CAPÍTULO 11

Trigonometria no triângulo retângulo

Neste capítulo, antes de iniciar o estudo da trigonometria no triângulo retângulo, vamos conhecer um pouco da história do desenvolvimento desta importante área da Matemática.

UM POUCO DE **HISTÓRIA**

A trigonometria

O significado da palavra **trigonometria** (do grego *trigonon*, "triângulo", e *metron*, "medida") remete-nos ao estudo dos ângulos e lados dos triângulos — figuras básicas em qualquer estudo de Geometria.

Mais amplamente, usamos a trigonometria para resolver problemas geométricos que relacionam ângulos e distâncias. A origem desses problemas nos leva a civilizações antigas do Mediterrâneo e à civilização egípcia, em que eram conhecidas regras simples de mensuração e demarcação de linhas divisórias de terrenos nas margens dos rios. Há registros de medições de ângulos e segmentos datados de 1500 a.C. no Egito, usando a razão entre a sombra de uma vara vertical (*gnomon*) sobre uma mesa graduada. Alguns desses registros encontram-se no Museu Egípcio de Berlim.

RICHARD MASCHMEYER/AFP

As Grandes Pirâmides, Egito, Norte da África, 2015.

Também teria surgido no Egito um dos primeiros instrumentos conhecidos para medir ângulos, chamado groma, que teria sido empregado na construção das Grandes Pirâmides.

Os teodolitos — aparelhos hoje usados por agrimensores e engenheiros — tiveram sua "primeira versão" (com esse nome) no século XVI.

Durante muito tempo, a trigonometria esteve ligada à Astronomia, devido à dificuldade natural que havia em relação às estimativas e ao cálculo de distâncias impossíveis de medir diretamente. A civilização grega, dando continuidade aos trabalhos iniciados pelos babilônios, deixou contribuições importantes nesse sentido, como, por exemplo, a estimativa das distâncias entre o Sol e a Terra e entre o Sol e a Lua, feita por Aristarco, por volta de 260 a.C. — mesmo que seus números estivessem muito longe dos valores modernos –, e a estimativa da medida do raio da Terra, feita por Eratóstenes, por volta de 200 a.C. (veja texto no volume 2 desta coleção).

No entanto, o primeiro estudo sistemático das relações entre ângulos (ou arcos) num círculo e o comprimento da corda correspondente, que resultou na primeira tabela trigonométrica, é atribuído a Hiparco de Niceia (180 a.C.-125 a.C.), que ficou conhecido como "pai da trigonometria".

Somente no século XVIII, com a invenção do cálculo infinitesimal, a trigonometria desvinculou-se da Astronomia, passando a ser um ramo independente e em desenvolvimento da Matemática.

Nesta coleção, a abordagem da trigonometria (plana) ocorrerá da seguinte forma:

- o estudo dos triângulos retângulos, em que aparecem as razões trigonométricas, será feito no volume 1;
- os triângulos não retângulos (acutângulos ou obtusângulos) serão estudados no volume 2;
- o estudo das funções trigonométricas (ou circulares), em que aparecem os movimentos periódicos, será feito também no volume 2.

Fontes de pesquisa: BOYER, Carl B. *História da Matemática.* 3ª ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2010; KENNEDY, Edward S. *Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula.* Tradução Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992.

Razões trigonométricas

Acessibilidade e inclinação de uma rampa

De acordo com a Norma Brasileira nº 9050, de 2004, da Associação Brasileira de Normas Técnicas, uma pessoa com mobilidade reduzida é "aquela que, temporária ou permanentemente, tem limitada a sua capacidade de se relacionar com o meio e de utilizá-lo. Entende-se por pessoa com mobilidade reduzida a pessoa com deficiência, idosa, obesa, gestante entre outros".

DANIEL CYMBALISTA/PULSAR IMAGENS

Rampa de baixa inclinação com piso tátil.

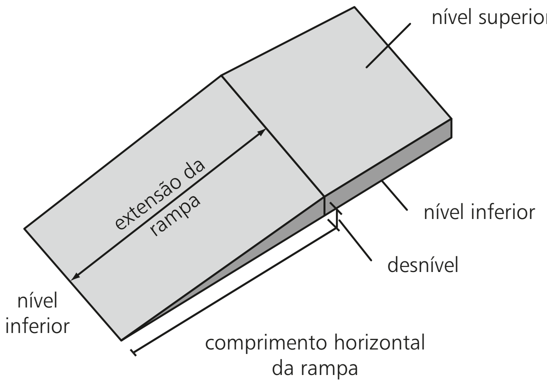
São pessoas que, por qualquer motivo, têm dificuldade de se movimentar, mesmo não sendo portadoras de deficiência.

Para que todas as pessoas, deficientes ou não, possam frequentar os mesmos lugares e usufruir dos mesmos bens e serviços, é necessária a implantação de meios que possibilitem o acesso de pessoas com restrição de mobilidade.

A substituição de degraus por rampas de baixa inclinação, a implantação de sinalização horizontal (piso tátil), vertical (sinalização em braile) e sonorizada e remoções de barreiras em geral são intervenções que facilitam o acesso de pessoas com mobilidade reduzida.

As rampas constituem uma alternativa à construção de escadas quando se quer vencer um desnível entre duas superfícies planas e facilitar o deslocamento de cadeirantes, pessoas com mobilidade reduzida, carrinhos de bebê, malas etc.

Uma rampa garante circulação mais ágil e não requer tanta atenção no deslocamento, se comparada a uma escada.

