CAPÍTULO 3

Funções

A noção intuitiva de função

No estudo científico de qualquer fenômeno, sempre procuramos identificar grandezas mensuráveis ligadas a ele e, em seguida, estabelecer as relações existentes entre essas grandezas.

Acompanhe os exemplos a seguir.

EXEMPLO **1**

Tempo e espaço

Uma pista de ciclismo tem marcações a cada 600 m. Um ciclista treina para uma prova de resistência, desenvolvendo uma velocidade constante. Enquanto isso, seu técnico anota, de minuto em minuto, a distância já percorrida pelo ciclista.

O resultado pode ser observado na tabela abaixo:

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Instante (min)	Distância (m)
0	0
1	600
2	1 200
3	1 800
4	2 400
...	...

A cada instante (**x**) corresponde uma única distância (**y**). Dizemos, por isso, que a distância é função do instante. A fórmula (ou a lei) que relaciona **y** com **x** é:

$y = 600 \cdot x$, com **y** em metros e **x** em minutos.

EXEMPLO **2**

Mercadoria e preço

Em uma barraca de praia, em Fortaleza, vende-se água de coco ao preço de R$ 3,50 o copo. Para facilitar seu trabalho, o proprietário da barraca montou a tabela ao lado.

Nesse exemplo, duas grandezas estão relacionadas: o número de copos de água de coco e o respectivo preço. A cada quantidade de copos corresponde um único preço. Dizemos, por isso, que o preço é função do número de copos. A fórmula que estabelece a relação de interdependência entre preço (**y**), em reais, e o número de copos de água de coco (**x**) é:

$$y = 3{,}50 \cdot x$$

Número de copos	Preço (R$)
1	3,50
2	7,00
3	10,50
4	14,00
5	17,50
6	21,00
7	24,50
8	28,00
9	31,50
10	35,00

EXEMPLO 3

Passageiros e preço da passagem

Para fretar um ônibus de excursão com 40 lugares, paga-se ao todo R$ 1 800,00. Essa despesa deverá ser igualmente repartida entre os participantes.

Para calcular a quantia que cada um deverá desembolsar (**y**), basta dividir o preço total (R$ 1 800,00) pelo número de passageiros (**x**). A fórmula (ou a lei) que relaciona **y** com **x** é:

$$y = \frac{1\,800}{x}$$

Observe na tabela alguns valores referentes à correspondência entre **x** e **y**:

x	y
4	450,00
12	150,00
15	120,00
18	100,00
20	90,00
24	75,00
36	50,00
40	45,00

RIVALDO GOMES/FOLHAPRESS

EXEMPLO 4

Tempo e temperatura

Um Instituto de Meteorologia, quando quer estudar a variação da temperatura em certa cidade, mede a temperatura a intervalos regulares – por exemplo, a cada 2 horas – e monta uma tabela que relaciona as grandezas hora e temperatura. Vamos supor que a tabela de um determinado dia seja assim:

Tempo (h)	Temperatura (°C)
0	7
2	4
4	3
6	2
8	5
10	12
12	18
14	20
16	20
18	15
20	12
22	8
24	7

CARLOS GOLDGRUB/OPÇÃO BRASIL IMAGENS

A cada hora corresponde uma única medida de temperatura. Dizemos, por isso, que a medida da temperatura é função da medida de tempo.

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

1 A tabela mostra o valor final de alguns pedidos de um certo tipo de piso laminado, solicitados a um fabricante, de acordo com a área de piso colocado:

Área (m^2)	Valor (R$)
40	2 800
25	1 750
60	4 200
140	9 800
180,5	12 635

a) Qual será o valor de um pedido de 100 m^2 desse piso? E de 250 m^2?

b) Qual é a fórmula (ou lei) que relaciona o valor (**y**), em reais, de um pedido de acordo com a quantidade (**x**) de piso, em metros quadrados?

2 Na cidade, um veículo econômico de passeio consome um litro de gasolina a cada 9 quilômetros rodados.

a) Faça uma tabela que forneça a distância percorrida pelo veículo ao serem consumidos: 0,25 L; 0,5 L; 2 L; 3 L; 10 L; 25 L; 40 L de gasolina.

b) Qual é a fórmula que relaciona a distância percorrida (**d**), em quilômetros, em função do número de litros (**L**) consumidos?

3 Um moderno avião é capaz de manter uma velocidade média de cruzeiro de aproximadamente 900 km/h.

a) Qual é a distância percorrida pelo avião em 15 minutos, meia hora, 2 horas e 5 horas? Represente em uma tabela.

b) Em quanto tempo o avião percorre 2 880 km?

c) Relacione, por meio de uma lei, a distância percorrida (**d**), em quilômetros, em função do tempo (**t**), em horas.

4 Ao receber sua conta de R$ 85,00 referente à TV por assinatura, Nair leu a seguinte instrução: "Para pagamentos realizados com atraso, serão acrescentados multa de R$ 1,70 e juros de R$ 0,03 por dia de atraso no pagamento".

a) Qual valor Nair pagaria se atrasasse 1,5, 10 ou 30 dias?

b) Seja **x** o número de dias de atraso ($1 \leq x \leq 30$). Qual é a lei (ou fórmula) que relaciona o total (**y**) a ser pago, em reais, em função de **x**?

5 Em uma atividade, um professor pediu aos alunos que desenhassem uma sequência de cinco quadrados, a partir da medida de seus lados. Para cada quadrado, os alunos deveriam calcular o perímetro e a área, como mostra a tabela:

Medida do lado (cm)	1	3,5	5	8	10
Medida do perímetro (cm)					
Área (cm^2)					

a) Copie a tabela acima no caderno e complete-a.

b) Qual é a lei de correspondência entre a medida do perímetro (**p**) e a medida do lado (ℓ) do quadrado?

c) Qual é a lei de correspondência entre a área (**a**) e a medida do lado (ℓ) do quadrado?

d) Dobrando-se a medida do lado, dobra-se a medida do perímetro? E a área?

