CAPÍTULO 2

Conjuntos numéricos

Introdução

Denominamos **conjuntos numéricos** os conjuntos cujos elementos são números.

Estudaremos os conjuntos dos números **naturais**, dos **inteiros**, dos **racionais** e dos **irracionais**. Por fim, apresentaremos o conjunto dos números **reais**, presente em grande parte do estudo abordado nesta coleção.

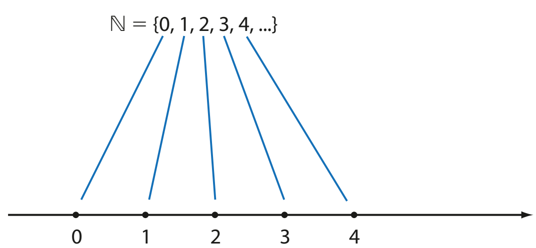
O surgimento do conjunto dos números naturais deveu-se à necessidade do ser humano fazer contagens. Os outros conjuntos numéricos, em geral, surgiram como ampliações daqueles até então conhecidos, por necessidade de serem efetuadas novas operações.

O conjunto $\mathbb{N}$

O conjunto dos **números naturais** é:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ..., n, ...\}$, em que **n** representa o elemento genérico do conjunto.

O conjunto $\mathbb{N}$ possui infinitos elementos e pode ser representado na reta numerada.



O conjunto dos números naturais possui alguns subconjuntos importantes:

- o conjunto dos números naturais não nulos:

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, ..., n, ...\};\ \mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$$

  Observe que o símbolo * (asterisco) à direita do nome do conjunto indica que foi retirado dele o elemento **zero**.

- o conjunto dos números naturais pares:

$$\mathbb{N}_p = \{0, 2, 4, 6, ..., 2n, ...\}, \text{ com } n \in \mathbb{N}$$

  Observe que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $2n$ representa um número par qualquer.

- o conjunto dos números naturais ímpares:

$$\mathbb{N}_i = \{1, 3, 5, 7, ..., 2n + 1, ...\}, \text{ com } n \in \mathbb{N}$$

  Observe que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $2n + 1$ representa um número ímpar qualquer.

- o conjunto dos números naturais primos:

$$P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, ...\}$$

No conjunto dos números naturais estão definidas duas operações cujos resultados são sempre números naturais: adição e multiplicação. Note que, adicionando-se dois elementos quaisquer de $\mathbb{N}$, a soma pertence a $\mathbb{N}$. Observe também que, multiplicando-se dois elementos quaisquer de $\mathbb{N}$, o produto pertence a $\mathbb{N}$. Em símbolos, temos:

$$\forall m \in \mathbb{N} \text{ e } n \in \mathbb{N}, \quad m + n \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad m \cdot n \in \mathbb{N}$$

↓
O símbolo $\forall$ significa qualquer.

Essa característica pode ser assim sintetizada:

$\mathbb{N}$ é fechado em relação à adição e à multiplicação.

Porém, o mesmo raciocínio não vale em relação à subtração. Por exemplo, embora $5 - 2 = 3 \in \mathbb{N}$, não existe um número natural **x** tal que $x = 2 - 5$.

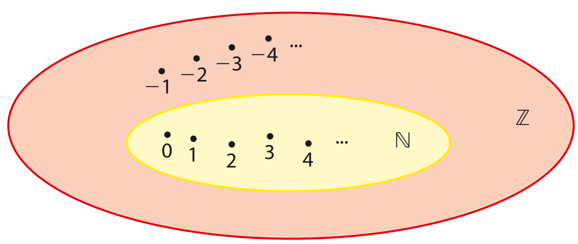
Por esse motivo, é necessária uma ampliação do conjunto $\mathbb{N}$, surgindo daí o conjunto dos números inteiros.

O conjunto $\mathbb{Z}$

O conjunto dos números **inteiros** é:

$$\mathbb{Z} = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

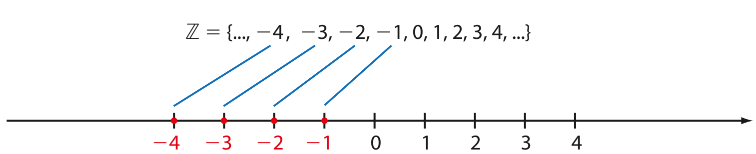
Observe que todo número natural é também um número inteiro, isto é, $\mathbb{N}$ é subconjunto de $\mathbb{Z}$ (ou $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z} \supset \mathbb{N}$).



PENSE NISTO:

A proposição
$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{N}$
é verdadeira ou falsa?

A representação geométrica do conjunto dos números inteiros é feita a partir da representação de $\mathbb{N}$ na reta numerada; basta acrescentar os pontos correspondentes aos números negativos:



O conjunto dos números inteiros possui alguns subconjuntos notáveis:

- o conjunto dos números inteiros não nulos:
  $$\mathbb{Z}^* = \{..., -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, ...\} = \mathbb{Z} - \{0\}$$
- o conjunto dos números inteiros não negativos: $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$
- o conjunto dos números inteiros (estritamente) positivos: $\mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, 3, 4, ...\}$
- o conjunto dos números inteiros não positivos: $\mathbb{Z}_- = \{..., -5, -4, -3, -2, -1, 0\}$
- o conjunto dos números inteiros (estritamente) negativos: $\mathbb{Z}_-^* = \{..., -5, -4, -3, -2, -1\}$
- o conjunto dos números inteiros múltiplos de 4: $M(4) = \{..., -8, -4, 0, 4, 8, 12, ...\}$

OBSERVAÇÃO

Observe que:

$\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$
$\mathbb{Z}_+^* = \mathbb{N}^*$

PENSE NISTO:

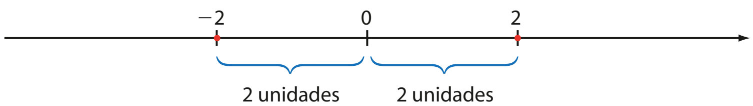
Como você representa, genericamente, um número inteiro múltiplo de 4?

Números inteiros opostos

Dois números inteiros são ditos **opostos** um do outro quando sua soma é zero. Assim, geometricamente, são representados na reta por pontos que distam igualmente da origem.

Podemos tomar como exemplo o número 2.

O oposto do número 2 é -2, e o oposto de -2 é 2, pois $2 + (-2) = (-2) + 2 = 0$.



No geral, dizemos que o oposto, ou **simétrico**, de **a** é $-a$, e vice-versa.

PENSE NISTO:

Existe algum número inteiro que é igual ao seu oposto?

Módulo de um número inteiro

Se $x \in \mathbb{Z}$, o **módulo** ou **valor absoluto** de **x** (indica-se: $|x|$) é definido pelas seguintes relações:

- Se $x \geqslant 0$, o módulo de **x** é igual ao próprio valor de **x**, isto é, $|x| = x$.
- Se $x < 0$, o módulo de **x** é igual ao oposto de **x**, isto é, $|x| = -x$.

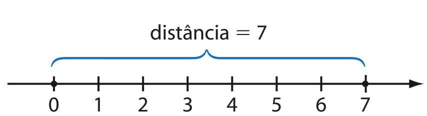
Acompanhe os exemplos:

- $|\underbrace{7}_{\text{positivo}}| = 7$
- $|\underbrace{-3}_{\text{negativo}}| = -(-3) = 3$
- $|\underbrace{-12}_{\text{negativo}}| = -(-12) = 12$
- $|0| = 0$
- $|\underbrace{63}_{\text{positivo}}| = 63$

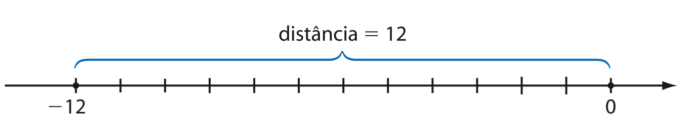
Interpretação geométrica

Na reta numerada dos números inteiros, o módulo de **x** é igual à distância entre **x** e a origem.

- $|7| = 7$



- $|-12| = 12$



É fácil notar que dois números inteiros opostos têm mesmo módulo.