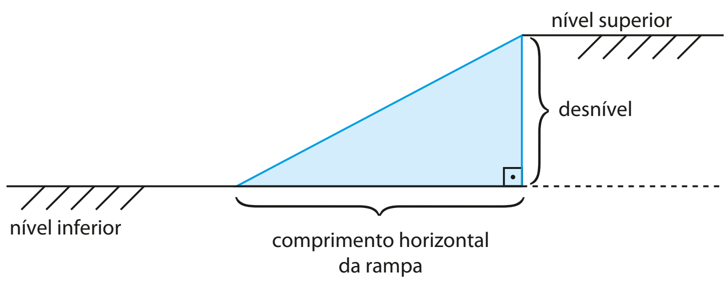


SETUP

Em São Paulo, o decreto municipal nº 45 904, de 19 de maio de 2005, sobre a padronização dos passeios públicos, parte da via pública destinada à circulação de qualquer pessoa, regulamenta que “passeios com declividade acima de 8,33% não serão considerados rotas acessíveis”.

Mas o que significa uma declividade de 8,33%?

A *declividade* de uma rampa é a razão entre o desnível a ser vencido e o comprimento horizontal da rampa, como mostra a figura seguinte:



Podemos também pensar na declividade de uma rampa como a razão entre o deslocamento vertical e o deslocamento horizontal experimentados ao se caminhar sobre a rampa.

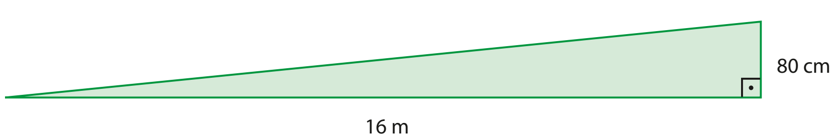
$$\text{declividade} = \frac{\text{desnível}}{\text{comprimento horizontal da rampa}} = \frac{\text{deslocamento vertical}}{\text{deslocamento horizontal}}$$

Vamos trabalhar inicialmente com um exemplo mais simples — uma declividade de 5% equivale à razão $\frac{1}{20}$:

$$5\% = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$$

Isso significa que para cada 1 cm (ou 1 dm, ou 1 m, ...) de desnível a ser vencido é necessário um comprimento horizontal de rampa de 20 cm (ou 20 dm, ou 20 m, ...).

Por exemplo, para vencer um desnível de 80 cm, uma rampa com declividade de 5% deverá ter 20 · (80 cm) = 1600 cm = 16 m de comprimento horizontal.



Rampa com declividade de 5%.

PENSE NISTO:

O que significa dizer que uma rampa possui declividade de 100%?

As ideias apresentadas sobre declividade de uma rampa motivam a definição das razões trigonométricas no triângulo retângulo, iniciando pela tangente.

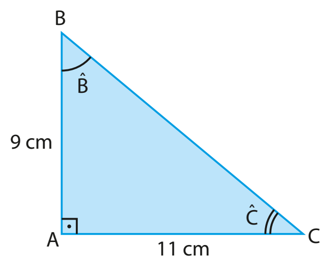
Tangente de um ângulo agudo

Em um triângulo retângulo, a tangente de um ângulo agudo θ (indica-se: tg θ) é dada pela razão entre a medida do cateto oposto a θ e a medida do cateto adjacente a θ.

$$\text{tg}\ \theta = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \theta}{\text{medida do cateto adjacente a } \theta}$$

EXEMPLO 1

Seja o triângulo ABC retângulo em **A**, cujos catetos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ medem 9 cm e 11 cm, respectivamente.



Os ângulos $\hat{\mathbf{B}}$ e $\hat{\mathbf{C}}$ são agudos (o cateto $\overline{AB}$ é oposto a $\hat{\mathbf{C}}$ e adjacente a $\hat{\mathbf{B}}$, e o cateto $\overline{AC}$ é oposto a $\hat{\mathbf{B}}$ e adjacente a $\hat{\mathbf{C}}$). Daí:

$$\text{tg}\ \hat{B} = \frac{11\text{ cm}}{9\text{ cm}} = \frac{11}{9} \quad \text{e} \quad \text{tg}\ \hat{C} = \frac{9\text{ cm}}{11\text{ cm}} = \frac{9}{11}$$

Tabela de razões trigonométricas

Na figura **A** notamos que a cada deslocamento horizontal (à direita) de 5 u.c. (unidades de medida de comprimento) corresponde um deslocamento vertical de 3 u.c. (para cima).

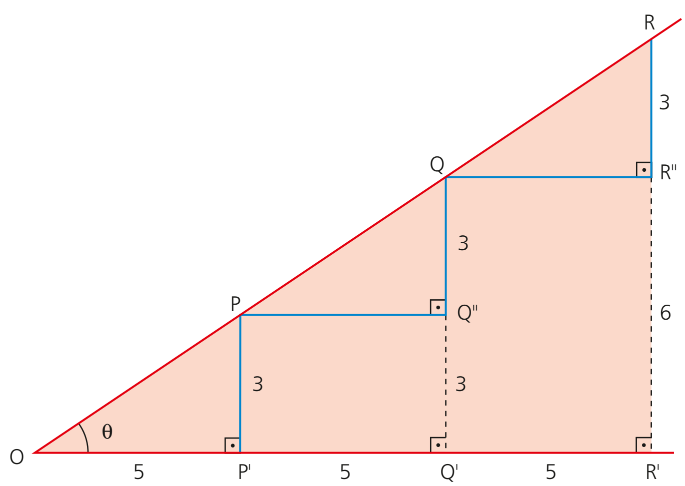


figura **A**

OBSERVAÇÃO

A notação med(PÔP') = θ deve ser lida como: a medida do ângulo PÔP' é igual a θ.

A figura **A** mostra a invariância da tangente do ângulo θ através da semelhança entre triângulos ($\triangle OPP' \sim \triangle OQQ' \sim \triangle ORR' \ldots$):

$$\begin{cases} \triangle OPP'\text{:}\ \ \text{tg}\ \theta = \dfrac{3}{5} \\ \triangle OQQ'\text{:}\ \ \text{tg}\ \theta = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5} \\ \triangle ORR'\text{:}\ \ \text{tg}\ \theta = \dfrac{9}{15} = \dfrac{3}{5} \end{cases}$$

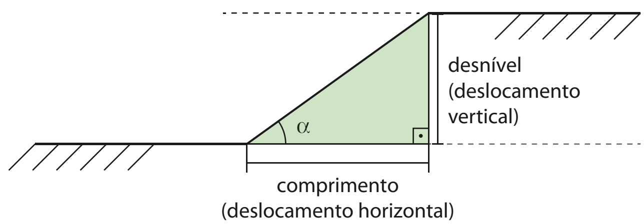
O valor de tg θ é sempre o mesmo, independentemente do triângulo retângulo considerado.