6 Juntas, duas torneiras idênticas, com a mesma vazão, enchem um reservatório vazio em 20 minutos.

a) Faça uma tabela para representar o tempo (em minutos) gasto para encher esse mesmo reservatório, quando vazio, se forem utilizadas 1, 4, 6, 8 e 10 torneiras, todas idênticas às duas primeiras.

b) Qual é a lei que relaciona o tempo (**t**), em minutos, gasto para encher tal reservatório de acordo com o número **n** dessas torneiras?

c) Quantas dessas torneiras seriam necessárias para encher tal reservatório em 1 minuto e 36 segundos?

7 Considere um processo de divisão celular em que cada célula se subdivide em outras duas a cada hora.

a) Partindo-se de uma única célula, iniciou-se uma experiência científica. Faça uma tabela para representar a quantidade de células presentes nessa cultura após 1, 2, 3, 4, 5 e 6 horas do início da experiência.

b) Qual é a quantidade mínima de horas (completas) necessárias para que haja mais de 1 000 células na cultura?

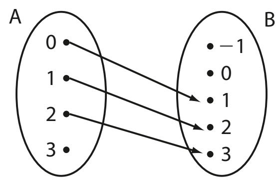
c) Qual é a lei que relaciona o número de células (**n**) encontrado na cultura após **t** horas do início da experiência?

A noção de função como relação entre conjuntos

Para caracterizar de modo mais preciso a noção de função, devemos recorrer às noções sobre conjuntos.

Vamos considerar, por exemplo, os conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ e observar algumas relações entre elementos de **A** e elementos de **B**.

1ª) Vamos associar a cada elemento $x \in A$ o elemento $y \in B$ tal que $y = x + 1$:

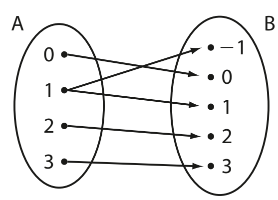


x	y
0	1
1	2
2	3

Para cada elemento $x \in A$, com exceção do 3, existe um só elemento $y \in B$ tal que **y** é o correspondente de **x**.

Para o elemento $3 \in A$ não existe correspondente $y \in B$.

2ª) Vamos associar a cada elemento $x \in A$ o elemento $y \in B$ tal que $y^2 = x^2$:



x	y
0	0
1	±1
2	2
3	3

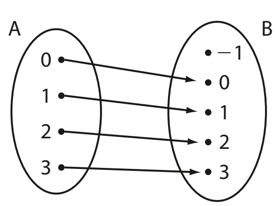
PENSE NISTO:

Você notou que, se **x** e **y** são números reais e $y^2 = x^2$, então $y = x$ ou $y = -x$?

Para cada elemento $x \in A$, com exceção de 1, existe um só elemento $y \in B$ tal que **y** é o correspondente de **x**.

Para o elemento $1 \in A$ existem dois elementos correspondentes em **B**: o 1 e o -1.

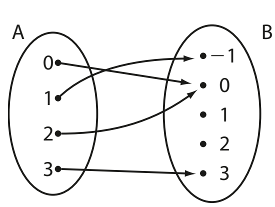
3ª) Associemos a cada $x \in A$ o elemento $y \in B$ tal que $y = x$:



x	y
0	0
1	1
2	2
3	3

Para todo $x \in A$, sem exceção, existe um único $y \in B$ tal que **y** é o correspondente de **x**.

4ª) Associemos a cada $x \in A$ o elemento $y \in B$ tal que $y = x^2 - 2x$:



x	y
0	0
1	-1
2	0
3	3

Para todo $x \in A$, sem exceção, existe um único $y \in B$ tal que **y** é o correspondente de **x**.

Nos dois últimos casos, para todo $x \in A$ existe um só $y \in B$ tal que **y** está associado a **x**. Por esse motivo, cada uma dessas relações recebe o nome de **função definida em A com valores em B**.

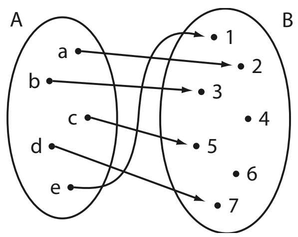
Dados dois conjuntos não vazios **A** e **B**, uma relação (ou correspondência) que associa a cada elemento $x \in A$ um único elemento $y \in B$ recebe o nome de **função de A em B**.

Veja um exemplo:

EXEMPLO 5

Observe ao lado a relação entre os elementos dos conjuntos $A = \{a, b, c, d, e\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Essa relação é uma função porque a todo elemento de **A** corresponde um único elemento de **B**. Tal relação também poderia ser descrita por uma tabela em que cada $x \in A$ tem um único correspondente $y \in B$.



x ∈ A	**y ∈ B**
a	2
b	3
c	5
d	7
e	1

A mesma relação poderia, ainda, ser descrita por um conjunto **f** de pares ordenados do tipo (x, y) em que $x \in A$, $y \in B$ e **y** é o correspondente de **x**:

$$f = \{(a, 2), (b, 3), (c, 5), (d, 7), (e, 1)\}$$

Nessa função, dizemos que:

$x = a$ corresponde a $y = 2$; ou $x = a$ está associado a $y = 2$; ou, ainda, 2 é a imagem de **a**.

Da mesma forma:

3 é a imagem de **b**, 5 é a imagem de **c**, 7 é a imagem de **d** e 1 é a imagem de **e**.