EXEMPLO 1

Tomando os inteiros $a = -3$ e $b = +2$, calculamos:

- $a + b = -3 + (+2) = -3 + 2 = -1$
- $a \cdot b = -3 \cdot (+2) = -3 \cdot 2 = -6$
- $a - b = -3 - (+2) = -3 - 2 = -5$ } opostos
- $b - a = +2 - (-3) = 2 + 3 = 5$ }
- $-a = -(-3) = 3$
- $-b = -(+2) = -2$
- $|a| = |-3| = 3$
- $|b| = |+2| = |2| = 2$
- $|a - b| = |-3 - 2| = |-5| = 5$
- $|b - a| = |2 - (-3)| = |5| = 5$

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

1 Sejam os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x \leq 2\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 4\}$.

Determine $A \cup B$ e $A \cap B$.

Solução:

Observemos, inicialmente, que $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

Desse modo, temos:

$$A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq x \leq 4\}$$
$$A \cap B = \{0, 1, 2\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 2\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq x \leq 2\}$$

Observe que podemos também escrever:

$$A \cup B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x < 5\};$$
$$A \cap B = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 3\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq x < 3\}$$

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

1 Determine $A \cap B$ e $A \cup B$, sendo:

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 5\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 7\}$

b) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 1\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 3\}$

c) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 10\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x < 6\}$

d) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < x \leq 5\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x < 4\}$

2 Descreva cada conjunto por meio de uma característica comum a todos os seus elementos.

a) $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

b) $B = \{0, 1, 2, 8, 9, 10\}$

c) $C = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

d) $D = \{-3, 3\}$

3 Calcule:

a) $-5 - 3 \cdot (-2)$

b) $|-11|$

c) $|7 - 4| + |4 - 7|$

d) $2 + 5 \cdot (-3) - (-4)$

e) $-11 - 2 \cdot (-3) + 3$

f) $-8 + 3 \cdot [2 - (-1)]$

g) $|2 + 3 \cdot (-2)| - |3 + 2 \cdot (-3)|$

h) $|5 - 10| - |10 - (-5)| - |-5 - (-5)|$

4 Responda:

a) O valor absoluto de um número **x** inteiro é igual a 18. Quais são os possíveis valores de **x**?

b) Quais são os números inteiros cujos módulos são menores que 3?

5 Um conjunto de números naturais tem **x** elementos, todos distintos entre si. Entre estes, sete são pares, três são múltiplos de 3 e apenas um é múltiplo de 6. Qual é o valor de **x**?

6 Sejam $a = |-8|$, $b = -6$ e $c = |5|$. Calcule:

a) $a + b$
b) $b \cdot c$
c) $c - a$
d) $a \cdot b + c$
e) $b - a \cdot c$
f) b^2
g) $|b - c|$
h) $|a - b|$

7 Classifique as afirmações seguintes em verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**):

a) Todo número primo é ímpar.
b) Se dois números inteiros têm o mesmo módulo, então eles são iguais.
c) O quadrado de um número natural não nulo é sempre maior do que o próprio número.
d) O cubo de um número inteiro não nulo é sempre maior que o quadrado desse número.
e) Se $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}$ e $a > b$, então $a^2 > b^2$.

TROQUE **IDEIAS**

Investigação e argumentação em Matemática

A proposição: "Se **a** e **b** são números inteiros pares quaisquer, então a soma $a + b$ é um número par" é sempre verdadeira?

Para se concluir que ela é sempre verdadeira é suficiente constatar que a proposição é válida para alguns casos particulares?

$8 + 2 = 10$; $(-16) + 48 = 32$; $120 + 122 = 242$; $(-4) + (-8) = -12$; $0 + 6 = 6$ etc.

Do ponto de vista da Matemática, prevalece o método dedutivo, em que uma propriedade matemática só é validada por meio de uma **demonstração**. Na Matemática, uma propriedade (ou um teorema) é uma proposição do tipo "Se **p** então **q**", em que **p** é a **hipótese** e **q** é a **tese**. A demonstração é uma sequência (finita) de passos lógicos que permitem, a partir de **p**, concluir que **q** é verdadeira.

Na proposição inicial, a hipótese é "**a** e **b** são números inteiros pares quaisquer" e a tese é "$a + b$ é um número par".

Acompanhe a demonstração dessa propriedade.

Como **a** é um número inteiro par, podemos escrevê-lo na forma $a = 2 \cdot k$, em que $k \in \mathbb{Z}$.

Analogamente escrevemos $b = 2 \cdot q$, em que $q \in \mathbb{Z}$.

Daí:

$$a + b = 2 \cdot k + 2 \cdot q = 2 \cdot \underbrace{(k + q)}_{\in \mathbb{Z}}$$

Como **k** e **q** são inteiros, a soma $k + q$ é um número inteiro e, desse modo, $a + b$ é um número par.

Nem toda proposição matemática é verdadeira. Veja a seguinte:

"Se **a** é um número inteiro múltiplo de 3, então **a** é múltiplo de 6."

Podemos verificar que a proposição é falsa, pois existem múltiplos de 3 que não são múltiplos de 6, como, por exemplo, 3, 9, 15, 21 etc. Cada um desses valores corresponde a um **contraexemplo**.

- A seguir são apresentadas algumas proposições envolvendo elementos do conjunto dos números inteiros. Decida se elas são verdadeiras ou falsas, exibindo uma demonstração para as verdadeiras e um contraexemplo para as falsas.

a) Se **a** e **b** são números inteiros ímpares, então a soma $a + b$ é um número par.

b) Se **a** é um número inteiro par, então a^2 é um número par.

c) Se **a** é um número inteiro múltiplo de 6, então **a** é múltiplo de 3.

d) Se **a** é um número inteiro divisível por 5, então **a** é divisível por 10.

e) Se **a**, **b** e **c** são números inteiros e consecutivos, então a soma $a + b + c$ é um número inteiro múltiplo de 3.

f) Se **a** e **b** são números inteiros e consecutivos, então $a^2 + b^2$ é um número ímpar.

g) Se **n** é um número natural qualquer, então $n^2 + n + 41$ é um número primo.

O conjunto $\mathbb{Q}$

O conjunto $\mathbb{Z}$ é fechado em relação às operações de adição, multiplicação e subtração, mas o mesmo não acontece em relação à divisão. Note que, embora $(-12) : (+4) = -3 \in \mathbb{Z}$, **não existe número inteiro x** para o qual se tenha $x = (+4) : (-12)$. Por esse motivo, fez-se necessária uma ampliação do conjunto $\mathbb{Z}$, da qual surgiu o conjunto dos números racionais.

O **conjunto dos números racionais**, identificado por $\mathbb{Q}$, é inicialmente descrito como o conjunto dos quocientes entre dois números inteiros, em que o divisor é diferente de zero. Por exemplo, são números racionais:

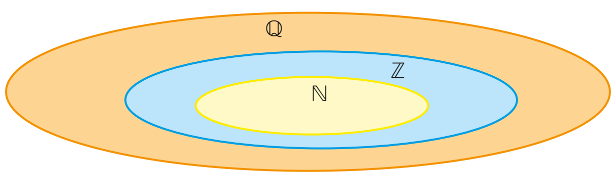
$$0,\ \pm1,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{3},\ \pm2,\ \pm\frac{2}{3},\ \pm\frac{2}{5}\ \text{etc}$$

Podemos escrever, de modo mais simplificado:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \text{ e } q \in \mathbb{Z}^*\right\}$$

Dessa forma, podemos definir o conjunto $\mathbb{Q}$ como o conjunto das frações $\frac{p}{q}$; assim, um número é racional quando pode ser escrito como uma fração $\frac{p}{q}$, com **p** e **q** inteiros e $q \neq 0$.

Se $q = 1$, temos $\frac{p}{q} = \frac{p}{1} = p \in \mathbb{Z}$, o que mostra que $\mathbb{Z}$ é subconjunto de $\mathbb{Q}$. Assim, podemos construir o diagrama:



$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

No conjunto $\mathbb{Q}$ destacamos os seguintes subconjuntos:

- $\mathbb{Q}^*$: conjunto dos números racionais não nulos;
- $\mathbb{Q}_+$: conjunto dos números racionais não negativos;
- $\mathbb{Q}_+^*$: conjunto dos números racionais positivos;
- $\mathbb{Q}_-$: conjunto dos números racionais não positivos; e
- $\mathbb{Q}_-^*$: conjunto dos números racionais negativos.