A cada medida de ângulo agudo corresponde um único valor da respectiva tangente.

Na página 272 encontramos uma tabela trigonométrica. Ela traz os valores aproximados das tangentes, e de outras razões trigonométricas, que serão estudadas a seguir.

EXEMPLO 2

Voltando ao exemplo introdutório, passeios públicos com declividade maior que 8,33% não são considerados rotas acessíveis. Vamos calcular qual é a medida do ângulo máximo que uma rampa forma com a horizontal para ser considerada acessível.



Chamando de α a medida do ângulo máximo, devemos ter $\text{tg}\ \alpha = 8{,}33\% = 0{,}0833$.

Procuramos, no corpo da tabela da página 272, o valor mais próximo de 0,0833 na coluna da "Tangente", que é o valor 0,08749, correspondente ao ângulo 5°.

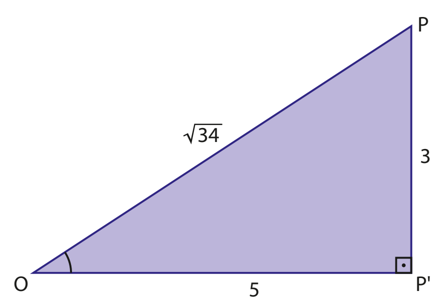
Assim, o ângulo máximo que uma rampa forma com a horizontal para ser considerada acessível mede aproximadamente 5°.

PENSE NISTO:

Qual é a medida do ângulo associado a uma rampa com declividade 100%? Consulte a tabela da página 272.

Seno e cosseno de um ângulo agudo

Na situação da figura **A** da página anterior, qual seria, sobre a "rampa", o deslocamento correspondente a um deslocamento horizontal de 5 u.c.?



O teorema de Pitágoras responde:

$$OP^2 = d^2 = 5^2 + 3^2 \Rightarrow d = \sqrt{34} \simeq 5{,}83$$

Fixado o ângulo θ, a cada 5 u.c. de deslocamento horizontal (ou a cada 3 u.c. de deslocamento vertical) corresponde um deslocamento, sobre a rampa, de $\sqrt{34}$ u.c.

Podemos também relacionar essas grandezas por meio das seguintes razões:

- $\dfrac{3}{\sqrt{34}}$ exprime a razão entre as medidas do deslocamento vertical e do deslocamento sobre a rampa;

- $\dfrac{5}{\sqrt{34}}$ exprime a razão entre as medidas do deslocamento horizontal e do deslocamento sobre a rampa.

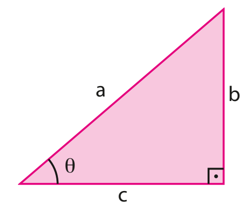
A primeira razão recebe o nome de **seno de θ** e é indicada por $\text{sen}\ \theta = \dfrac{3}{\sqrt{34}}$.

A segunda razão recebe o nome de **cosseno de θ** e é indicada por $\cos \theta = \dfrac{5}{\sqrt{34}}$.

De modo geral, em um triângulo retângulo, definimos o seno e o cosseno de cada um dos ângulos agudos.

- O seno de um ângulo agudo é dado pela razão entre a medida do cateto oposto a esse ângulo e a medida da hipotenusa.

$$\text{sen } \theta = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \theta}{\text{medida da hipotenusa}}$$



Medida da hipotenusa: **a**.
Medida dos catetos: **b** e **c**.

- O cosseno de um ângulo agudo é dado pela razão entre a medida do cateto adjacente a esse ângulo e a medida da hipotenusa.

$$\cos \theta = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \theta}{\text{medida da hipotenusa}}$$

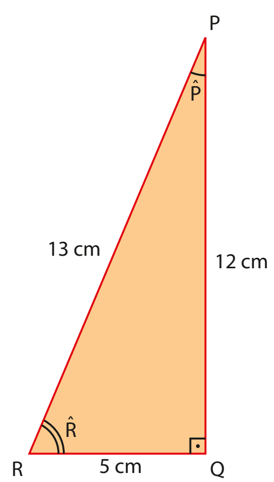
PENSE NISTO:

As razões seno, cosseno e tangente são expressas em alguma unidade de medida?

Considerando θ o ângulo agudo assinalado no triângulo anterior, temos que:

$$\text{sen } \theta = \frac{b}{a} \quad \text{e} \quad \cos \theta = \frac{c}{a}$$

EXEMPLO 3



No triângulo retângulo ao lado, temos:

$\text{sen } \hat{P} = \dfrac{5 \text{ cm}}{13 \text{ cm}} = \dfrac{5}{13}$ e

$\text{sen } \hat{R} = \dfrac{12 \text{ cm}}{13 \text{ cm}} = \dfrac{12}{13}$

$\cos \hat{P} = \dfrac{12 \text{ cm}}{13 \text{ cm}} = \dfrac{12}{13}$ e

$\cos \hat{R} = \dfrac{5 \text{ cm}}{13 \text{ cm}} = \dfrac{5}{13}$

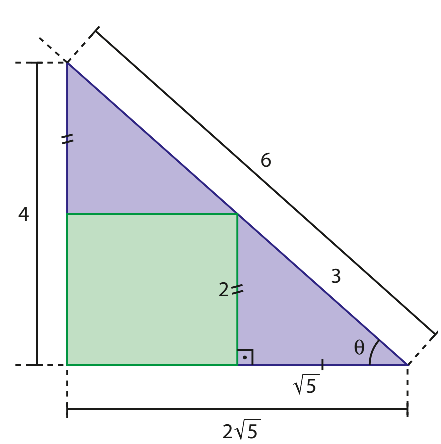
PENSE NISTO:

Entre os valores sen $\hat{P}$, cos $\hat{P}$, sen $\hat{R}$ e cos $\hat{R}$, quais são iguais?