Note, mais uma vez, que cada $x \in A$ tem uma única imagem $y \in B$.

Notação

De modo geral, se **f** é um conjunto de pares ordenados (x, y) que define uma função de **A** em **B**, indicamos:

$$f: A \rightarrow B$$

Se, nessa função, $y \in B$ é imagem de $x \in A$, indicamos:

$y = f(x)$ (lê-se: **y** é igual a **f** de **x**)

Retomando o exemplo anterior, temos:

$$f(a) = 2;\ f(b) = 3;\ f(c) = 5;\ f(d) = 7;\ f(e) = 1.$$

Funções definidas por fórmulas

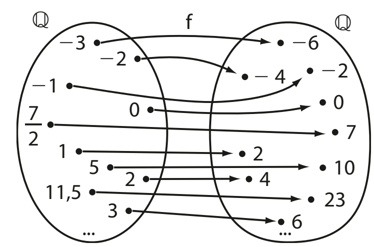
Existe um interesse especial no estudo de funções em que **y** pode ser calculado a partir de **x** por meio de uma fórmula (ou regra, ou lei). Veja os exemplos a seguir.

EXEMPLO 6

A lei de correspondência que associa cada número racional **x** ao número racional **y**, sendo **y** o dobro de **x**, é uma função f: $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ definida pela fórmula $y = 2x$, ou $f(x) = 2x$.

Nessa função:

- para $x = 5$, temos $y = 2 \cdot 5 = 10$. Escrevemos $f(5) = 10$.
- a imagem de $x = -3$ é $f(-3) = 2 \cdot (-3) = -6$.
- $x = 11{,}5$ corresponde a $y = 2 \cdot (11{,}5) = 23$.
- $y = 7$ é a imagem de $x = \frac{7}{2}$.
- $f(3) = 6$



PENSE NISTO:

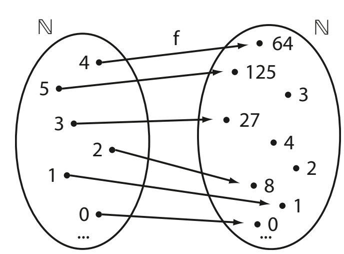
Nessa função todo número racional é imagem de algum **x** racional?

EXEMPLO 7

A função **f** que associa a cada número natural **x** o número natural **y**, sendo **y** o cubo de **x**, é uma função f: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $y = x^3$, ou $f(x) = x^3$.

Nessa função:

- para $x = 2$, temos $y = 2^3 = 8$. Dizemos que $f(2) = 8$.
- para $x = 5$, temos $y = 5^3 = 125$. Assim, $f(5) = 125$.
- $y = 64$ é a imagem de $x = 4$.



PENSE NISTO:

Nessa função todo número natural **y** é imagem de algum **x** natural?

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

1 Seja a função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -\frac{3x + 8}{5}$.

a) Calcule: $f(3)$, $f(-2)$, $f\left(\frac{1}{4}\right)$ e $f(\sqrt{2})$.

b) Determine o elemento do domínio cuja imagem é 0.

Solução:

a)
- $f(3) = -\frac{3 \cdot 3 + 8}{5} = -\frac{17}{5}$
- $f(-2) = -\frac{3 \cdot (-2) + 8}{5} = -\frac{2}{5}$
- $f\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{3 \cdot \frac{1}{4} + 8}{5} = -\frac{\frac{35}{4}}{5} = -\frac{7}{4}$
- $f(\sqrt{2}) = -\frac{3\sqrt{2} + 8}{5}$

b) $f(x) = 0 \Rightarrow -\frac{3x + 8}{5} = 0 \Rightarrow -(3x + 8) = 0 \Rightarrow x = -\frac{8}{3}$

2 Seja f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 4x + m$, em que **m** é uma constante real. Calcule **m**, sabendo que $f(-2) = 5$.

Solução:

Observe que as variáveis relacionadas nessa função estão representadas por **x** e f(x), enquanto **m** representa um número real fixo, isto é, **m** é uma constante.

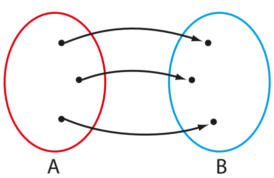
De $f(-2) = 5$ obtemos: $4 \cdot (-2) + m = 5 \Rightarrow -8 + m = 5 \Rightarrow m = 13$; portanto, a lei da função é $f(x) = 4x + 13$.

EXERCÍCIOS

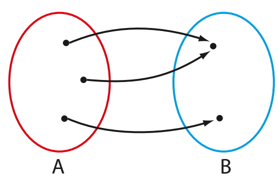
FAÇA NO CADERNO

8 Verifique, em cada caso, se o esquema define ou não uma função de **A** em **B**; os pontos assinalados representam os elementos dos conjuntos **A** e **B**.

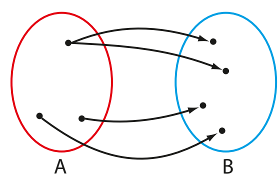
a)



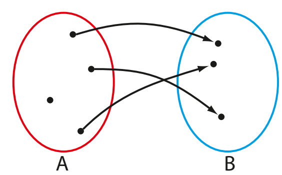
b)



c)

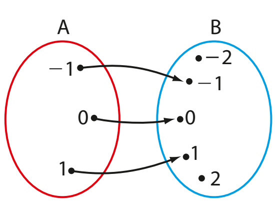


d)

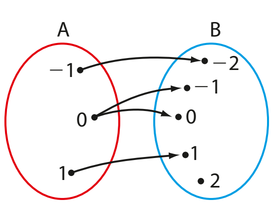


9 Em cada caso, verifique se o esquema representa uma função de **A** em **B**, sendo $A = \{-1, 0, 1\}$ e $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Em caso afirmativo, dê uma possível lei que define tal função:

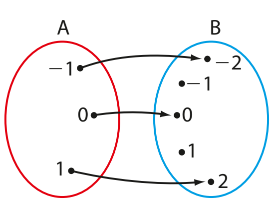
a)



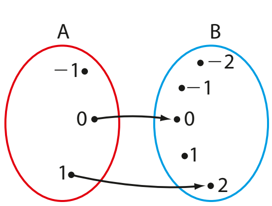
b)



c)



d)



10 Sendo $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, verifique em cada caso se a lei dada define uma função de **A** com valores em **B**:

a) $f(x) = 2x$

b) $f(x) = x^2$

c) $f(x) = 2x + 1$

d) $f(x) = |x| - 1$

11 Sejam $A = \mathbb{N}$ e $B = \mathbb{N}$. Responda:

a) A lei que associa cada elemento de **A** ao seu sucessor em **B** define uma função?

b) A lei que associa cada elemento de **A** ao seu quadrado em **B** define uma função?

c) A lei que associa cada elemento de **A** ao seu oposto em **B** define uma função?

12 Considere **f** uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3x^2 - x + 4$. Calcule:

a) $f(1)$

b) $f(-1)$

c) $f(0)$

d) $f\left(\frac{1}{2}\right)$

e) $f\left(\sqrt{2}\right)$

13 Seja **f** uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida pela lei $f(x) = (3 + x) \cdot (2 - x)$.

a) Calcule $f(0)$, $f(-2)$ e $f(1)$.

b) Seja $a \in \mathbb{R}$. Qual é o valor de $f(a) - f(-a)$?

14 Sendo f: $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dada por $f(x) = 2x + (-1)^x$, calcule:

a) $f(0)$

b) $f(1)$

c) $f(2)$

d) $f(-2)$

e) $f(37)$

15 Considerando **f** e **g** funções de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{Q}$ dadas por $f(x) = 3x^2 - x + 5$ e $g(x) = -2x + 9$, faça o que se pede:

a) Determine o valor de $\frac{f(0) + g(-1)}{f(1)}$.

b) Resolva a equação: $g(x) = f(-3) + g(-4)$.

16 Seja **f** uma função de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$ definida por $f(x) = \frac{4x - 2}{3}$.

Em cada caso, determine, se existir, o número inteiro cuja imagem vale:

a) 6

b) -10

c) 0

d) 1

17 A lei seguinte mostra a relação entre a projeção do valor (**v**), em reais, de um equipamento eletrônico e o seu tempo de uso (**t**), em anos:

$$v(t) = 1\,800 \cdot \left(1 - \frac{t}{20}\right)$$

a) Qual é o valor desse equipamento novo, isto é, sem uso?

b) Qual é a desvalorização, em reais, do equipamento no seu primeiro ano de uso?

c) Com quantos anos de uso o aparelho estará valendo R$ 1 260,00?

18 Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -\frac{3}{4}x + m$, sendo **m** uma constante real. Sabendo que $f(-8) = -4$, determine:

a) o valor de **m**;

b) $f(1)$;

c) o valor de **x** tal que $f(x) = -12$.

19 O gerente de uma casa de espetáculos verificou, durante uma temporada, que o número de pagantes (**y**) em um musical variou de acordo com o preço (**x**), em reais, do ingresso para o espetáculo, segundo a lei

$$y = 400 - \frac{5}{2}x, \text{ com } 20 \leqslant x \leqslant 120$$

a) Qual foi o número de pagantes quando o preço do ingresso era R$ 60,00?

b) Se o número de pagantes em uma noite foi 320, qual foi o valor cobrado pelo ingresso?

c) Quanto arrecadou a bilheteria quando o preço do ingresso era R$ 90,00?

20 Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida pela lei $f(x) = m \cdot 4^x$, sendo **m** uma constante real. Sabendo que $f(1) = 12$, determine o valor de:

a) **m**

b) $f(2)$

21 Estima-se que a população **p** (em milhares de habitantes) de certo município, daqui a **x** anos a contar de hoje, seja dada pela lei:

$$p(x) = 10 - \frac{2}{x + 1}$$

a) Qual é a população atual desse município?

b) Qual será a população daqui a 3 anos?

c) De quantas pessoas a população aumentará do 3º para o 4º ano?

d) Daqui a quantos anos a população será de 9 900 habitantes?

22 No Brasil, o número (**N**) do sapato varia de acordo com o "tamanho" ou o comprimento (**c**) do pé, em centímetros, segundo a lei:

$$N = \frac{5c + 28}{4}$$

a) O pé de Luís mede 28 cm. Qual é o número de seu sapato?

b) Luma calça sapatos de número 36. Quanto mede seu pé?

c) Dois irmãos sabem que as numerações de seus sapatos diferem de 4 unidades. Em quantos centímetros diferem os comprimentos de seus pés?

23 Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida pela lei $f(x) = -3x + 5$. Determine os valores de $a \in \mathbb{R}$ tais que:

$$f(a) + f(a + 1) = 3 \cdot f(2a)$$

24 Um laboratório realizou um teste de um novo medicamento em uma amostra de 900 voluntários doentes. O número **n** de pessoas que ainda estavam doentes no tempo **t**, em semanas, contado a partir do início da experiência ($t = 0$), é expresso pela lei

$$n(t) = a \cdot t^2 + b$$

em que **a** e **b** são constantes reais.

Sabendo que o último voluntário curou-se assim que foi completada a 15ª semana, determine o número de pessoas que ainda estavam doentes decorridas 5 semanas do início dos testes.

