varnothing, \{a\}\}$

6 Em cada caso, identifique os conjuntos unitários e os vazios.

$A = \{x \mid x = 1 \text{ e } x = 3\}$

$B = \{x \mid x \text{ é um número primo positivo e par}\}$

$C = \left\{x \,\middle|\, 0 < x < 5 \text{ e } \frac{3x + 5}{2} = 4\right\}$

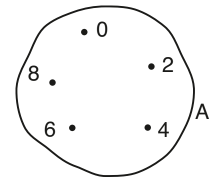
$D = \{x \mid x \text{ é capital da Bahia}\}$

$E = \{x \mid x \text{ é um mês cuja letra inicial do nome é p}\}$

$F = \left\{x \,\middle|\, \frac{2}{x} = 0\right\}$

OBSERVAÇÃO

John Venn (1834-1923), matemático e lógico inglês, usou uma região plana limitada por uma linha fechada e não entrelaçada para representar, em seu interior, os elementos de um conjunto. Essa representação é conhecida como **diagrama de Venn**.
Assim, por exemplo, temos a figura ao lado, que mostra uma representação do conjunto $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ por meio de um diagrama de Venn.



Subconjuntos – relação de inclusão

Consideremos os conjuntos $A = \{x \mid x$ é letra da palavra "ralar"$\}$ e $B = \{x \mid x$ é letra da palavra "algazarra"$\}$; ou seja:

$$A = \{r, a, l\} \text{ e } B = \{a, l, g, z, r\}$$

Note que todo elemento de **A** é também elemento de **B**. Nesse caso, dizemos que **A** é um **subconjunto** ou uma **parte** de **B**, o que é indicado por:

$A \subset B$ (lê-se: **A** está contido em **B**, ou **A** é um subconjunto de **B**, ou **A** é uma parte de **B**),

ou, ainda:

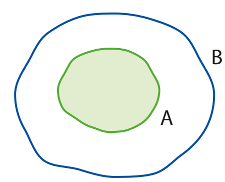
$B \supset A$ (lê-se: **B** contém **A**)

De modo geral, temos:

$A \subset B$ se todo elemento de **A** também é elemento de **B**.

OBSERVAÇÕES

- O símbolo $\subset$ é chamado **sinal de inclusão** e estabelece uma relação entre dois conjuntos.
  A relação de inclusão entre dois conjuntos, **A** e **B**, pode ser ilustrada por meio de um diagrama de Venn, como na figura ao lado.
- Os símbolos $\not\subset$ e $\not\supset$ são as negações de $\subset$ e $\supset$, respectivamente.
  Assim sendo, temos:
  $A \not\subset B$ se pelo menos um elemento de **A** não pertence a **B**.



$A \subset B$

Propriedades da relação de inclusão

Quaisquer que sejam os conjuntos **A**, **B** e **C**, temos:

- $\varnothing \subset A$
- **Reflexiva:** $A \subset A$.
- **Transitiva:** Se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$.
- **Antissimétrica:** Se $A \subset B$ e $B \subset A$, então $A = B$.

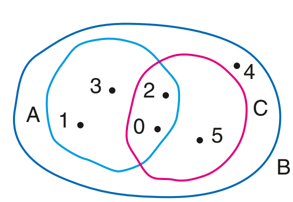
Veja os exemplos a seguir.

EXEMPLO 1

Dados os conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e $C = \{0, 2, 5\}$, temos:

a)
- $A \subset B$, pois todo elemento de **A** pertence a **B**;
- $C \not\subset A$, pois $5 \in C$ e $5 \notin A$;
- $B \supset C$, pois todo elemento de **C** pertence a **B**;
- $B \not\subset A$, pois $4 \in B$ e $4 \notin A$, e também $5 \in B$ e $5 \notin A$.

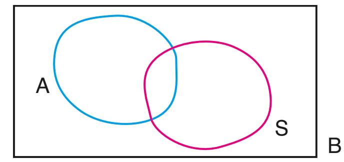
b) Os conjuntos **A**, **B** e **C** podem ser representados pelo diagrama de Venn ao lado.