Também são invariantes o seno e o cosseno de um determinado ângulo; independentemente do triângulo retângulo tomado, cada uma das razões tem sempre o mesmo valor.

No caso da figura ao lado:

- $\text{sen } \theta = \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{6} = \ldots$
- $\cos \theta = \dfrac{\sqrt{5}}{3} = \dfrac{2\sqrt{5}}{6} = \ldots$



Por isso, a tabela trigonométrica apresenta também um único valor para o seno (e para o cosseno) de um determinado ângulo agudo.

Vamos considerar, por exemplo, um ângulo θ de medida 40°. Na tabela, verificamos que:

sen 40° = 0,64279 cos 40° = 0,76604 tg 40° = 0,83910

Esses valores são aproximados e contêm arredondamentos e, eventualmente, dependendo do problema, podem ser arredondados ainda mais.

Além da tabela, é possível obter também as razões trigonométricas de um ângulo agudo com uma calculadora científica.

O primeiro passo é colocá-la em uma configuração em que a medida do ângulo esteja expressa em graus. Para isso, pressionamos:

MODE $\longrightarrow$ DEG

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

A abreviação DEG vem do inglês *degree*, que significa "grau".

- Para saber o valor de tg 40°, pressionamos:

TAN $\longrightarrow$ 4 0 $\longrightarrow$ = $\longrightarrow$ 0.839099631

Obtemos o valor aproximado: tg 40° = 0,839099631.

- Para conhecer o valor de sen 40°, pressionamos:

SIN $\longrightarrow$ 4 0 $\longrightarrow$ = $\longrightarrow$ 0.642787610

Obtemos o valor aproximado sen 40° = 0,642787610.

- Para obter o valor de cos 40°, pressionamos:

COS $\longrightarrow$ 4 0 $\longrightarrow$ = $\longrightarrow$ 0.766044443

Obtemos o valor aproximado cos 40° = 0,766044443.

Por meio da calculadora científica também podemos determinar a medida de um ângulo agudo a partir de uma de suas razões trigonométricas.

Veja a tecla $\overset{\sin^{-1}}{\text{SIN}}$.

Acima dela aparece a opção $\sin^{-1}$, que corresponde à segunda função dessa tecla. Essa opção é ativada, em geral, por meio da tecla SHIFT.

Assim, por exemplo, se quisermos saber qual é o ângulo agudo cujo seno vale 0,35, basta seguir a sequência abaixo:

SHIFT $\longrightarrow$ $\overset{\sin^{-1}}{\text{SIN}}$ $\longrightarrow$ 0 . 3 5 $\longrightarrow$ = $\longrightarrow$ 20.48731511

Isso significa que o ângulo pedido mede aproximadamente 20,5°, isto é, 20°30'.

Observe que a calculadora fornece o ângulo com uma precisão muito maior que a tabela, pois esta utiliza apenas valores inteiros em graus.

Para sabermos qual é o ângulo agudo cuja tangente vale 2,5, fazemos assim:

SHIFT $\longrightarrow$ $\overset{\tan^{-1}}{\text{TAN}}$ $\longrightarrow$ 2 . 5 $\longrightarrow$ = $\longrightarrow$ 68.19859051

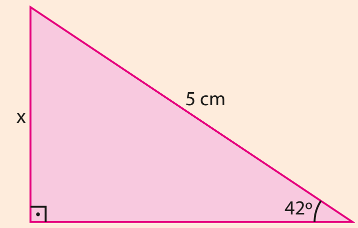
O ângulo mede aproximadamente 68,2°, ou seja, 68°12'.

PENSE NISTO:

Porque 68,2° = 68°12'?

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

1 Determine o valor de **x** na figura:



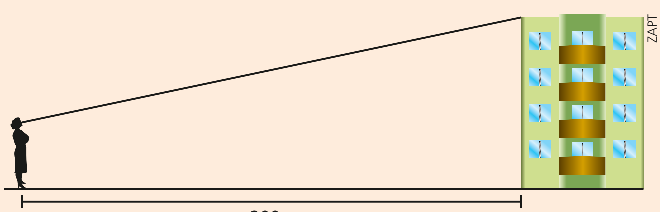
Solução:

Em relação ao ângulo de 42°, o cateto de medida **x** é o cateto oposto e 5 cm é a medida da hipotenusa. Desse modo, vamos usar a razão seno.

De fato: $\text{sen } 42° = \frac{x}{5} \Rightarrow x = 5 \cdot \text{sen } 42°$

Consultando a tabela ou utilizando uma calculadora científica, obtemos o valor de $\text{sen } 42° \simeq 0{,}66913$. Assim, $x \simeq (5 \text{ cm}) \cdot 0{,}66913 \simeq 3{,}35$ cm.

2 Uma mulher, cujos olhos estão a 1,5 m do solo, avista, sob um ângulo de 12°, o topo de um edifício que se encontra a 200 m dela. Qual é a altura aproximada do edifício?

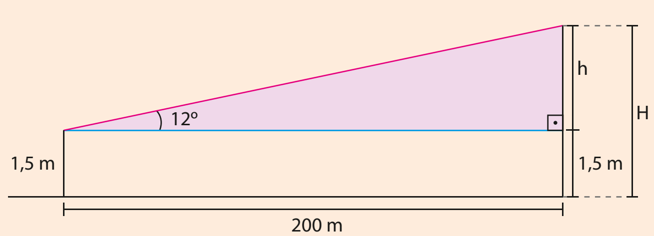


Elementos sem proporção entre si.