Domínio e contradomínio

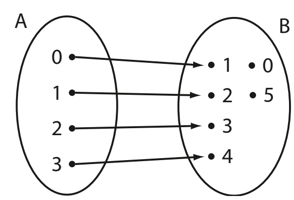
Seja f: A → B uma função.

O conjunto **A** é chamado **domínio** de **f**, e o conjunto **B** é chamado **contradomínio** de **f**.

Veja os exemplos a seguir.

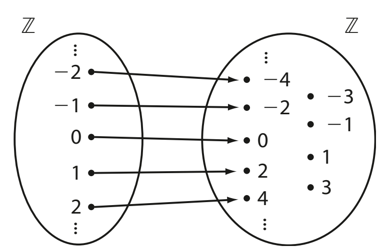
EXEMPLO 8

Sendo A = {0, 1, 2, 3} e B = {0, 1, 2, 3, 4, 5}, a função f: A → B tal que f(x) = x + 1 tem domínio **A** e contradomínio **B**.



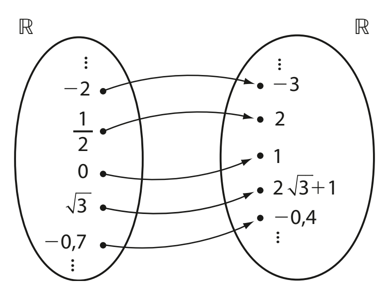
EXEMPLO 9

Sendo A = $\mathbb{Z}$ e B = $\mathbb{Z}$, a função f: A → B tal que f(x) = 2x tem domínio $\mathbb{Z}$ e contradomínio $\mathbb{Z}$.



EXEMPLO 10

Sendo A = $\mathbb{R}$ e B = $\mathbb{R}$, a função f: A → B definida por f(x) = 2x + 1 tem domínio $\mathbb{R}$ e contradomínio $\mathbb{R}$.



Observe que todo elemento **x** do domínio tem uma única imagem **y** no contradomínio, embora possam existir elementos do contradomínio que não são imagem de nenhum **x** do domínio. Note que, no exemplo 8, os números 0 e 5 não são imagens de $x \in A$; no exemplo 9, os números inteiros ímpares não são imagens de $x \in \mathbb{Z}$. No exemplo 10, todos os números reais são imagens de algum $x \in \mathbb{R}$, do domínio, como veremos logo adiante.

Determinação do domínio

Muitas vezes se faz referência a uma função **f**, dizendo apenas qual é a lei de correspondência que a define. Quando não é dado explicitamente o domínio **D** de **f**, deve-se subentender que **D** é formado por todos os números reais que podem ser colocados no lugar de **x** na lei de correspondência y = f(x), de modo que, efetuados os cálculos, resulte um **y** real. Vejamos alguns exemplos.

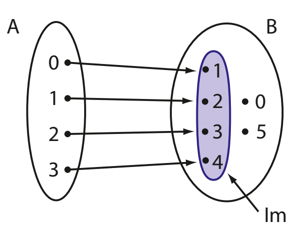
- O domínio da função definida pela lei y = 3x + 4 é D = $\mathbb{R}$, pois, qualquer que seja o valor real atribuído a **x**, o número 3x + 4 também é real.

- O domínio da função dada por $y = \dfrac{x+3}{x-1}$ é $D = \mathbb{R} - \{1\}$, pois, para todo **x** real diferente de 1, o número $\dfrac{x+3}{x-1}$ é real.
- O domínio da função dada por $y = \sqrt{x-2}$ é $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2\}$, pois $\sqrt{x-2}$ só é um número real se $x - 2 \geqslant 0$.
- A função dada por $y = \dfrac{1}{x-1} + \sqrt{x}$ só é definida para $x - 1 \neq 0$ e $x \geqslant 0$; então, seu domínio é $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0 \text{ e } x \neq 1\}$.

Conjunto imagem

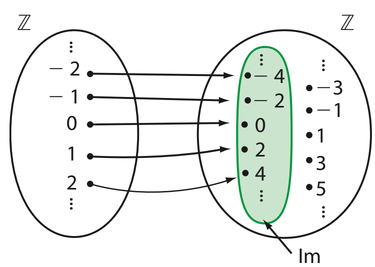
Se f: A → B é uma função, chama-se **conjunto imagem de f** (indica-se: Im) o subconjunto do contradomínio constituído pelos elementos **y** que são imagens de algum $x \in A$. Retomando os exemplos 8, 9 e 10 temos:

Exemplo 8
$f(x) = x + 1$



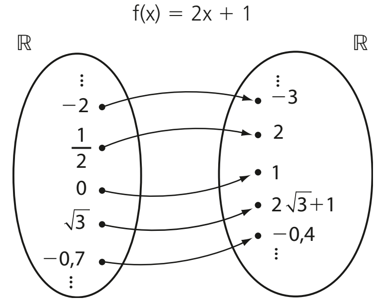
$Im = \{1, 2, 3, 4\}$

Exemplo 9
$f(x) = 2x$



$Im = \{..., -4, -2, 0, 2, 4, ...\}$
Podemos também escrever:
$Im = \{y \in \mathbb{Z} \mid y = 2z;\ z \in \mathbb{Z}\}$

Exemplo 10
$f(x) = 2x + 1$



$Im = \mathbb{R}$

No exemplo 10, todos os números reais são imagens de algum $x \in \mathbb{R}$, do domínio de **f**. Com efeito, dado um número real qualquer **a**, ele é imagem de $x = \dfrac{a-1}{2}$:

$$f\left(\frac{a-1}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{a-1}{2}\right) + 1 = a - 1 + 1 = a,\ \forall a \in \mathbb{R}$$

É importante destacar que o procedimento apresentado acima não se aplica facilmente a qualquer função. Na maioria das vezes, a determinação do conjunto imagem de uma função será feita por meio da leitura de seu gráfico, como veremos adiante.