EXEMPLO 2

Sejam **B** o conjunto de todos os brasileiros, **A** o conjunto dos brasileiros que dirigem automóveis e **S** o conjunto das pessoas que nasceram no Sul do Brasil.

Como mostra o diagrama ao lado, **S** e **A** são partes de **B**, ou seja, S ⊂ B e A ⊂ B.



Note que:

- S ⊄ A, porque existem brasileiros que nasceram no Sul e não dirigem automóveis;
- A ⊄ S, porque existem brasileiros que dirigem automóveis e não nasceram no Sul do país;
- S ⊂ B e A ⊂ B, porque tanto os elementos de **S** quanto os de **A** são brasileiros.

EXEMPLO 3

Dados os conjuntos F = ∅, G = {a}, H = {a, b} e J = {a, b, c}:

- o único subconjunto de **F** é o conjunto ∅;
- são subconjuntos de **G** os conjuntos ∅ e {a};
- são subconjuntos de **H** os conjuntos ∅, {a}, {b} e {a, b};
- são subconjuntos de **J** os conjuntos ∅, {a}, {b}, {c}, {a, b}, {a, c}, {b, c} e {a, b, c}.

Observe que:

- **F** tem 0 elemento e 1 subconjunto;
- **G** tem 1 elemento e 2 subconjuntos;
- **H** tem 2 elementos e 4 subconjuntos;
- **J** tem 3 elementos e 8 subconjuntos.

PENSE NISTO:

Se um conjunto **X** tem **n** elementos, quantos são os seus subconjuntos?

OBSERVAÇÃO

Dado um conjunto **A**, podemos formar um conjunto cujos elementos são todos os subconjuntos de **A**. Esse conjunto é chamado **conjunto das partes de A** e é indicado por P(A).

Assim, por exemplo, se A = {1, 2, 3}, então os seus subconjuntos são ∅, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3} e {1, 2, 3}.

Logo, o conjunto das partes de **A** é:

$$P(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

7 Sendo M = {0, 3, 5}, classifique as sentenças seguintes em verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**).

a) 5 ∈ M
b) 3 ⊂ M
c) ∅ ∈ M
d) 0 ∈ M
e) ∅ ⊂ M
f) 0 = ∅
g) 0 ∈ ∅
h) 0 ⊂ M

8 Responda:

a) Use um diagrama de Venn para representar os conjuntos **A** e **B**, tais que **A** é o conjunto dos países da América do Sul e **B** é o conjunto dos países do continente americano.

b) Reproduza o diagrama obtido no item anterior e nele destaque o conjunto dos países do continente americano que não se localizam na América do Sul.

9 Se **A**, **B**, **C** e **D** são conjuntos não vazios, para cada uma das situações seguintes faça um diagrama de Venn que as represente.

a) D ⊂ A ⊂ C ⊂ B

b) D ⊂ A ⊂ B, C ⊂ B e C ⊄ A

10 Sendo $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{1, 3, 4\}$ e $D = \{1, 2, 3, 4\}$, classifique em verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**) as sentenças abaixo:

a) $B \subset D$ **c)** $A \not\subset C$ **e)** $C \not\supset B$

b) $A \subset B$ **d)** $D \supset A$ **f)** $C = D$

11 São dados os conjuntos: $A = \{x \mid x$ é um número ímpar positivo$\}$ e $B = \{y \mid y$ é um número inteiro e $0 < y \leqslant 4\}$.

Determine o conjunto dos elementos **z**, tais que $z \in B$ e $z \notin A$.