Solução:

No triângulo retângulo da figura abaixo, temos:

$$\text{tg } 12° = \frac{h}{200} \Rightarrow h = 200 \cdot \text{tg } 12°$$



Consultando a tabela ou utilizando uma calculadora científica, encontramos $\text{tg } 12° \simeq 0{,}21256$.

Temos, então:

$$h \simeq 200 \cdot 0{,}21256 \simeq 42{,}512$$

e

$$H \simeq 42{,}512 + 1{,}5 \simeq 44$$

A altura aproximada do edifício (**H**) é 44 m.

EXERCÍCIOS

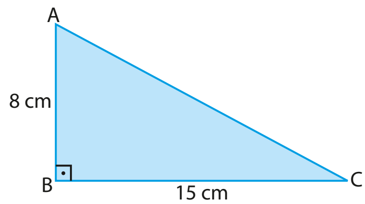
FAÇA NO CADERNO

Utilize a tabela trigonométrica da página 272 ou uma calculadora científica sempre que necessário.

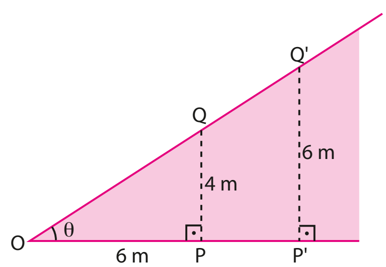
1 Com base na figura, determine:

a) sen Â, cos Â e tg Â.

b) sen Ĉ, cos Ĉ e tg Ĉ.



2 Observe a figura seguinte:



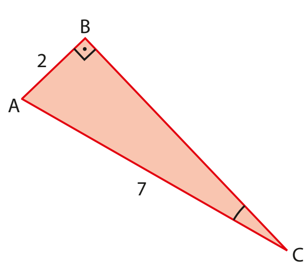
Determine:

a) tg θ

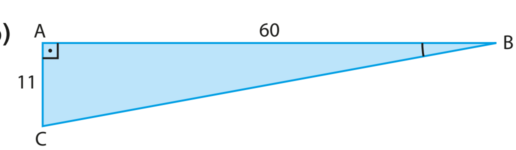
b) a distância de **O** a **P'**

3 Em cada caso, determine o seno do ângulo agudo assinalado.

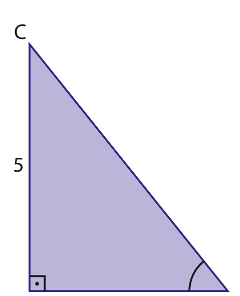
a)



b)



c)



4 Cada item traz as medidas dos lados de um triângulo retângulo em que **a** representa a medida da hipotenusa, e **b** e **c** são as medidas dos catetos. Determine o cosseno de cada um dos ângulos agudos, **B̂** e **Ĉ**, opostos, respectivamente, a **b** e a **c**.

a) b = 3 cm e c = 4 cm.

b) a = 12 cm e b = 7 cm.

5 Um observador avista o topo de um obelisco de 120 m de altura sob um ângulo de 27°. Considere desprezível a altura do observador.

a) A que distância o observador se encontra da base do obelisco?
Use os valores: sen 27° $\simeq$ 0,45, cos 27° $\simeq$ 0,9 e tg 27° $\simeq$ 0,5.

b) Aproximando-se 100 m do obelisco, em linha reta, o observador passa a mirá-lo sob um ângulo α. Determine α.

6 Um barco atravessa um rio de 97 m de largura em um trecho em que as margens são paralelas. Devido à correnteza, segue uma direção que forma um ângulo de 76° com a margem de partida. Qual é a distância percorrida pelo barco?

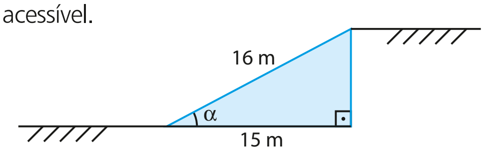
Enunciado para as questões 7 e 8.
As normas de acessibilidade de determinada cidade estabelecem que a declividade (razão entre o deslocamento vertical e o deslocamento horizontal) máxima aceitável para uma rampa é de 8,33%.

7 Um arquiteto desenvolveu um projeto de uma rampa para vencer um desnível de 3,2 m entre dois pisos. Para respeitar a norma acima, qual deverá ser o comprimento horizontal mínimo dessa rampa? Para facilitar os cálculos, use a aproximação: $\frac{1}{12} \simeq 0{,}0833$.

8 Observando o esboço do projeto da rampa abaixo, determine:

a) o valor aproximado do desnível entre os dois pisos.

b) o valor de tg α; indique se a rampa é ou não acessível.

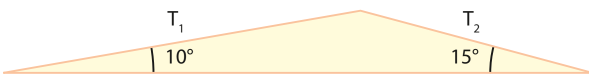


9 Uma escada de pedreiro de 6 m de comprimento está apoiada em uma parede. Se o pé da escada dista 4 m dessa parede, determine:

a) a medida do ângulo que a escada forma com a parede.

b) a altura que o ponto mais alto da escada atinge em relação ao solo. Considere $\sqrt{5} \simeq 2{,}24$.

10 O acesso a um mirante, situado a 200 m de altura em relação ao solo, pode ser feito por duas trilhas retilíneas $\mathbf{T_1}$ e $\mathbf{T_2}$, cujas inclinações em relação ao solo são de 10° e 15°, respectivamente. Suponha constantes essas inclinações.



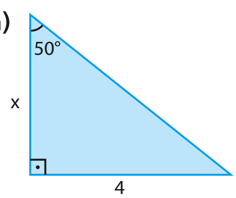
a) Em qual das trilhas a distância percorrida é menor?

b) Qual é a diferença entre as distâncias percorridas nas duas trilhas para se chegar ao mirante? Aproxime os resultados dos cálculos para números inteiros. Considere sen 10° $\simeq$ 0,174; cos 10° $\simeq$ 0,985; sen 15° $\simeq$ 0,259; e cos 15° $\simeq$ 0,966.