PENSE NISTO:

Note que $a = 2x + 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = \dfrac{a-1}{2}$.

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

25 Sejam os conjuntos $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Em cada caso, determine o domínio, o contradomínio e o conjunto imagem de **f**:

a) f: A → B dada por $f(x) = x + 2$

b) f: A → B dada por $f(x) = x^2$

c) f: A → B dada por $f(x) = -x + 1$

d) f: A → B dada por $f(x) = |x|$

26 Se $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leqslant x \leqslant 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -5 \leqslant x \leqslant 5\}$ e f: A → B é definida pela lei $y = 2x + 1$, quantos são os elementos de **B** que não pertencem ao conjunto imagem da função?

27 Seja f: ℕ → ℤ definida por $f(x) = -x$. Qual é o conjunto imagem de **f**?

28 Se **x** e **y** são números reais, estabeleça o domínio de cada uma das funções dadas pelas seguintes leis:

a) $y = -4x^2 + 3x - 1$ **b)** $y = -\dfrac{3x + 11}{2}$ **c)** $y = \dfrac{2x + 3}{x}$ **d)** $y = \dfrac{4}{x - 1}$

29 Se **x** e **y** são números reais, determine o domínio das funções definidas por:

a) $y = \sqrt{x - 2}$ **b)** $y = \sqrt[3]{4x + 1}$ **c)** $y = \dfrac{3x + 1}{\sqrt{x - 3}}$ **d)** $y = \dfrac{\sqrt{x + 1}}{x}$

30 Estabeleça o domínio $D \subset \mathbb{R}$ de cada uma das funções definidas pelas sentenças abaixo:

a) $f(x) = \sqrt{2x - 1} + \sqrt{x}$

b) $g(x) = \sqrt{-3x + 5} - \sqrt{x - 1}$

c) $i(x) = \dfrac{2}{x^3 - 4x}$

d) $j(x) = \sqrt{x^2 + 5}$

UM POUCO DE **HISTÓRIA**

O desenvolvimento do conceito de função

A ideia de função que temos hoje em dia foi sendo construída ao longo do tempo por vários matemáticos.

Conheça um pouco dessa longa história.

- Na Antiguidade, a ideia de função aparece, implícita, em algumas informações encontradas em tábuas babilônicas.
- Um importante registro sobre funções aparece, não com este nome, na obra do francês Nicole Oresme (c. 1323-1382), que teve a ideia de construir "um gráfico" ou "uma figura" para representar graficamente uma quantidade variável — no caso, a velocidade de um móvel variando no tempo. Oresme teria usado os termos latitude (para representar a velocidade) e longitude (para representar o tempo) no lugar do que hoje chamamos de ordenada e abscissa — era o primeiro grande passo na representação gráfica das funções.
- O matemático alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) introduziu a palavra **função**, com praticamente o mesmo sentido que conhecemos e usamos hoje.
- A notação f(x) para indicar "função de **x**" foi introduzida pelo matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783).

PORTRAIT OF LEONHARD EULER, JAKOB EMANUEL HANDMANN, 1753/ KUNSTMUSEUM BASEL

A pintura de Jakob Emanuel Handmann, datada dos anos 1753, mostra o matemático suíço Leonhard Euler.

- O matemático alemão Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) deu uma definição de função muito próxima da que usamos hoje em dia:

> *"Se uma variável **y** está relacionada com uma variável **x** de modo que, sempre que um valor numérico é atribuído a **x**, existe uma regra de acordo com a qual é determinado um único valor de **y**, então se diz que **y** é função da variável independente **x**."*

- Por fim, com a criação da teoria dos conjuntos, no fim do século XIX, foi possível definir função como um conjunto de pares ordenados (x, y) em que **x** é elemento de um conjunto **A**, **y** é elemento de um conjunto **B** e para todo $x \in A$ existe um único $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.

Fonte de pesquisa: BOYER, Carl B. *História da Matemática*. 3ª ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2010.

Leitura informal de gráficos

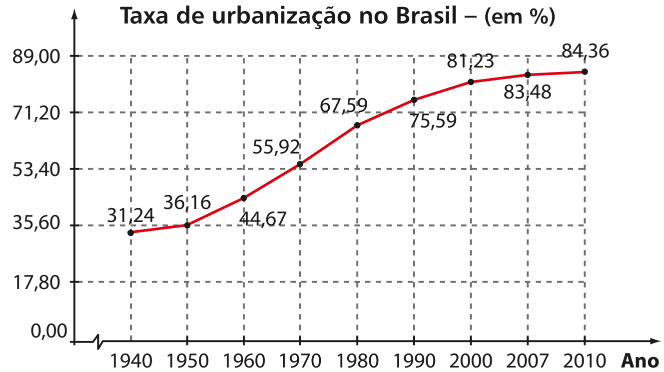
Vamos observar alguns gráficos disponibilizados pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). Gráficos como estes são comuns em jornais, revistas, na internet e em outros veículos de comunicação. A partir deles, conheceremos algumas propriedades das funções representadas por eles.

EXEMPLO 11

O gráfico relaciona duas grandezas: a taxa (percentual) de urbanização e o tempo (período de 1940 a 2010). A taxa é função do tempo: para cada ano corresponde um único valor do percentual da população brasileira que vive em zonas urbanas. Por exemplo, em 2000, 81,23% da população brasileira vivia em zonas urbanas.