12 Dado o conjunto $A = \{a, b, c\}$, em quais dos itens seguintes as sentenças são verdadeiras?

a) $c \notin A$ **d)** $\{a, b\} \in A$

b) $\{c\} \in A$ **e)** $\{b\} \subset A$

c) $\{a, c\} \subset A$ **f)** $\{a, b, c\} \subset A$

13 Dados os conjuntos $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ e $Z = \{0, 1, 2\}$:

a) determine todos os subconjuntos de **X**, cada qual com exatamente três elementos;

b) dê três exemplos de subconjuntos de **Y**, cada qual com apenas quatro elementos;

c) determine o conjunto P(Z).

14 Considere as sentenças seguintes:

I. $\varnothing = \{x \mid x \neq x\}$

II. $\varnothing \subset \{\varnothing\}$

III. $\varnothing \in \{\varnothing\}$

IV. $\varnothing \subset \varnothing$

Quais dessas sentenças são verdadeiras?

15 Dado o conjunto $U = \{0, 1, 2, 3\}$, classifique em verdadeira (**V**) ou falsa (**F**) cada uma das seguintes afirmações sobre **U**:

I. $\varnothing \in U$

II. $3 \in U$ e $U \supset \{3\}$

III. Existem 4 subconjuntos de **U** que são unitários.

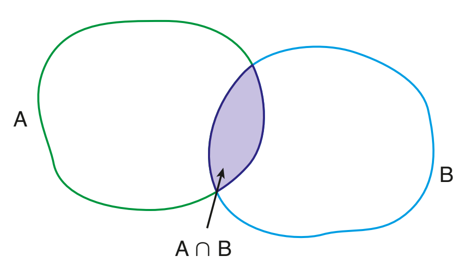
IV. O conjunto P(U) tem 8 elementos.

Interseção e reunião

A partir de dois conjuntos **A** e **B** podemos construir novos conjuntos cujos elementos devem obedecer a condições preestabelecidas.

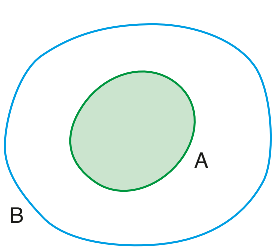
Por exemplo, dados os conjuntos **A** e **B**, podemos determinar um conjunto cujos elementos pertencem simultaneamente a **A** e a **B**. Esse conjunto é chamado **interseção** de **A** e **B** e indicado por $A \cap B$, que se lê "**A** interseção **B**" ou, simplesmente, "**A** inter **B**". Assim, define-se:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$



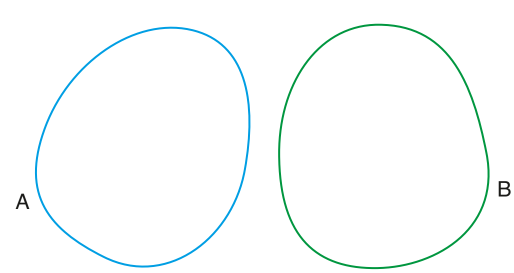
Há dois casos particulares:

• $A \subset B$



$A \cap B = A$

• **A** e **B** não têm elementos comuns.



Nesse caso, $A \cap B = \varnothing$ e **A** e **B** se dizem disjuntos.

OBSERVAÇÃO

O conectivo **e**, que na definição é colocado entre as duas sentenças ($x \in A$ e $x \in B$), indica que as condições que ambas apresentam devem ser obedecidas. Ele pode ser substituído pelo símbolo $\wedge$.

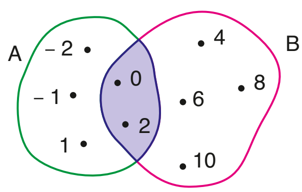
Veja os exemplos a seguir.

EXEMPLO 4

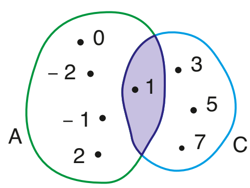
Dados os conjuntos $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ e $C = \{1, 3, 5, 7\}$, temos:

- $A \cap B = \{0, 2\}$
- $A \cap C = \{1\}$
- $B \cap C = \varnothing$ (Note que **B** e **C** são conjuntos disjuntos.)