O conjunto $\mathbb{Q}$ é fechado para as operações de adição, multiplicação e subtração.

Como não se define "divisão por zero", o conjunto $\mathbb{Q}$ não é fechado em relação à divisão. No entanto, o conjunto $\mathbb{Q}^*$ é fechado em relação à divisão.

Representação decimal das frações

Tomemos um número racional $\frac{p}{q}$, tal que **p** não seja múltiplo de **q**. Para escrevê-lo na forma decimal, basta efetuar a divisão do numerador pelo denominador. Nessa divisão podem ocorrer dois casos:

1º) O quociente obtido tem, após a vírgula, uma quantidade finita de algarismos e o resto da divisão é zero. Exemplos:

- $\frac{2}{5} \rightarrow \begin{array}{l|l} 2 & 5 \\ \hline 20 & 0{,}4 \\ 0 & \end{array};\ \frac{2}{5} = 0{,}4$
- $\frac{1}{8} \rightarrow \begin{array}{l|l} 1 & 8 \\ \hline 10 & 0{,}125 \\ \ \ 20 & \\ \ \ \ \ 40 & \\ \ \ \ \ \ \ 0 & \end{array};\ \frac{1}{8} = 0{,}125$
- $\frac{35}{4} \rightarrow \begin{array}{l|l} 35 & 4 \\ \hline \ \ 30 & 8{,}75 \\ \ \ \ \ 20 & \\ \ \ \ \ \ \ 0 & \end{array};\ \frac{35}{4} = 8{,}75$

Quando isso ocorrer, os decimais obtidos são chamados **decimais exatos**.

Observe que acrescentar uma quantidade finita ou infinita de algarismos iguais a zero, à direita do último algarismo diferente de zero, não altera o quociente obtido. Veja, no exemplo, algumas representações possíveis para o número racional $\frac{2}{5}$:

$$\frac{2}{5} = 0{,}4 = 0{,}40 = 0{,}400 = 0{,}400000...$$

Inversamente, a partir do decimal exato 0,4, podemos identificá-lo com a fração $\frac{4}{10}$, que, simplificada, se reduz a $\frac{2}{5}$. Do mesmo modo: $8{,}75 = \frac{875}{100} = \frac{35}{4}$; $1{,}2 = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$.

2º) O quociente obtido tem, após a vírgula, uma infinidade de algarismos, nem todos iguais a zero, e não é possível obter resto igual a zero na divisão. Exemplos:

- $\frac{2}{3} \rightarrow$
$$\begin{array}{l|l} 2 & 3 \\ \hline 2\,0 & 0{,}6666... \\ \quad 2\,0 & \\ \qquad 2\,0 & \\ \qquad\quad 2 & \end{array}$$
$$\frac{2}{3} = 0{,}6666... = 0{,}\overline{6}$$

- $\frac{167}{66} \rightarrow$
$$\begin{array}{l|l} 1\,6\,7 & 66 \\ \hline \quad 3\,5\,0 & 2{,}53030... \\ \qquad 2\,0\,0 & \\ \qquad\quad 2\,0 & \\ \qquad\quad 2\,0\,0 & \\ \qquad\qquad 2\,0 & \end{array}$$
$$\frac{167}{66} = 2{,}53030... = 2{,}5\overline{30}$$

- $\frac{11}{9} \rightarrow$
$$\begin{array}{l|l} 1\,1 & 9 \\ \hline \quad 2\,0 & 1{,}222... \\ \qquad 2\,0 & \\ \qquad\quad 2\,0 & \\ \qquad\qquad 2 & \end{array}$$
$$\frac{11}{9} = 1{,}222... = 1{,}\overline{2}$$

Observe que, nesses casos, ocorre uma repetição de alguns algarismos. Os números decimais obtidos são chamados decimais periódicos ou **dízimas periódicas**; em cada um deles, os algarismos que se repetem formam a parte periódica, ou período da dízima. Para não escrever repetidamente os algarismos de uma dízima, colocamos um traço horizontal sobre seu primeiro período.

Se uma fração é equivalente a uma dízima periódica, ela é chamada **geratriz** dessa dízima. Nos exemplos anteriores, $\frac{2}{3}$ é a fração geratriz da dízima $0{,}\overline{6}$; $\frac{11}{9}$ é a fração geratriz da dízima $1{,}\overline{2}$ etc.

Para uma fração (irredutível) gerar uma dízima, é necessário que, na decomposição do denominador em fatores primos, haja algum fator diferente de 2 e de 5, por exemplo:

- As frações $\frac{41}{25}$; $\frac{3}{16}$; $\frac{31}{100}$; $-\frac{7}{8}$ etc. não geram dízimas periódicas;
  $5^2 \quad 2^4 \quad 2^2 \cdot 5^2 \quad 2^3$

- As frações $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{42}$, $-\frac{5}{33}$, $\frac{2}{45}$ etc. geram dízimas periódicas.
  $2 \cdot 3 \quad 2 \cdot 3 \cdot 7 \quad 3 \cdot 11 \quad 3^2 \cdot 5$

Representação fracionária das dízimas periódicas

Vamos apresentar alguns exemplos de transformação de dízimas periódicas em frações.

EXEMPLO 2

Seja a dízima $x = 0,\overline{8} = 0,8888...$ (1):
Fazemos $10x = 10 \cdot 0,8888... = 8,888... = 8,\overline{8}$ (2)
Subtraindo membro a membro (1) de (2), temos:

$$10x - x = 8,\overline{8} - 0,\overline{8}$$

$$9x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{9}$$

EXEMPLO 3

Com a dízima $z = 0,\overline{96}$, fazemos $100z = 96,\overline{96}$ e subtraímos a primeira da segunda equação:

$$100z - z = 96,\overline{96} - 0,\overline{96}$$

$$99z = 96$$

$$z = \frac{96}{99} = \frac{32}{33}$$

EXEMPLO 4

Seja a dízima periódica $t = 2,0454545...$ (1)
Temos:

$$\begin{cases} 10 \cdot t = 20,4545... & (2) \\ 1\,000 \cdot t = 2\,045,4545... & (3) \end{cases}$$

Subtraindo (2) de (3), obtemos:

$$990t = 2\,025 \Rightarrow t = \frac{2\,025}{990} = \frac{45}{22}$$

PENSE NISTO:

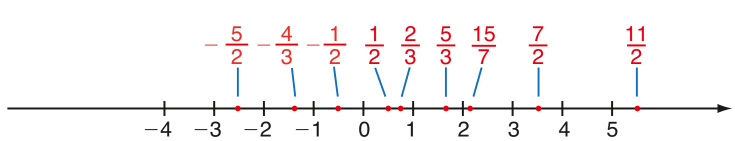
Por que não subtraímos diretamente (1) de (3)?

PENSE NISTO:

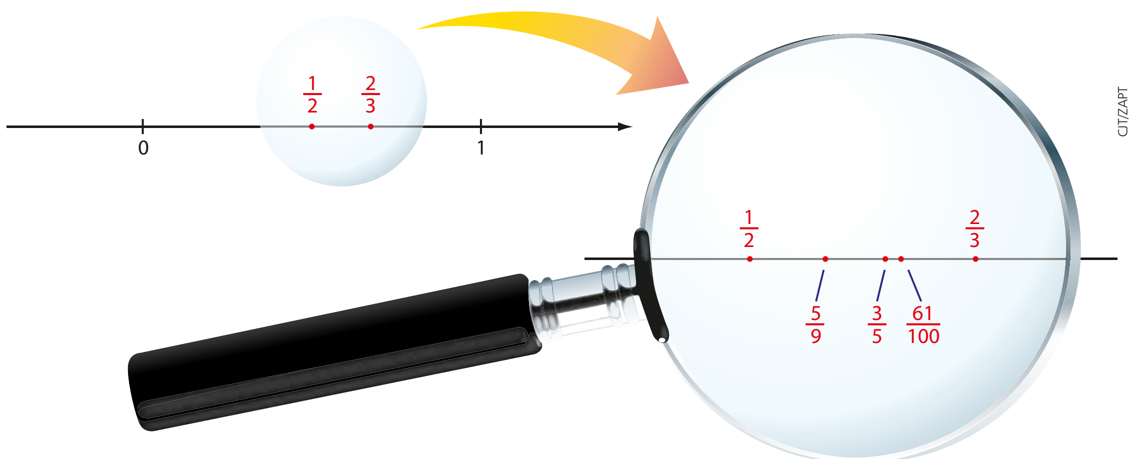
As igualdades $0,\overline{3} = \frac{1}{3}$; $0,\overline{6} = \frac{2}{3}$ e $0,\overline{9} = \frac{3}{3} = 1$ são verdadeiras?