É fácil perceber que a taxa cresce (aumenta) à medida que o tempo avança (aumenta). Dizemos que essa função é **crescente**. No gráfico evidencia-se, também, um forte crescimento da taxa até o ano 2000; a partir daí, os aumentos são mais "suaves".

Taxa de urbanização no Brasil – (em %)



Fonte: IBGE. Censo demográfico 1940-2010. Disponível em: <seriesestatisticas.ibge.gov.br/series.aspx?no=10&op=0&vcodigo=POP122&t=taxa-urbanizacao>. Acesso em: 4 mar. 2016.

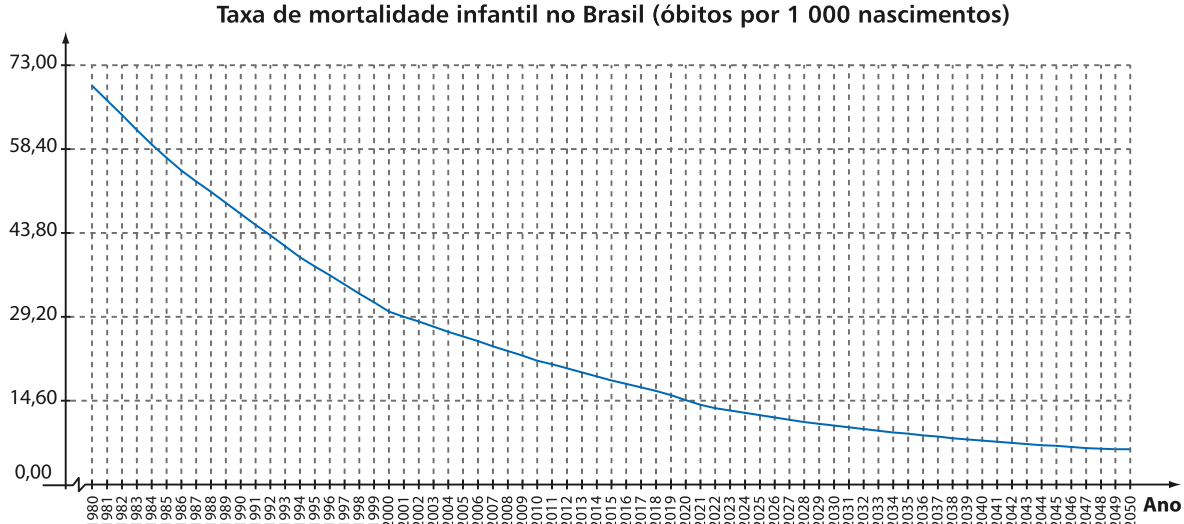
EXEMPLO 12

O gráfico mostra uma grande conquista da sociedade brasileira: a queda na taxa de mortalidade infantil desde 1980, passando pelos dias de hoje, até as projeções para 2050. A relação entre essas duas grandezas (taxa e tempo) define uma função: a cada ano está associada uma única taxa de mortalidade infantil.

Em todo o período considerado, a taxa de mortalidade diminui à medida que avançam os anos: trata-se de uma **função decrescente**. Observe que, de 1980 a 2000, a taxa se reduziu em 40 óbitos (por 1 000 nascimentos): de aproximadamente 70 por 1 000 para aproximadamente 30 por 1 000.

As projeções indicam que, em 2020, a taxa estará próxima de 15 por 1 000. Em 2050, atingirá um valor próximo de 7 por 1 000.

Taxa de mortalidade infantil no Brasil (óbitos por 1 000 nascimentos)



Fonte: IBGE, Projeção da População do Brasil por Sexo e Idade para o Período 1980-2050 - Revisão 2008. Disponível em: <seriesestatisticas.ibge.gov.br/series.aspx?no=10&op=0&vcodigo=POP324&t=revisao-2008-projecao-populacao-taxa-mortalidade>. Acesso em: 4 mar. 2016.

EXEMPLO 13

O gráfico seguinte mostra a relação entre duas grandezas: o número de óbitos por aids no Brasil (por 100 mil habitantes) e o tempo (de 1990 a 2009).

Essa relação define uma função, pois a cada ano corresponde uma única taxa.

No 1º ano – 1990 – a taxa de mortalidade (por 100 mil habitantes) era de 3,7 e esse foi o menor valor registrado no período considerado. Dizemos que o **valor mínimo** da função é 3,7 por 100 mil.

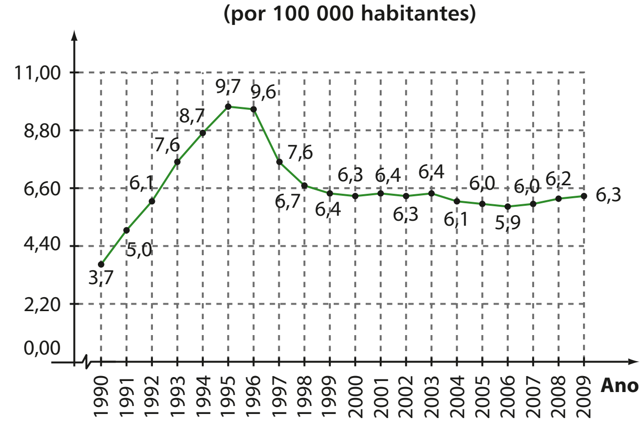
De 1990 a 1995 as taxas aumentaram (nesse intervalo a função é crescente). Em 1995 foi registrada a maior taxa de mortalidade (por 100 mil) que é igual a 9,7. Assim, o **valor máximo** dessa função é 9,7 por 100 mil.

De 1995 a 2000 as taxas diminuíram (nesse intervalo a função é decrescente) e de 2000 a 2003 a taxa praticamente não se alterou.