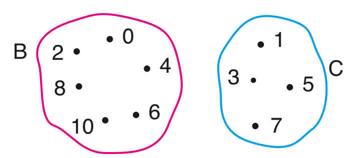
Os diagramas de Venn que representam os conjuntos $A \cap B$, $A \cap C$ e $B \cap C$ são:



$A \cap B$



$A \cap C$



$B \cap C = \varnothing$

EXEMPLO 5

De modo geral, indica-se por n(A) o número de elementos de um conjunto **A**. Assim, por exemplo, se $A = \{1, 2\}$, $B = \{3\}$ e $D = \{2, 3, 4\}$, então:

- como $A \cap B = \varnothing$, ou seja, **A** e **B** são disjuntos, tem-se $n(A \cap B) = 0$;
- como $A \cap D = \{2\}$, tem-se $n(A \cap D) = 1$.

Lembrando que dentro de um conjunto não precisamos repetir elementos, dizer que $n(A) = x$ significa dizer que o conjunto **A** possui **x** elementos distintos entre si.

EXEMPLO 6

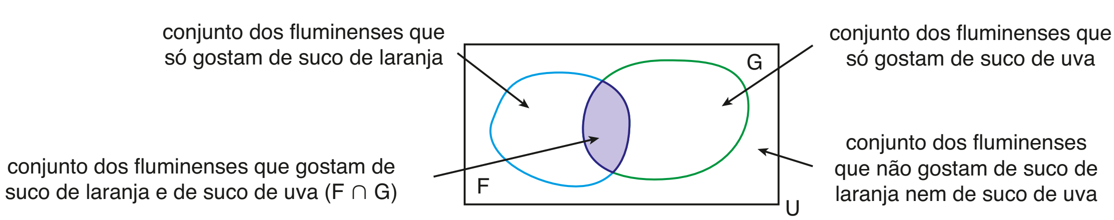
Sendo **F** o conjunto das pessoas que gostam de suco de laranja e **G** o conjunto das pessoas que gostam de suco de uva, podemos considerar que **F** e **G** são subconjuntos de um mesmo conjunto **U**, ou seja, todos os elementos de **F** e **G** pertencem a **U**.

Esse conjunto **U** é chamado **conjunto universo**.

Assim, no caso dos conjuntos **F** e **G** considerados, **U** poderia ser, entre outros, o conjunto das pessoas que moram no estado do Rio de Janeiro (fluminenses). Então, temos:

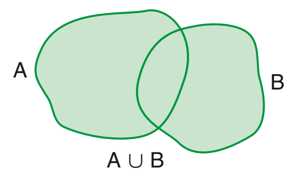
$$F = \{x \in U \mid x \text{ gosta de suco de laranja}\} \text{ e } G = \{x \in U \mid x \text{ gosta de suco de uva}\}$$

Uma interpretação do diagrama representativo dos conjuntos considerados é:



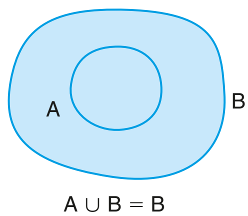
A partir de dois conjuntos, **A** e **B**, também se pode obter um novo conjunto cujos elementos pertencem a pelo menos um dos conjuntos dados, ou seja, ou pertencem somente a **A**, ou somente a **B**, ou a ambos ($A \cap B$). O conjunto assim obtido é chamado **reunião** (ou **união**) de **A** e **B** e indicado por $A \cup B$, que se lê "**A** reunião **B**" ou "**A** união **B**". Assim, define-se:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

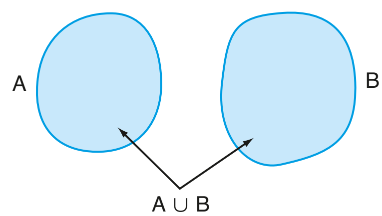


Há dois casos particulares:

- $A \subset B$



- $A \cap B = \varnothing$ (**A** e **B** disjuntos)



Veja o exemplo a seguir.