Representação geométrica do conjunto dos números racionais

Daremos exemplos de números racionais e os localizaremos na reta numerada, que já contém alguns números inteiros assinalados:



Podemos notar que entre dois números inteiros consecutivos existem infinitos números racionais e, também, que entre dois números racionais quaisquer há infinitos números racionais. Por exemplo, entre os racionais $\frac{1}{2} = 0{,}5$ e $\frac{2}{3} = 0{,}\overline{6}$, podemos encontrar os racionais $\frac{5}{9} = 0{,}\overline{5}$, $\frac{3}{5} = 0{,}6$ e $\frac{61}{100} = 0{,}61$, entre outros.



Um procedimento comum para achar um número racional compreendido entre outros dois números racionais é calcular a **média aritmética** entre eles; no caso, temos:

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{2}{3}}{2} = \frac{\frac{3+4}{6}}{2} = \frac{\frac{7}{6}}{2} = \frac{7}{12}$$

ou

$$\frac{0{,}5 + 0{,}\overline{6}}{2} = \frac{1{,}1\overline{6}}{2} = 0{,}58\overline{3} = \frac{7}{12}$$

Oposto, módulo e inverso de um número racional

Os conceitos de oposto e módulo, já estudados para os números inteiros, também são válidos para um número racional qualquer.

Assim, por exemplo:

- O oposto de $-\frac{3}{4}$ é $\frac{3}{4}$.
- $\left|-\frac{7}{8}\right| = \left|\frac{7}{8}\right| = \frac{7}{8}$
- O oposto de $\frac{17}{11}$ é $-\frac{17}{11}$.
- $\left|-\frac{1}{3}\right| = \left|\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3}$

Dois números racionais são ditos **inversos** um do outro se o produto deles é igual a 1.

Por exemplo, $\frac{5}{6}$ e $\frac{6}{5}$ são inversos um do outro; 2 é o inverso de $\frac{1}{2}$; e $-\frac{5}{3}$ é o inverso de $-\frac{3}{5}$.

Observe que dois números inversos entre si têm necessariamente mesmo sinal.

PENSE NISTO:

Todo número racional admite inverso?

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

8 Classifique cada item como verdadeiro (**V**) ou falso (**F**):

a) $10 \in \mathbb{Q}$

b) $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$ e $3 \in \mathbb{Q}$

c) $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$ ou $x \in \mathbb{N}$

d) $0{,}851 \in \mathbb{Q}$

e) $-\,2{,}\overline{3} \notin \mathbb{Q}$

f) $-2 \in \mathbb{Q} - \mathbb{N}$

g) $-\frac{17}{9} \notin \mathbb{Q}$

h) $-5{,}16666... \notin \mathbb{Z}$

i) $\mathbb{Q}_+ \cap \mathbb{Q}_- = \{\ \}$

j) Todo número racional é inteiro.

9 Sabendo que $m = 3 - 2n$ e $n = -\frac{2}{3}$, escreva os seguintes números racionais na forma decimal e na forma de fração:

a) $-m + n$ **b)** $m + n - \frac{13}{4}$

10 Represente na forma fracionária mais simples:

a) 0,05 **c)** −10,2 **e)** 3,3

b) 1,05 **d)** 0,33 **f)** −2,25

11 Represente na forma decimal:

a) $\frac{4}{5} + \frac{8}{5}$ **c)** $\frac{2}{25}$ **e)** $\frac{5}{16} - \frac{16}{5}$

b) $\frac{57}{100}$ **d)** $\frac{3}{125}$

12 Destaque as frações que geram dízimas periódicas:

$$\frac{7}{40}, \frac{1}{30}, \frac{2}{25}, \frac{-5}{13}, \frac{-13}{8}, \frac{6}{30}, \frac{4}{11}, \frac{83}{100}, \frac{3}{1\,000}, \frac{1\,000}{3}$$

13 Obtenha o valor de **y** na forma decimal:

$$y = (\,2{,}\overline{8}\ :\ 1{,}\overline{6}\,) + \frac{2 - \frac{1}{2}}{-3 \cdot \frac{1}{2}}$$

14 Ache dois números racionais entre $-\frac{17}{5}$ e $-\frac{33}{10}$.

15 Encontre a fração geratriz de cada dízima:

a) $0{,}\overline{4}$ **e)** $1{,}12\overline{3}$

b) $0{,}\overline{14}$ **f)** $0{,}0\overline{23}$

c) $2{,}\overline{7}$ **g)** $1{,}\overline{03}$

d) $1{,}\overline{715}$ **h)** $1{,}0\overline{30}$

16 Qual é o número racional cujo inverso é igual ao oposto?

17 Escreva na forma de fração irredutível:

a) $0{,}2 \cdot 1{,}\overline{3} + 0{,}\ 8$

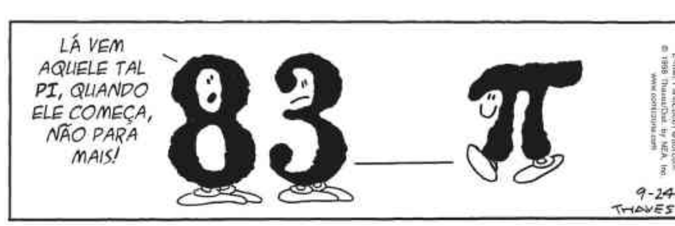
b) $[0{,}\ 6 : (-0{,}25) + 2]^2$

18 Represente na reta numerada os seguintes números racionais:

-1; $-1{,}76$; $-\frac{5}{4}$; $-\frac{9}{5}$; $-1{,}2\overline{3}$; $-\frac{3}{2}$; $-\frac{7}{5}$; e -2

O conjunto $\mathbb{I}$

Assim como existem números decimais que podem ser escritos como frações com numerador e denominador inteiros — os números racionais que acabamos de estudar —, há os que não admitem tal representação. Trata-se dos números decimais que possuem representação infinita não periódica.



Vejamos alguns exemplos:

- O número 0,212112111... não é dízima periódica, pois os algarismos após a vírgula não se repetem periodicamente.
- O número 1,203040... também não comporta representação fracionária, pois não é dízima periódica.
- Os números $\sqrt{2} = 1{,}4142135...$, $\sqrt{3} = 1{,}7320508...$ e $\pi = 3{,}141592...$, por não apresentarem representação infinita periódica, também não são números racionais. Lembre-se de que o número π representa o quociente entre a medida do comprimento de uma circunferência e a medida do seu diâmetro.

Um número cuja representação decimal infinita não é periódica é chamado **número irracional**, e o conjunto desses números é representado por $\mathbb{I}$.

A representação decimal do número $\sqrt{2}$, apresentada anteriormente, não garante, aparentemente, que $\sqrt{2}$ seja irracional. Apenas como exemplo, vamos demonstrar esse fato.

Demonstração:

Usaremos uma demonstração conhecida como redução ao absurdo.

Ela consiste em formular uma hipótese, supostamente verdadeira, e a partir dela, por meio de encadeamento lógico, chegar a uma proposição contrária a essa hipótese. Dessa contradição, deduz-se que a hipótese formulada é falsa.

Suponhamos, por absurdo, que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$; nessas condições, teríamos $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ (1), com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$.

Vamos supor, ainda, que $\frac{p}{q}$ seja fração irredutível, isto é, $\text{mdc}(p, q) = 1$.

Elevando ao quadrado os dois membros de (1), temos: $2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2q^2$ (2).

Como $q \in \mathbb{Z}^*$ e $2q^2$ é par, conclui-se que p^2 é par; logo, **p** é par e $p = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Substituindo em (2):

$$(2k)^2 = 2q^2 \Rightarrow 4k^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2 \Rightarrow q^2 \text{ é par}$$

Daí, **q** é par.