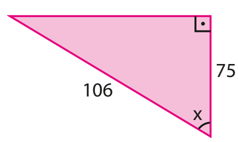
11 Em uma via retilínea e inclinada, um pedestre eleva-se 250 m a cada 433 m de deslocamento horizontal. Qual é a medida do ângulo de inclinação dessa via com a horizontal?

12 Determine a medida aproximada de **x** em cada caso:

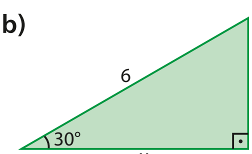
a)



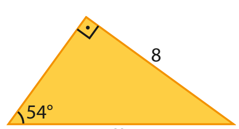
c)



b)



d)



13 Um pequeno avião voa a uma altura de 3 km. O piloto planeja o procedimento de descida de modo tal que o ângulo formado pela horizontal e pela sua trajetória seja de 20°. Que distância, aproximadamente, o avião percorrerá até o pouso?

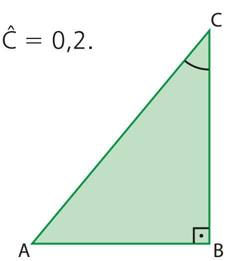
THE IMAGE BANK/ GETTY IMAGES

14 Duas vias de contorno retilíneo intersectam-se em um entroncamento **E**, formando um ângulo de 75°. Determine a menor distância entre uma das vias e uma área de refúgio, situada na outra via, a 1 200 m de **E**.

15 Uma região montanhosa foi mapeada por fotografias aéreas: dois pontos, **P** e **Q**, devem ser unidos por um pequeno túnel retilíneo. Considere a reta perpendicular ao traçado do túnel, passando por **P**. Nela, tome o ponto **T**, distante 70 m de **P**; desse ponto, situado no mesmo plano de **P** e **Q**, seria possível avistar as extremidades do túnel sob um ângulo de 55°.
Qual será o comprimento aproximado do túnel a ser construído?

16 Explique por que todos os valores de seno e cosseno que constam na tabela trigonométrica são números reais pertencentes ao intervalo]0; 1[, mas o mesmo não acontece com os valores das tangentes.

17 Na figura, AB = 6 cm e sen $\hat{C}$ = 0,2.
Determine:



a) a medida da hipotenusa do triângulo;

b) o seno do outro ângulo agudo do triângulo.

18 Em certo instante, um poste de 10 m de altura projeta uma sombra de **a** metros de comprimento. Obtenha, em cada caso, a medida aproximada do ângulo que os raios solares formam com o solo horizontal nesse instante.

a) a = 6

b) a = 12

c) a = 10

19 Para combater o fogo em um apartamento de um edifício, os bombeiros usaram uma escada de 65 m de comprimento.
Ela ficou apoiada sobre a carroceria do caminhão do corpo de bombeiros, a 3 m de altura do solo, formando um ângulo de 37° com o plano horizontal que contém a carroceria. Completamente esticada, a escada foi fixada na janela do último andar do edifício. Considere que, nesse edifício, cada andar tem 2,8 m de altura.

a) Faça uma figura para representar a situação descrita acima.

b) Qual é o número de andares desse edifício? Use os seguintes valores: sen 37° $\simeq$ 0,6; cos 37° $\simeq$ 0,8 e tg 37° $\simeq$ 0,75.

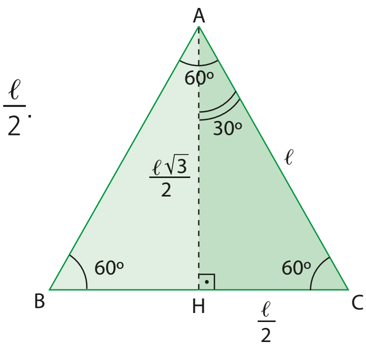
Ângulos notáveis

Os ângulos de 30°, 45° e 60°, pela frequência com que aparecem nos problemas de Geometria, são chamados de **ângulos notáveis**.

As razões trigonométricas desses ângulos já foram apresentadas na tabela trigonométrica. Porém, como você já percebeu, os valores encontrados na tabela (ou na calculadora científica) são aproximados e contêm muitas casas decimais e, a cada problema, procedemos a arredondamentos. Para os ângulos notáveis, vamos escrever esses valores de uma maneira que dispense esses arredondamentos.

Para isso, vamos nos valer de duas figuras: triângulo equilátero de lado com medida ℓ e quadrado de lado medindo ℓ.

Triângulo equilátero



A altura $\overline{AH}$ coincide com a mediana relativa ao lado $\overline{BC}$; assim, $\overline{HC}$ mede $\frac{\ell}{2}$.

$\overline{AH}$ também coincide com a bissetriz de $B\hat{A}C \Rightarrow \text{med}(C\hat{A}H) = 30°$.

Além disso, $\overline{AH}$ mede $\frac{\ell\sqrt{3}}{2}$, como vimos no capítulo anterior.

Para o ângulo de 30º, temos, no $\triangle AHC$:

$$\text{sen } 30° = \frac{\frac{\ell}{2}}{\ell} = \frac{1}{2} \qquad \cos 30° = \frac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\ell} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{tg } 30° = \frac{\frac{\ell}{2}}{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Para o ângulo de 60º, temos, no $\triangle AHC$:

$$\text{sen } 60° = \frac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\ell} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60° = \frac{\frac{\ell}{2}}{\ell} = \frac{1}{2} \qquad \text{tg } 60° = \frac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\frac{\ell}{2}} = \sqrt{3}$$

Observe que:

$\text{sen } 30° = \cos 60°$

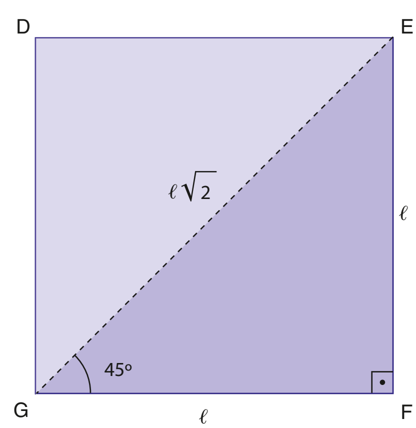
$\cos 30° = \text{sen } 60°$

$\text{tg } 30° = \frac{1}{\text{tg } 60°}$ (ou $\text{tg } 30° \cdot \text{tg } 60° = 1$)

Quadrado

Pelo teorema de Pitágoras, a diagonal mede $\ell\sqrt{2}$, conforme visto no capítulo anterior.
Temos, no $\triangle EFG$:

$$\text{sen } 45° = \frac{\ell}{\ell\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos 45° = \frac{\ell}{\ell\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



Observe que $\text{sen } 45° = \cos 45°$.

$$\text{tg } 45° = \frac{\ell}{\ell} = 1$$

Temos, assim, a tabela:

Ângulo / Razão	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

OBSERVAÇÃO

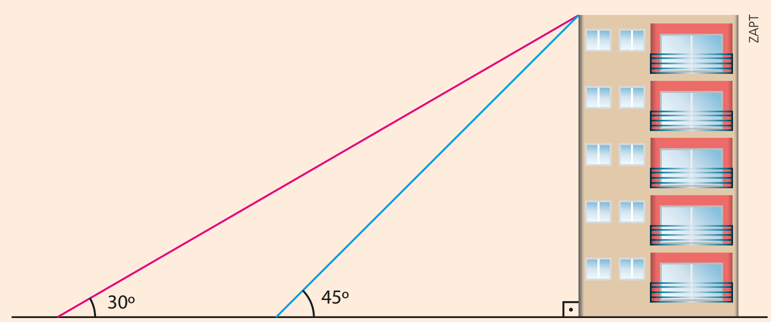
Geralmente, os valores dessa tabela são utilizados sempre que aparece alguma razão trigonométrica de um ângulo notável no lugar dos valores que aparecem na tabela completa de razões trigonométricas.

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

3 De um ponto de observação localizado no solo, vê-se o topo de um edifício sob um ângulo de 30°. Aproximando-se 50 m do prédio, o ângulo de observação passa a ser de 45°. Determine:

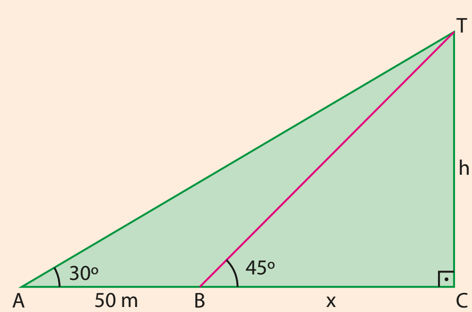
a) a altura do edifício;

b) a distância do edifício ao primeiro ponto de observação.



Solução:

Observe que o triângulo BCT é isósceles, pois med($C\hat{T}B$) = 45°. Assim, temos que x = h.



a) No triângulo retângulo ACT:

$$\text{tg } 30° = \frac{h}{50 + x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{50 + h} \Rightarrow 3h = \sqrt{3}(50 + h) \Rightarrow 3h - h\sqrt{3} = 50\sqrt{3} \Rightarrow h = \frac{50\sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \frac{50 \cdot \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} \cdot \frac{3 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} \Rightarrow h = 25 \cdot \left(1 + \sqrt{3}\right) \simeq 68{,}3$$

A altura do edifício é de aproximadamente 68,3 m.

b) A distância pedida é a medida de $\overline{AC}$:

$$AC = 50 + x = 50 + 25\left(1 + \sqrt{3}\right) \Rightarrow AC = 25\left(3 + \sqrt{3}\right) \simeq 118{,}3$$

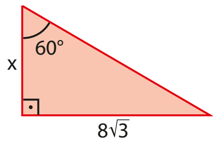
A distância do edifício ao primeiro ponto de observação é de aproximadamente 118,3 m.

EXERCÍCIOS

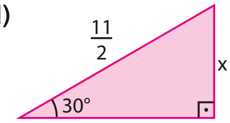
FAÇA NO CADERNO

20 Encontre os valores de **x** em cada caso:

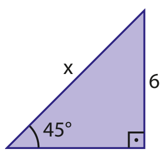
a)



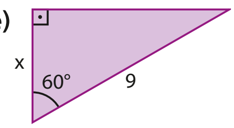
d)



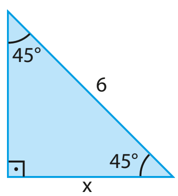
b)



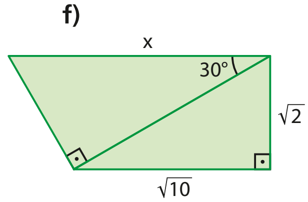
e)



c)



f)

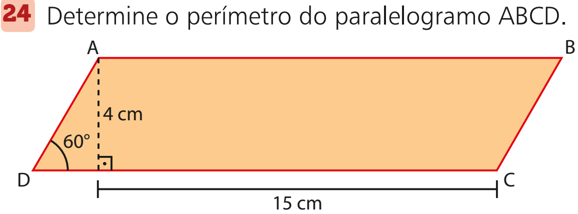


21 Uma escada de pedreiro de 6 m está apoiada em uma parede e forma com o solo um ângulo de 60°. Qual é a altura atingida pelo ponto mais alto da escada? Qual é a distância do pé da escada à parede?

22 Um objeto percorre 8 m ao ser solto sobre um plano inclinado que forma um ângulo de 60° com a horizontal do solo. Determine a altura, em relação ao solo, da qual o objeto foi solto.

23 Obtenha o perímetro de um retângulo, sabendo que uma diagonal mede $5\sqrt{3}$ cm e forma ângulo de 30° com um dos lados do retângulo.