EXEMPLO 7

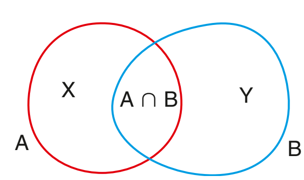
Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{6, 7, 8\}$, $C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e $D = \{3, 4, 6, 8\}$, temos:

- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$
- $A \cup C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} = C$
- $B \cup D = \{6, 7, 8, 3, 4\}$
- $A \cup (C \cup D) = A \cup \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$

OBSERVAÇÕES

- O conectivo **ou**, que na definição é colocado entre as duas sentenças ($x \in A$ ou $x \in B$), indica que pelo menos uma delas deve ser obedecida. Ele pode ser substituído pelo símbolo $\vee$.
- Quaisquer que sejam os conjuntos **A** e **B**, temos: $A \subset (A \cup B)$ e $B \subset (A \cup B)$.
- Se $A \cup B = \varnothing$, então $A = \varnothing$ e $B = \varnothing$, e reciprocamente, se $A = \varnothing$ e $B = \varnothing$, então $A \cup B = \varnothing$.
- Pelo diagrama ao lado, vê-se que:

$A = X \cup (A \cap B)$ e $A \cup B = X \cup B$



Como $X \cap (A \cap B) = \varnothing$, então temos:

$$n(A) = n(X) + n(A \cap B) \quad (1)$$

Como $X \cap B = \varnothing$, então temos:

$$n(A \cup B) = n(X) + n(B) \quad (2)$$

Assim, de (1) temos: $n(X) = n(A) - n(A \cap B)$, que, substituído em (2), resulta em:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Em particular, se **A** e **B** são disjuntos, ou seja, se $A \cap B = \varnothing$, temos:

$n(A \cap B) = 0$ e, nesse caso, $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$.

Propriedades da interseção e da reunião

Vamos admitir, sem demonstração, a validade de cada uma das seguintes propriedades.
Quaisquer que sejam os conjuntos **A**, **B** e **C**:

- **Idempotente:** $A \cap A = A$ e $A \cup A = A$
- **Comutativa:** $A \cap B = B \cap A$ e $A \cup B = B \cup A$
- **Associativa:** $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ e $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- **Distributiva:** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ e $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

1 São dados os conjuntos $A = \{a, b, c\}$, $B = \{c, d, f\}$ e $C = \{a, f, g\}$. Determine um conjunto **X**, sabendo que:

- **X** tem três elementos e $X \subset \{a, b, c, d, f, g\}$;
- $A \cap X = \{c\}$, $B \cap X = \{c, f\}$ e $C \cap X = \{f, g\}$.

Solução:

Se $A \cap X = \{c\}$, temos: $a \notin X$, $b \notin X$ e $c \in X$ (1)

Se $B \cap X = \{c, f\}$, temos: $d \notin X$, $c \in X$ e $f \in X$ (2)

Se $C \cap X = \{f, g\}$, temos: $a \notin X$, $f \in X$ e $g \in X$ (3)

Como **X** tem três elementos e $X \subset \{a, b, c, d, f, g\}$, então, de (1), (2) e (3), conclui-se que:

$$X = \{c, f, g\}$$

2 Seja D(x) o conjunto dos divisores positivos do número inteiro **x**. Determine $D(18) \cap D(24)$.

Solução:

Como $D(18) = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$ e $D(24) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$, então: $D(18) \cap D(24) = \{1, 2, 3, 6\}$.

Note que, como o maior elemento do conjunto $D(18) \cap D(24)$ é o número 6, então dizemos que 6 é o **máximo divisor comum** de 18 e 24 (indica-se: $mdc(18, 24) = 6$).

PENSE NISTO:

Se **x** e **y** são números inteiros, os conjuntos D(x) e D(y) podem ser disjuntos?