Então, se **p** e **q** são pares, a fração $\frac{p}{q}$ não é irredutível, o que contraria a hipótese. A contradição veio do fato de termos admitido que $\sqrt{2}$ é um número racional. Assim, $\sqrt{2}$ não pode ser racional.

Logo, $\sqrt{2}$ é irracional.

OBSERVAÇÕES

É comum aproximar números irracionais a números racionais. Por exemplo, o número irracional π pode ser aproximado aos números racionais 3,1; 3,14; $\frac{22}{7}$; 3 etc. Representaremos a aproximação pelo símbolo $\simeq$; assim, por exemplo, escrevemos $\pi \simeq 3{,}14$.

Para o número irracional $\sqrt{2}$ são usuais as seguintes aproximações racionais:

- 1,4 é uma aproximação, por falta, de $\sqrt{2}$, pois $1{,}4^2 = 1{,}96 < 2$;
- 1,41 é uma aproximação, por falta, de $\sqrt{2}$, pois $1{,}41^2 = 1{,}9881 < 2$;
- 1,42 é uma aproximação, por excesso, de $\sqrt{2}$, pois $1{,}42^2 = 2{,}0164 > 2$.

Observe que $1{,}41^2 < 2 < 1{,}42^2$ e $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$. Como $1{,}42 - 1{,}41 = 0{,}01$, dizemos que, ao usarmos o valor 1,41 (ou 1,42) para $\sqrt{2}$, estamos cometendo um erro inferior a 0,01.

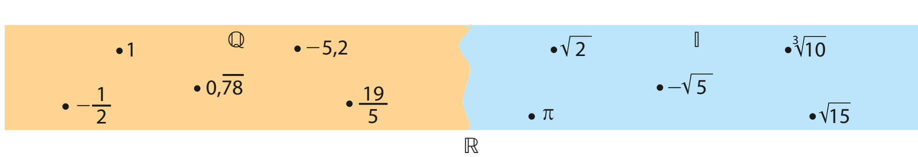
Em vários momentos nesta coleção, principalmente em exercícios, você vai se deparar com aproximações racionais para números irracionais, usadas para facilitar alguns cálculos.

PENSE NISTO:

Com auxílio de uma calculadora, obtenha aproximações racionais para $\sqrt{2}$, por falta e por excesso, com erro inferior a 0,001.

O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais

O conjunto formado pela reunião do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais é chamado **conjunto dos números reais** e é representado por $\mathbb{R}$.



Assim, temos:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}, \text{ sendo } \mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \varnothing$$

$\downarrow$ Se um número real é racional, então não é irracional, e vice-versa.

Temos: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ e $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$

Observe: $\mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

Além desses ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$), o conjunto dos números reais apresenta outros subconjuntos importantes:

- o conjunto dos números reais não nulos:

$$\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\} = \mathbb{R} - \{0\}$$

- o conjunto dos números reais não negativos: $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$
- o conjunto dos números reais positivos: $\mathbb{R}^*_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$
- o conjunto dos números reais não positivos: $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0\}$
- o conjunto dos números reais negativos: $\mathbb{R}^*_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

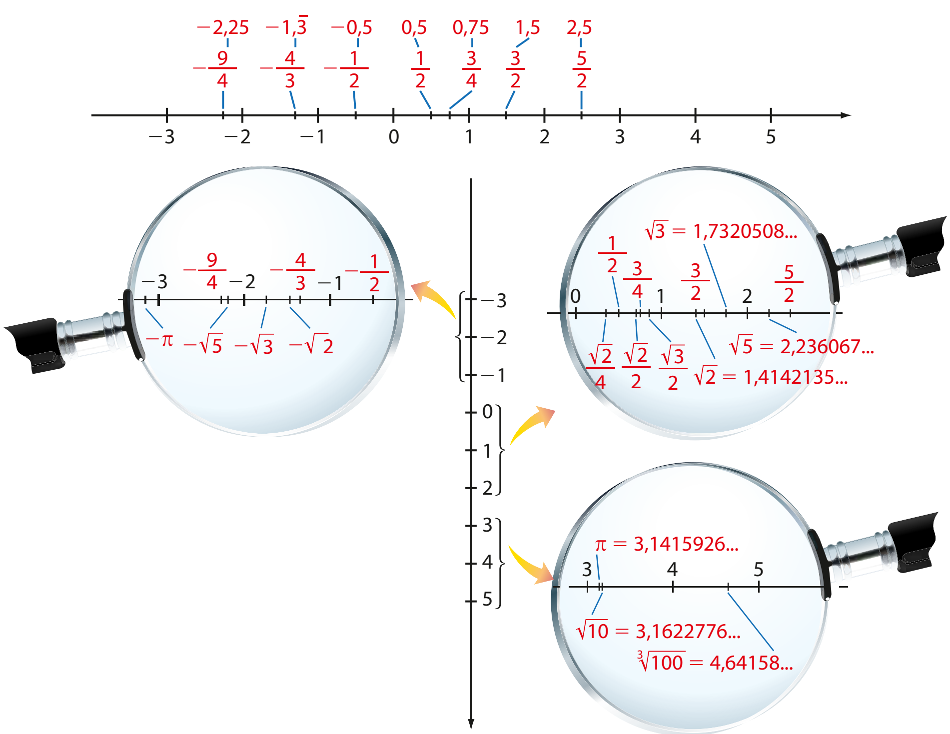
Observe que cada um desses cinco conjuntos contém números racionais e números irracionais.

PENSE NISTO:

A soma de dois números irracionais pode ser racional? E o produto?

Representação geométrica do conjunto dos números reais

Retomemos a reta numerada, com alguns números racionais (inteiros ou não) já assinalados. Vamos marcar nela alguns números irracionais:



CJT/ZAPT

OBSERVAÇÃO

Os conjuntos numéricos aqui apresentados serão amplamente utilizados nesta obra. Por exemplo, ao resolvermos uma equação, devemos estar atentos ao seu **conjunto universo** (**U**), pois este define os possíveis valores que a incógnita pode assumir. A equação $2x - 1 = 0$, por exemplo, não apresenta solução se $U = \mathbb{Z}$; no entanto, se $U = \mathbb{Q}$ (ou $U = \mathbb{R}$), ela apresenta $x = \frac{1}{2}$ como solução.

Os conceitos de números opostos, números inversos e módulo de um número foram apresentados nos conjuntos pertinentes. Todos se aplicam (e do mesmo modo) aos números reais, de maneira geral.

Por exemplo:

- O oposto de $\sqrt{5}$ é $-\sqrt{5}$, pois $\sqrt{5} + (-\sqrt{5}) = 0$.
- $|-\pi| = |\pi| = \pi$
- O inverso de $\sqrt{2}$ é $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, pois $\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$.

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

19 Represente, na reta numerada, os números reais: $\sqrt{20}$, 4, $\frac{9}{2}$, $\frac{23}{5}$, $\frac{\pi^2}{2}$, 5, $\frac{17}{4}$.
Entre os números acima, quais são irracionais?

20 Classifique cada número real seguinte em racional ou irracional.

a) $\sqrt{50}$
b) $\sqrt{7^2}$
c) $1 + 2\pi$
d) $(\sqrt{3} + 1)^2$
e) $\sqrt{\frac{20}{80}}$
f) $0,25 : 0,\overline{25}$
g) $(\sqrt{2} + 1) \cdot (\sqrt{2} - 1)$
h) $(0,\overline{3})^2$
i) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}$
j) $\sqrt{2} + \sqrt{7}$
k) $\sqrt{2 + 7}$

21 Seja $x \in \mathbb{R}^*$; classifique como verdadeira (**V**) ou falsa (**F**) as afirmações seguintes.

a) O oposto de **x** é sempre negativo.
b) x^2 é sempre maior que **x**.
c) O dobro de **x** é sempre menor que o triplo de **x**.
d) O inverso de **x** pode ser maior que **x**.
e) $x + 2$ pode ser menor que **x**.