24 Determine o perímetro do paralelogramo ABCD.

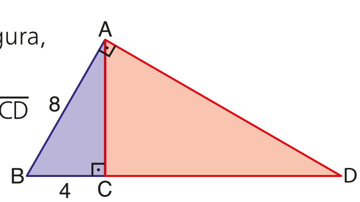


25 Com base na figura, determine:

a) a medida de $\overline{CD}$

b) med($B\hat{A}C$)

c) tg ($B\hat{D}A$)

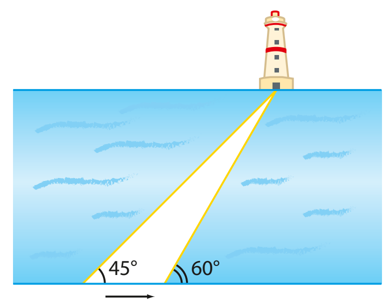


26 Um observador está situado a **x** metros do pé de um prédio. Ele consegue mirar o topo do prédio sob um ângulo de 60°. Afastando-se 40 m desse ponto, ele passa a avistar o topo do prédio sob um ângulo de 30°. Considerando desprezível a altura do observador, determine:

a) o valor de **x**;

b) a altura do prédio.

27 Em um trecho de rio em que as margens são paralelas, um morador, à beira de uma das margens, avista um farol, situado à beira da outra margem, sob um ângulo de 45°. Caminhando 1 400 m no sentido indicado pela seta na figura, ele passa a mirar o farol sob um ângulo de 60°.



Considerando $\sqrt{3} \simeq 1{,}7$, obtenha, em quilômetros, a largura do rio nesse trecho.

28 Considere dois projetos hipotéticos de rampa para vencer um desnível de 6 m entre dois pisos:

- Projeto I: rampa com declividade de 30%.
- Projeto II: rampa com inclinação de 30° em relação à horizontal.

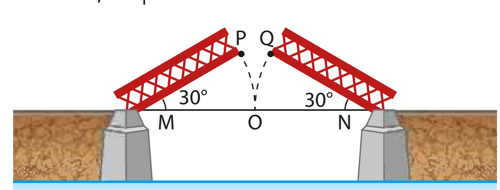
a) Os dois projetos levam à construção de um mesmo tipo de rampa? Explique.

b) Se a resposta do item *a* for negativa, determine os comprimentos horizontais das rampas dos dois projetos.

c) Qual é (em caso de resposta negativa ao item *a*) a extensão das rampas dos dois projetos?

d) Quanto mede o ângulo de inclinação da rampa do projeto I?

29 Em uma cidade há, sobre uma represa, uma ponte de 30 m de comprimento que se abre, algumas vezes ao dia, para dar passagem a pequenas embarcações. Na figura, **O** é ponto médio de $\overline{MN}$ e $\overset{\frown}{OP}$ e $\overset{\frown}{OQ}$ são arcos de circunferência com centros em **M** e **N**, respectivamente:



Com a ponte completamente aberta, forma-se um vão, representado pelo segmento $\overline{PQ}$. Qual é o comprimento desse vão?

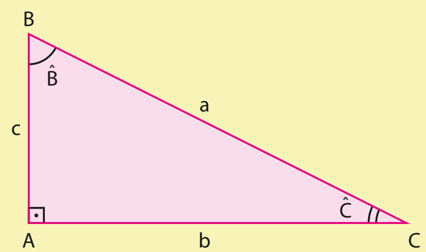
Use $\sqrt{3} \simeq 1{,}7$.

TROQUE **IDEIAS**

Relações entre as razões trigonométricas

Nesta seção, vamos construir algumas relações importantes entre as razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente) estudadas. Essas relações serão retomadas e generalizadas no volume 2 desta coleção.

Considere o triângulo ABC, retângulo em **A**.



Observe que $\hat{B} + \hat{C} = 90°$

Dois ângulos cuja soma das medidas é 90° são chamados **complementares**.

- Faça o que se pede a seguir.

a) Determine os valores de sen $\hat{B}$, cos $\hat{B}$, sen $\hat{C}$ e cos $\hat{C}$. Qual é a relação entre os valores encontrados?

b) Observe a tabela trigonométrica na página 272 e compare os valores do seno e do cosseno de alguns pares de ângulos complementares. Qual é a relação entre os valores encontrados?

c) Obtenha os valores de tg $\hat{B}$ e de tg $\hat{C}$. Qual a relação existente entre esses valores?

d) Vamos agora descobrir a chamada relação fundamental da trigonometria. Calcule, para o ângulo $\hat{B}$, a soma do quadrado de seu seno com o quadrado de seu cosseno, isto é, $(\text{sen } \hat{B})^2 + (\cos \hat{B})^2$. Faça o mesmo com o ângulo $\hat{C}$. O que você observa?

e) Considerando α um dos ângulos agudos de um triângulo retângulo cujos catetos medem 5 cm e 12 cm, constate, para o ângulo α, a validade da relação encontrada no item *d*.

f) Se α é a medida de um ângulo agudo de um triângulo retângulo e $\text{sen } \alpha = \frac{3}{5}$, qual é o valor de $\cos \alpha$? Desenhe ao menos dois triângulos retângulos que satisfazem essa condição.

g) Calcule a razão $\frac{\text{sen } \hat{B}}{\cos \hat{B}}$, e compare com tg $\hat{B}$. Faça o mesmo com o ângulo $\hat{C}$. O que você observa?

DESAFIO

Em procedimento de descida para pouso num dia ensolarado e sem nuvens, o piloto de um pequeno avião avista a cabeceira da pista sob um ângulo de 35° com sua trajetória horizontal. Depois de 18 segundos, na mesma trajetória horizontal, passa a avistar a cabeceira dessa pista sob um ângulo de 56°. Sabendo que, nesse intervalo de tempo, o avião manteve uma velocidade constante de 300 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, determine, em metros, a altitude do avião nesse intervalo.

Use os valores: tg 35° $\simeq$ 0,7 e tg 56° $\simeq$ 1,5.