3 Dos 650 alunos matriculados em uma escola de idiomas, sabe-se que 420 cursam inglês, 134 cursam espanhol e 150 não cursam inglês nem espanhol. Determine o número de alunos que:

a) cursam inglês ou espanhol;

b) cursam inglês e espanhol;

c) cursam espanhol e não cursam inglês;

d) cursam apenas inglês ou apenas espanhol.

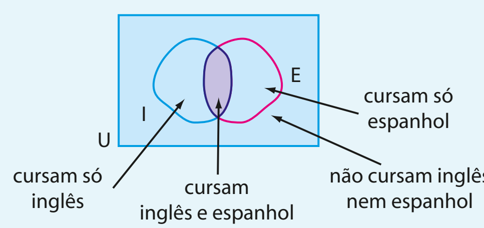
PIXTAL/KEYSTONE BRASIL

Solução:

Considerando **U** o conjunto dos alunos matriculados na escola, I o conjunto dos alunos que cursam inglês e **E** o conjunto dos alunos que cursam espanhol, temos:

$n(U) = 650$, $n(I) = 420$ e $n(E) = 134$.

Para auxiliar a resolução, vamos observar o diagrama de Venn representado abaixo.



a) Calculando $n(I \cup E)$:

$n(I \cup E) = n(U) - 150 = 650 - 150 = 500$

b) Calculando $n(I \cap E)$:

Como $n(I \cup E) = n(I) + n(E) - n(I \cap E)$, então:

$n(I \cap E) = n(I) + n(E) - n(I \cup E) =$
$= 420 + 134 - 500 = 54$

c) Dos 134 alunos que cursam espanhol, 54 também cursam inglês. Como $134 - 54 = 80$, então 80 alunos cursam espanhol e não cursam inglês.

d) Dos 420 alunos que cursam inglês, 54 também cursam espanhol. Como $420 - 54 = 366$, então 366 alunos cursam apenas inglês. Vimos no item c que 80 alunos cursam apenas espanhol, assim, o número de alunos procurado é $366 + 80 = 446$.

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

16 Dados os conjuntos $A = \{p, q, r\}$, $B = \{r, s\}$ e $C = \{p, s, t\}$, determine os conjuntos:

a) $A \cup B$
b) $A \cup C$
c) $B \cup C$
d) $A \cap B$
e) $A \cap C$
f) $B \cap C$

17 Sendo **A**, **B** e **C** os conjuntos dados no exercício anterior, determine:

a) $(A \cap B) \cup C$
b) $A \cap B \cap C$
c) $(A \cap C) \cup (B \cap C)$
d) $(A \cup C) \cap (B \cup C)$

18 Dado $U = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, sejam $A = \{x \in U \mid x < 0\}$, $B = \{x \in U \mid -3 < x < 2\}$ e $C = \{x \in U \mid x \geqslant -1\}$, determine:

a) $A \cap B \cap C$
b) $A \cup B \cup C$
c) $C \cup (B \cap A)$
d) $(B \cup A) \cap C$

19 Dos 36 alunos do primeiro ano do Ensino Médio de certa escola, sabe-se que 16 jogam futebol, 12 jogam voleibol e 5 jogam futebol e voleibol. Quantos alunos dessa classe não jogam futebol ou voleibol?

20 Sobre os 48 funcionários de certo escritório, sabe-se que: 30 têm automóvel, $\frac{1}{3}$ são do sexo feminino e $\frac{3}{4}$ do número de homens têm automóvel. Com base nessas informações, responda:

a) Quantos funcionários são do sexo feminino e têm automóvel?
b) Quantos funcionários são homens ou têm automóvel?