22 Classifique os conjuntos seguintes em vazios ou unitários.

a) $\{x \in \mathbb{N} \mid x^3 = -8\}$
b) $\{x \in \mathbb{R}_- \mid x^4 = 16\}$
c) $\left\{x \in \mathbb{Z} \;\middle|\; -\frac{1}{5} \leqslant x \leqslant \frac{2}{3}\right\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 0\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| = -4\}$
f) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^5 = 0\}$
g) $\left\{x \in \mathbb{Q} \mid \frac{1}{x} = 2\right\}$
h) $\left\{x \in \mathbb{Z} \mid x^3 = \frac{1}{8}\right\}$

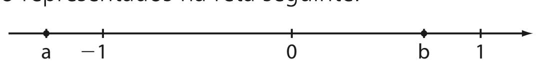
23 Sendo $x = 1 : 0,05$ e $y = 2 : 0,2$, classifique os números reais seguintes em racional ou irracional:

$A = \sqrt{\frac{x}{y}}$; $B = \sqrt{x - \frac{x}{y}}$; $C = A \cdot B$; $D = \frac{B}{A}$; e $E = A + B$

24 Usando uma calculadora, obtenha aproximações racionais, por falta e por excesso, do número irracional $\sqrt{3}$, com erro inferior a:

a) 0,01
b) 0,001

25 Os números reais **a** e **b** estão representados na reta seguinte:



Classifique em verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**) as afirmações seguintes.

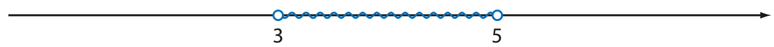
a) O número $\frac{a}{b}$ deve ser representado à esquerda de **a**.
b) O número b^2 deve ser representado à direita de 1.
c) O número $a + b$ deve ser representado entre -1 e 0.
d) O número a^2 deve ser representado entre **b** e 1.
e) O número $b - a$ deve ser representado entre **b** e 1.
f) O número $\frac{1}{b}$ deve ser representado à direita de 1.
g) O número $\frac{1}{a}$ deve ser representado entre **a** e -1.

Intervalos reais

O conjunto dos números reais possui também subconjuntos denominados **intervalos**, nos quais os elementos são determinados por meio de desigualdades. Sejam os números reais **a** e **b**, com $a < b$.

- Intervalo aberto de extremos **a** e **b** é o conjunto $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$.

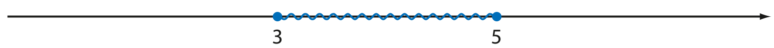
$$]3, 5[= \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 5\}$$



Note as "bolinhas vazias"; elas excluem os valores 3 e 5.

- Intervalo fechado de extremos **a** e **b** é o conjunto $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$.

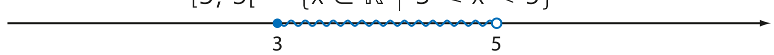
$$[3, 5] = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leqslant x \leqslant 5\}$$



Note as "bolinhas cheias"; elas incluem os valores 3 e 5.

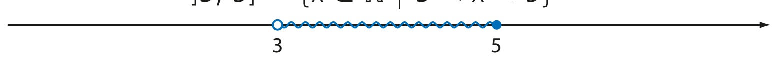
- Intervalo aberto à direita e fechado à esquerda de extremos **a** e **b** é o conjunto $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$.

$$[3, 5[= \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leqslant x < 5\}$$



- Intervalo aberto à esquerda e fechado à direita de extremos **a** e **b** é o conjunto $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$.

$$]3, 5] = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x \leqslant 5\}$$



Existem ainda os seguintes intervalos:

- $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant a\}$

$$]-\infty, 3] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 3\}$$

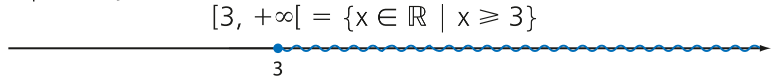
Observe que o intervalo determina uma semirreta (à esquerda) com origem em 3.

- $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$

$$]-\infty, 3[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$$

- $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant a\}$

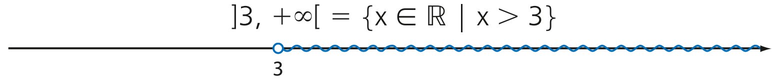
$$[3, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 3\}$$



Observe que o intervalo determina uma semirreta (à direita) com origem em 3.

- $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$

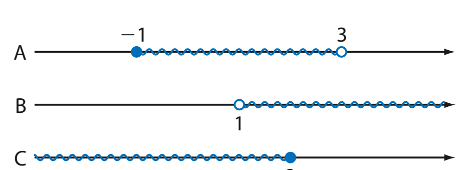
$$]3, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$$



Na resolução de inequações e de outros problemas em que são necessárias operações como união, interseção etc. entre intervalos, podemos utilizar uma representação gráfica.

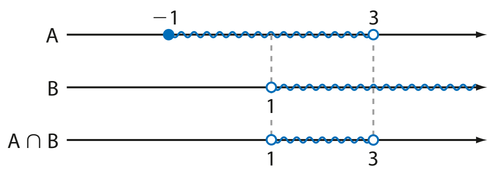
EXEMPLO 5

Dados os intervalos:
$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x < 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$ e $C =]-\infty, 2]$, podemos representá-los como se vê ao lado.



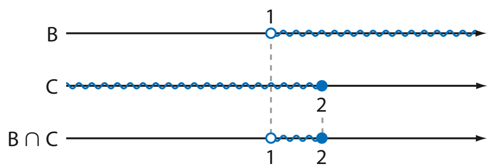
Vamos determinar $A \cap B$, $B \cap C$, $A \cup B$ e $A \cup B \cup C$.

- $A \cap B$



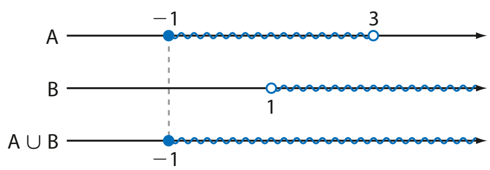
$A \cap B =]\,1, 3\,[= \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 3\}$

- $B \cap C$



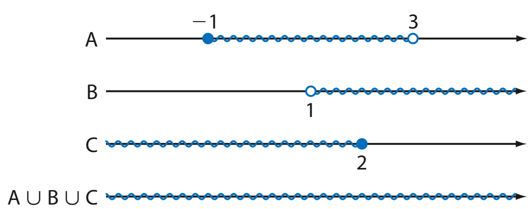
$B \cap C =]1, 2] = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leqslant 2\}$

- $A \cup B$



$A \cup B = [-1, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -1\}$

- $A \cup B \cup C$



$A \cup B \cup C =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

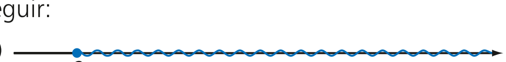
26 Represente graficamente cada um dos seguintes intervalos:

a) $]-3, 5]$ **c)** $\left[\frac{7}{5}, +\infty\right[$ **e)** $[-1, 1[$

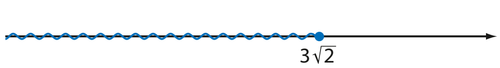
b) $\left]-\infty, \frac{2}{3}\right[$ **d)** $]0, 2[$ **f)** $]\sqrt{2}, 5[$

27 Descreva, por meio de uma propriedade característica, cada um dos conjuntos representados a seguir:

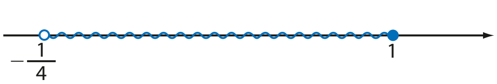
a)



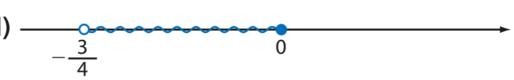
b)



c)



d)



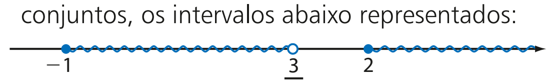
28 Sejam $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$ e $B = \left]-3, \frac{4}{3}\right]$. Determine:

a) $A \cup B$ **c)** $A - B$

b) $A \cap B$ **d)** $B - A$

29 Com relação ao exercício anterior, determine a quantidade de números inteiros pertencentes a $A \cap B$.

30 Represente, por meio de uma operação entre conjuntos, os intervalos abaixo representados:



UM POUCO DE **HISTÓRIA**

O NÚMERO DE OURO

Um número irracional bem conhecido por suas inúmeras aplicações e curiosidades é o número de ouro, na maioria das vezes representado pela letra grega ϕ (lê-se: fi).

$$\phi = 1{,}61803...$$

Na **escola pitagórica** grega (século V a.C.), era bastante difundida a ideia de dividir um segmento em **média** e **extrema razão**.