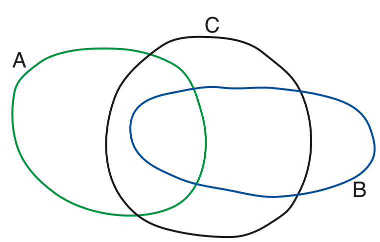
21 Se **A**, **B** e **C** são conjuntos quaisquer, classifique cada uma das sentenças seguintes em verdadeira (**V**) ou falsa (**F**):

a) $A \cup \varnothing = A$
b) $B \cap \varnothing = \varnothing$
c) $(A \cap B) \subset B$
d) $B \supset (A \cup B)$
e) $(B \cup C) \subset B$
f) $(A \cap B) \subset (A \cup B)$
g) $\varnothing \not\subset (A \cap B)$
h) $(A \cup B) \subset (A \cup B \cup C)$

22 Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$ e $C = \{1, 2, 4\}$, determine o conjunto **X** sabendo que $A \cup X = \{1, 2, 3\}$, $B \cup X = \{3, 4\}$ e $C \cup X = A \cup B$.

23 Determine o número de conjuntos **X** que satisfazem a relação $\{1, 2\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 4\}$.

24 Na figura abaixo tem-se a representação dos conjuntos **A**, **B** e **C**, não vazios.



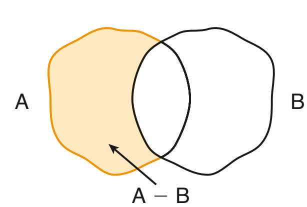
Relativamente a esses conjuntos, quais das afirmações seguintes são verdadeiras?

a) $(B \cup C) \subset A$
b) $(B \cap C) \subset (A \cup C)$
c) $(A \cap B) \subset (B \cap C)$
d) $(A \cap B) \cup B = \varnothing$

Diferença

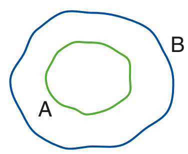
Dados os conjuntos **A** e **B**, podemos determinar um conjunto cujos elementos pertencem ao conjunto **A** e não pertencem ao conjunto **B**. Esse conjunto é chamado **diferença entre A e B** e indicado por $A - B$, que se lê "**A** menos **B**". Assim, define-se:

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

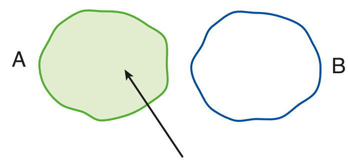


Há três casos particulares:

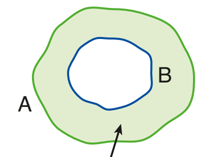
- $A \subset B$
- **A** e **B** disjuntos
- $B \subset A$



$A - B = \varnothing$



$A - B = A$



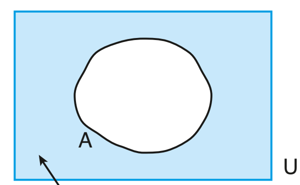
$A - B$

OBSERVAÇÕES

- No terceiro caso, em que $B \subset A$, o conjunto $A - B$ é chamado **complementar de B em relação a A**.

  Indica-se: $\complement_A^B = A - B$, se $B \subset A$.
- Sendo **A** um subconjunto de um conjunto universo **U**, então $\complement_U^A = U - A$ pode ser representado pelo símbolo $\overline{A}$, que se lê "**A** barra". Assim, $\overline{A} = \complement_U^A = U - A$.

  Note que para todo elemento **x** do conjunto universo **U**, se $x \in \overline{A}$, então $x \notin A$ e, por contraposição, se $x \in A$, então $x \notin \overline{A}$.



$\overline{A} = \complement_U^A = U - A$

Veja o exemplo a seguir:

EXEMPLO 8

Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, $C = \{2, 3\}$ e $D = \{0, 7, 8\}$, temos:

- $A - B = \{1, 2\}$
- $A - C = \{1, 4, 5\}$ (nesse caso, $A - C = \complement_A^C$, pois $C \subset A$).
- $B - A = \{6\}$
- $C - D = \{2, 3\}$, pois, como $C \cap D = \varnothing$, $C - D = C$.
- $C - A = \varnothing$, pois $C \subset A$.
- $D - D = \varnothing$
- $\complement_B^C$: não se define, pois $C \not\subset B$.

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

4 Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ e $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, em cada caso vamos determinar os elementos do conjunto indicado.

a) $\complement_U^{(A \cap B)}$ **b)** $\complement_U^A \cup \complement_U^B$

Solução:

a) Como $A \cap B = \{3, 4\}$, então $\complement_U^{(A \cap B)} = U - (A \cap B) = \{0, 1, 2, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

b) Como $\complement_U^A = U - A = \{0, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e $\complement_U^B = U - B = \{0, 1, 2, 8, 9\}$, então:

$$\complement_U^A \cup \complement_U^B = \{0, 1, 2, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

Os resultados encontrados nos itens *a* e *b* ilustram a validade da seguinte propriedade:

$$\complement_U^{(A \cap B)} = \complement_U^A \cup \complement_U^B$$

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

25 Dados os conjuntos $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, c, d, e\}$, $C = \{c, d\}$ e $D = \{a, d, e\}$, classifique cada uma das sentenças seguintes em verdadeira (**V**) ou falsa (**F**).

a) $A - B = \{b\}$
b) $B - C = \{a, e\}$
c) $D - B = \{c\}$
d) $\complement_A^C = \varnothing$
e) $\complement_B^{\varnothing} = \{a, c, d, e\}$
f) $\complement_B^D = \{c\}$
g) $(A \cap B) - D = \{a, d, e\}$
h) $B - (A \cup C) = \{e\}$
i) $(\complement_B^C) \cup (\complement_B^D) = \{a, c, e\}$

26 Dados os conjuntos $A = \{2, 4, 8, 12, 14\}$, $B = \{5, 10, 15, 20, 25\}$ e $C = \{1, 2, 3, 18, 20\}$, determine:

a) $A - C$
b) $B - C$
c) $(C - A) \cap (B - C)$
d) $(A - B) \cap (C - B)$

27 Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{4, 5\}$ e $C = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, determine o número de subconjuntos de $(A - B) \cap C$.

28 Desenhe um diagrama de Venn para três conjuntos **X**, **Y** e **Z**, não vazios, satisfazendo as condições: $Z \subset Y$, $X \not\subset Y$, $X \cap Y \neq \varnothing$ e $Z - X = Z$.

29 Considerando o conjunto universo $U = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e dados $A = \{x \in U \mid x \leqslant 3\}$, $B = \{x \in U \mid x \text{ é ímpar}\}$ e $C = \{x \in U \mid -2 \leqslant x < 1\}$, determine:

a) $A \cap B$
b) $A \cup C$
c) $A - C$
d) $C - B$
e) $\complement_A^C$
f) $\complement_B^A$
g) $\overline{B}$
h) $(A \cap C) - B$
i) $C \cup (A - B)$
j) $(A - B) \cup (B - A)$
k) $\overline{C} \cap \overline{A}$
l) $\overline{B} \cap (C - B)$

30 Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 4, 6, 8\}$ e $C = \{2, 4, 5, 7\}$, obtenha o conjunto **X** tal que $X \subset A$ e $A - X = B \cap C$.

31 Sejam **A** e **B** subconjuntos de um conjunto universo **U**. Se **U** tem 35 elementos, **A** tem 20 elementos, $A \cap B$ tem 6 elementos e $A \cup B$ tem 28 elementos, determine o número de elementos dos conjuntos.

a) B
b) $A - B$
c) $B - A$
d) $\overline{A}$
e) $\overline{B}$
f) $\overline{A \cap B}$
g) $\overline{A - B}$
h) $\overline{A} \cap \overline{B}$

DESAFIO

(UFU-MG) De uma escola de Uberlândia, partiu uma excursão para Caldas Novas com 40 alunos. Ao chegar a Caldas Novas, 2 alunos adoeceram e não frequentaram as piscinas. Todos os demais alunos frequentaram as piscinas, sendo 20 pela manhã e à tarde, 12 somente pela manhã, 3 somente à noite e 8 pela manhã, à tarde e à noite. Se ninguém frequentou as piscinas somente no período da tarde, quantos alunos frequentaram as piscinas à noite?

a) 16 **b)** 12 **c)** 14 **d)** 18