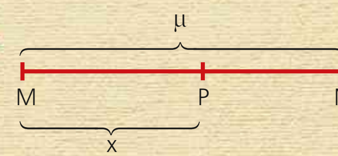
ESCOLA PITAGÓRICA
Pitágoras (570 a.C.-497 a.C.) foi um filósofo e matemático grego, fundador da escola pitagórica de pensamento.

A RAZÃO ÁUREA E O NÚMERO ϕ APARECEM NOS LIVROS:

- LIBER ABACI (1202) Fibonacci
- DE DIVINA PROPORTIONE (1509) Luca Pacioli

MÉDIA E EXTREMA RAZÃO (razão áurea)

Para dividir um segmento $\overline{MN}$ de medida μ em média e extrema razão, é preciso determinar o ponto **P**, tal que:



$$\frac{PN}{MP} = \frac{MP}{MN}$$

Fazendo MP = x, segue a proporção:

$$\frac{\mu - x}{x} = \frac{x}{\mu} \Rightarrow x^2 + x\mu - \mu^2 = 0$$

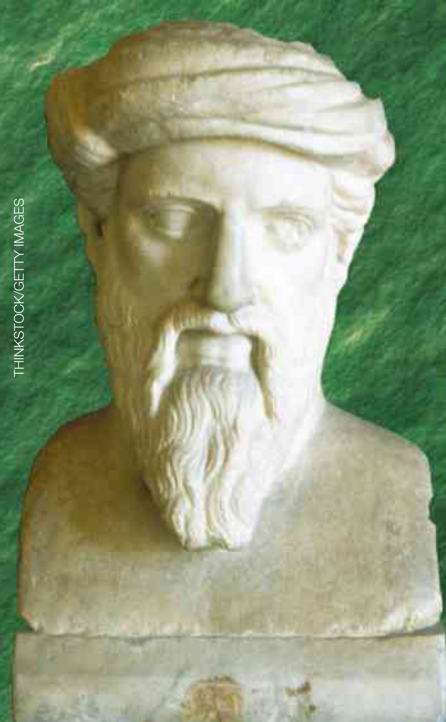
Resolvendo essa equação do 2º grau na incógnita **x**:

$$x = \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4(-\mu^2)}}{2} \overset{x>0}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\mu\left(-1 + \sqrt{5}\right)}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\mu} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\mu}{x} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi \simeq 1{,}618...$$



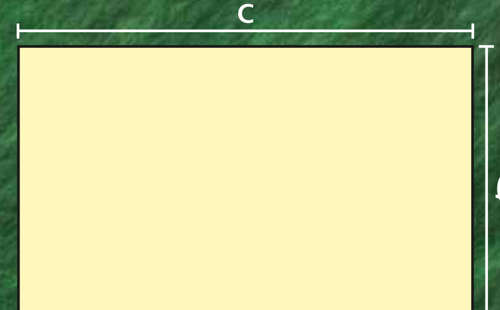
THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Busto de Pitágoras, Museus Capitolinos, Roma.

RETÂNGULO ÁUREO
Um retângulo áureo é aquele em que a razão entre as medidas de suas dimensões é ϕ = 1,61803...
Os gregos usavam essa razão como critério estético. Até hoje é considerada a razão mais harmoniosa.

O retângulo de lados **C** e **ℓ** a seguir tem medidas próximas de um áureo:

$$\frac{C}{\ell} \simeq 1{,}62$$



Fonte de pesquisa: BOYER, Carl B. *História da Matemática*. 3ª ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2010.

Razão, proporção e porcentagem

Vamos lembrar alguns conceitos fundamentais estudados em anos anteriores.

Razão

Dados dois números reais **a** e **b**, com b ≠ 0, chama-se **razão de a para b** o quociente $\frac{a}{b}$ que também pode ser indicado por a : b.

O número **a** é chamado **antecedente**, e o número **b** é chamado **consequente**.

Veja os exemplos a seguir:

EXEMPLO 6

Em um grupo de 60 turistas que visitaram o Pão de Açúcar, no Rio de Janeiro, havia 36 brasileiros e 24 estrangeiros.

A razão entre o número de brasileiros e o número de estrangeiros no grupo é $\frac{36}{24} = \frac{3}{2}$, o que significa que, "para cada 3 brasileiros, há 2 estrangeiros".

A razão entre o número de brasileiros e o total de turistas no grupo é de $\frac{36}{60} = \frac{3}{5}$, o que significa que "de cada 5 turistas no grupo, 3 são brasileiros".

EXEMPLO 7

Para um concurso público, candidataram-se 24 500 pessoas para concorrer às 20 vagas disponíveis.

A razão $\frac{24\,500}{20} = \frac{1\,225}{1} = 1\,225$ representa o número de candidatos por vaga (cada vaga está sendo disputada por 1 225 candidatos).

Proporção

Dadas duas razões $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, chama-se **proporção** a igualdade entre essas razões:

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (lê-se: **a** está para **b** assim como **c** está para **d**)

Em uma proporção, os números **a** e **d** são chamados **extremos**, e os números **b** e **c** são chamados **meios**.

Na proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ vale a propriedade:

$$a \cdot d = b \cdot c$$

Para demonstrá-la, basta multiplicar os dois membros da igualdade por $b \cdot d \neq 0$:

$$b \cdot d \cdot \frac{a}{b} = b \cdot d \cdot \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

Dizemos que o produto dos extremos (**a** e **d**) é igual ao produto dos meios (**b** e **c**).

Por exemplo, na proporção $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$ temos $2 \cdot 9 = 6 \cdot 3 = 18$; em $\frac{1}{4} = \frac{4}{16}$ temos $1 \cdot 16 = 4 \cdot 4$.

Porcentagem

O quadro seguinte mostra a evolução dos salários, em reais, dos irmãos Marta e Caio nos anos de 2015 e 2016.

	Salário em 2015	Salário em 2016	Aumento salarial
Marta	2 400,00	3 000,00	600,00
Caio	1 900,00	2 470,00	570,00

Vamos calcular, para cada irmão, a razão entre o aumento salarial e o salário em 2015:

$$\text{Marta} \rightarrow \frac{600}{2\,400} \qquad \text{Caio} \rightarrow \frac{570}{1\,900}$$

Quem obteve o maior aumento salarial relativo?

Uma das maneiras de comparar essas razões consiste em expressá-las com o mesmo denominador (100, por exemplo):

$$\text{Marta: } \frac{600}{2\,400} = \frac{25}{100} = 25\%$$

$$\text{Caio: } \frac{570}{1\,900} = \frac{3}{10} = \frac{30}{100} = 30\%$$

Concluímos que Caio obteve maior aumento salarial relativo, tendo como referência o salário de 2015.

As razões de denominador 100 são chamadas **razões centesimais** ou **taxas percentuais** ou, mais informalmente, **porcentagens**.

As porcentagens podem ser expressas de duas maneiras: na forma de fração com denominador 100 ou na forma decimal (dividindo-se o numerador pelo denominador).

Veja alguns exemplos:

- $30\% = \frac{30}{100} = 0{,}30$
- $4\% = \frac{4}{100} = 0{,}04$
- $135\% = \frac{135}{100} = 1{,}35$
- $27{,}9\% = \frac{27{,}9}{100} = 0{,}279$
- $0{,}5\% = \frac{0{,}5}{100} = 0{,}005$
- $18\% = \frac{18}{100} = 0{,}18$

PENSE NISTO:

É verdade que $100\% = 1$; $200\% = 2$; $300\% = 3$ etc.?

EXEMPLO 8

Em um condomínio residencial com 80 apartamentos, verificou-se que em 35% das unidades moram inquilinos. Podemos utilizar diferentes estratégias para calcular em quantas unidades moram inquilinos.

A taxa de 35% significa que, se o condomínio tivesse 100 unidades, 35 delas seriam ocupadas por inquilinos. Assim, podemos escrever a proporção:

$$\frac{35}{100} = \frac{x}{80} \Rightarrow 100 \cdot x = 35 \cdot 80 \Rightarrow x = 28$$

Logo, há 28 unidades em que moram inquilinos.

A determinação de **x** poderia ser simplificada, calculando-se diretamente 35% de 80:

$$\frac{35}{100} \cdot 80 = 0{,}35 \cdot 80 = 28$$

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Com uma calculadora simples, podemos fazer rapidamente cálculos de porcentagens de certo valor.

Veja a tecla %.

Para se calcular 35% de 80, procedemos da seguinte forma:

8 → 0 → × → 3 → 5 → % → = → 28

O cálculo mental também é amplamente usado no cálculo de porcentagens. Acompanhe o raciocínio:

Como 10% (décima parte) de 80 vale 8, então 5% (metade de 10%) vale 4 e 30% (triplo de 10%) vale $3 \cdot 8 = 24$.

Assim, 35% de 80 corresponde a $4 + 24 = 28$.

PENSE NISTO:

Como você calcularia, mentalmente, 3% de 80?

EXEMPLO 9

Dos 240 alunos do 1º ano do Ensino Médio de um colégio, 90 são moças.

A razão entre o número de moças e o número total de alunos é $\frac{90}{240}$.

Para calcular a porcentagem de moças no 1º ano desse colégio, podemos fazer:

$$\frac{90}{240} = \frac{x}{100} \Rightarrow 240 \cdot x = 90 \cdot 100 \Rightarrow x = 37{,}5$$

A porcentagem é 37,5%.

Podemos, também, simplesmente dividir 90 por 240:

$$\frac{90}{240} = 0{,}375 = \frac{375}{1\,000} = \frac{37{,}5}{100} \text{ ou } 37{,}5\%$$

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

31 Determine a razão (na ordem dada) entre:

a) 16 e 5
b) 40 e 120
c) 32 e 8
d) 0,4 e 0,02
e) $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{6}$
f) 2 km e 400 m
g) 10 min e 2 h
h) 8 kg e 500 g

32 Calcule o valor real de **x** em:

a) $\frac{x}{3} = \frac{3}{2}$
b) $\frac{4x}{5} = \frac{x + 1}{3}$
c) $\frac{2 - x}{x + 5} = \frac{3}{4}$
d) $\frac{x - 1}{x - 2} = \frac{3}{2}$

33 A densidade demográfica de uma região (cidade, estado, país etc.) é definida como a razão entre o número de habitantes e a área da região. Qual é a região **menos** densamente povoada entre as citadas no quadro?

Região	Área (km²)	Número de habitantes
X	30 000	1,5 milhão
Y	1 500	120 mil
Z	20 000	0,8 milhão

34 Calcule, quando possível mentalmente, e comprove a resposta com uma calculadora:

a) 20% de 600
b) 15% de 840
c) 50% de 120
d) 10% de 123,5
e) 27% de 2 500
f) 7,5% de 400
g) 350% de 75
h) 15,4% de 350
i) 3% de 90
j) 0,5% de 2 100

35 Um vendedor recebe um salário fixo de R\$ 950,00 mais 4% sobre o total de vendas no mês. Qual será seu salário se, em certo mês, o total de vendas efetuadas for R\$ 10 000,00? E se as vendas dobrarem?

36 Calcule o valor de **x** em cada caso:

a) 10 é x% de 40
b) 3,6 é x% de 72
c) 120 é x% de 150
d) 136 é x% de 400
e) 150 é x% de 120

37 Em uma determinada fruta cuja massa é 60 g, o teor de água é 45% e o resto é polpa. Quantos gramas há de polpa de fruta?

38 De um grupo de 120 universitários que participam de um congresso, 48 são alunos do curso de Farmácia, 36 são alunos do curso de Química e os demais do curso de Biologia. Determine:

a) a razão entre o número de alunos que cursam Biologia e o número total de alunos.

b) a razão entre o número de alunos do curso de Farmácia e o número de alunos do curso de Química.

c) o número de alunos adicionais do curso de Química que deveriam ter participado do congresso a fim de que o percentual de alunos desse curso passasse a ser 40%.

39 Uma empresa pretende adquirir um certo equipamento eletrônico. Cinco fabricantes participam de um teste para determinar o percentual de peças defeituosas em um lote. Os resultados do teste são dados a seguir.

Fabricante	Número de peças analisadas	Número de peças com defeito
A	150	15
B	250	10
C	180	11
D	200	10
E	230	13

A empresa decidiu recusar as fabricantes cujo percentual de peças boas (não defeituosas) estivesse abaixo de 95%. Qual(is) fabricante(s) teve seu lote aprovado?

40 No mês de janeiro, o índice de pontualidade dos voos de uma companhia aérea foi de 95% e, no mês seguinte caiu para 90%. Sabendo que em janeiro a companhia operou 1 800 voos e em fevereiro 1 350, determine o índice de pontualidade dos voos nesse bimestre.

41 Em uma liquidação, os produtos de uma loja são anunciados com descontos de 25% até 60%.

a) Um artigo que custa R$180,00 é anunciado com 28% de desconto. Quanto ele passou a custar?

b) Um artigo que custa R$ 400,00 foi vendido por R$ 260,00. Qual foi o desconto percentual oferecido?

42 Em um supermercado trabalham 120 pessoas, sendo 70% mulheres. Entre as mulheres, $\frac{2}{7}$ são solteiras e, entre os homens, 25% não são solteiros. Determine:

a) o número de homens solteiros.

b) o percentual de funcionários que não são solteiros.

43 Em um jogo de futebol, constatou-se que a razão entre não pagantes e pagantes era de 3 : 17.

a) Qual foi o percentual de pagantes no jogo?

b) Se o público total foi de 45 000 pessoas, quantos não pagaram ingresso?

DESAFIO

Um número natural é um **quadrado perfeito** se ele for igual ao quadrado de outro número natural. Por exemplo, 49 é um quadrado perfeito, pois $49 = 7^2$. Um número natural é chamado **cubo perfeito** se ele for igual ao cubo de outro número natural. Por exemplo, 8 é um cubo perfeito, pois $8 = 2^3$.

a) Determine o menor número natural $x \neq 0$, tal que $56 \cdot 33 \cdot x$ seja um quadrado perfeito.

b) Qual é o menor número natural $z \neq 0$, tal que $z \cdot 540^2$ seja, simultaneamente, um cubo e um quadrado perfeito?

TROQUE IDEIAS

Matemática e Geografia: Escalas

Um exemplo conhecido e importante de razão são as **escalas numéricas**, amplamente usadas em mapas de Geografia, plantas de imóveis e maquetes.

Um mapa é uma imagem reduzida de uma determinada superfície. No mapa é preservada a proporção real entre distância, isto é, as distâncias lineares no mapa são proporcionais às correspondentes distâncias lineares reais.

A **escala** de um mapa é a razão entre a medida de um comprimento qualquer no mapa e a real medida do comprimento correspondente.

Observe o mapa político do Brasil. Nele foi utilizada uma **escala gráfica**: um segmento de medida 2 cm (verifique com a régua) está dividido ao meio por uma marcação, acima da qual se lê o valor 428. Isso significa que 1 cm no mapa corresponde a 428 km na realidade (ou ainda, 2 cm no mapa correspondem, na realidade, a 856 km).

Brasil: divisão política

Fonte: CALDINI, V. L. M.; Ísola, L. *Atlas geográfico* Saraiva. 4ª ed. São Paulo: Saraiva, 2013. p. 30.

a) Escrevendo as medidas indicadas na escala gráfica, em uma mesma unidade, obtenha a escala númerica desse mapa e represente a razão obtida $\frac{a}{b}$ na forma a : b.

b) Qual é, em linha reta, a distância real entre Belo Horizonte e Florianópolis?

c) A distância, em linha reta, de Cuiabá a Teresina é de aproximadamente 1 870 km. Qual deve ser a medida, no mapa, do segmento de extremidades nessas capitais? Confira sua resposta com uma régua.

d) Qual é a escala numérica correspondente à seguinte escala gráfica?

0 13 km

e) Represente a escala 1 : 20 000 por meio de uma escala gráfica.

f) Deseja-se produzir um mapa do Brasil no qual ocorra uma redução menor das distâncias reais, comparando-se com o mapa dado. Para isso, entre as escalas seguintes, qual deverá ser escolhida? Explique.

0 400 km ou 0 500 km