Uma nova queda ocorreu até 2006, seguida de novos aumentos até 2009. Quando analisamos os dez últimos anos do período considerado, podemos notar que a taxa de óbitos (por 100 mil habitantes) manteve-se na faixa de 5,9 a 6,4.

A despeito dos avanços no tratamento da doença, no qual o Brasil é referência internacional, é sempre muito importante lembrar que a aids ainda não tem cura, e informação e prevenção são sempre as opções mais seguras.

Número de óbitos por aids no Brasil
(por 100 000 habitantes)



Fonte: Ministério da Saúde/SVS – 2010. Disponível em: <seriesestatisticas.ibge.gov.br/exportador.aspx?arquivo=MS39_BR_PERC.csv&categorias="%C3%93bitos por AIDS - Taxa de mortalidade espec%C3%ADfica(TME)"&localidade=Brasil>. Acesso em: 4 mar. 2016.

PENSE NISTO:

No ano de 2009 a população brasileira estava próxima de 190 milhões de habitantes. Qual foi o número aproximado de óbitos por aids registrados naquele ano?

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

31 O gráfico ao lado representa a oscilação diária do valor da ação de uma empresa, comercializada em uma bolsa de valores, desde a abertura do pregão, às 10 horas, até o fechamento, às 18 horas.

Convencionaremos que t = 0 corresponde às 10 h; t = 1 corresponde às 11 h; e assim por diante.

Com base no gráfico, responda:

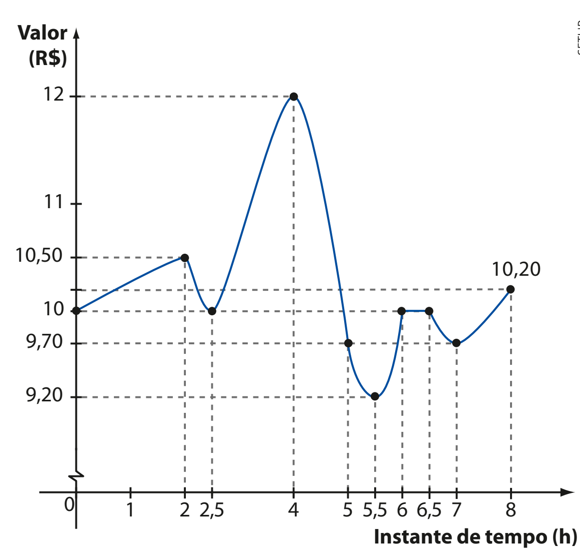
a) Em quais intervalos de horários o valor da ação subiu?

b) Em quais intervalos de horários o valor da ação caiu?

c) Nesse dia, entre quais valores oscilou o preço da ação dessa empresa?

d) Em que horários a ação esteve cotada a R$ 9,70?

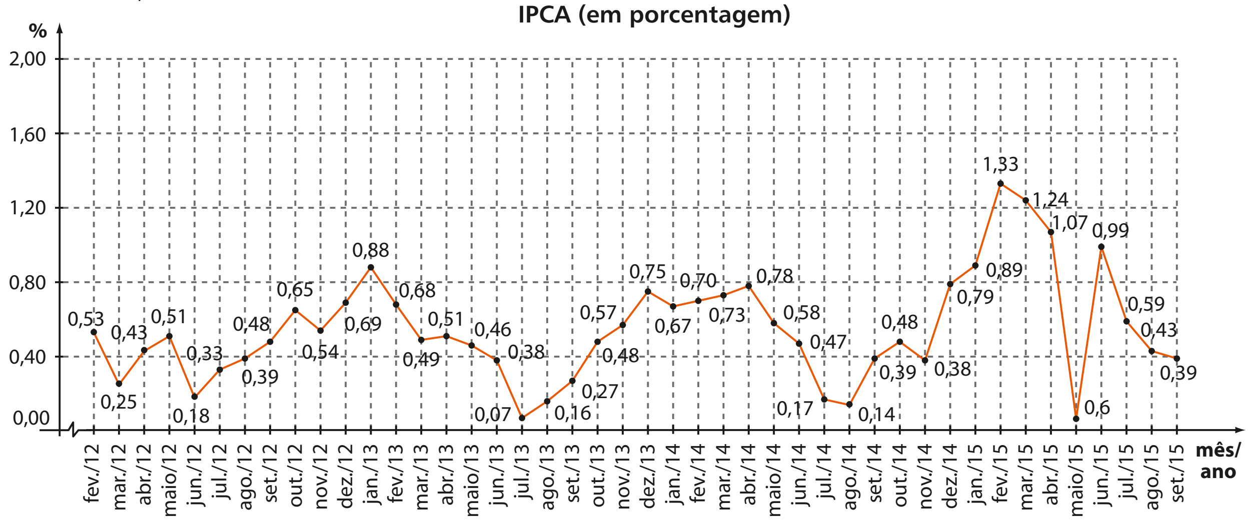
e) A ação encerrou o dia em alta, estável, ou em baixa? De quanto por cento?



SETUP

32 O gráfico a seguir mostra a variação mensal do Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA) de fevereiro de 2012 a setembro de 2015. Esse índice oficial tem por objetivo medir a inflação de um conjunto de produtos e serviços comercializados no varejo, como habitação, alimentação, educação, transporte etc.

IPCA (em porcentagem)



Fonte: IBGE. Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo15. Disponível em: <seriesestatisticas.ibge.gov.br/series.aspx?no=11&op=0&vcodigo=IL4&t=ipca15-indice-nacional-precos-consumidor-amplor>. Acesso em: 4 mar. 2016.

Com base nas informações do gráfico, responda:

a) Em que data (mês e ano) foi registrado o menor IPCA?

b) Em que data (mês e ano) foi registrado o maior IPCA?

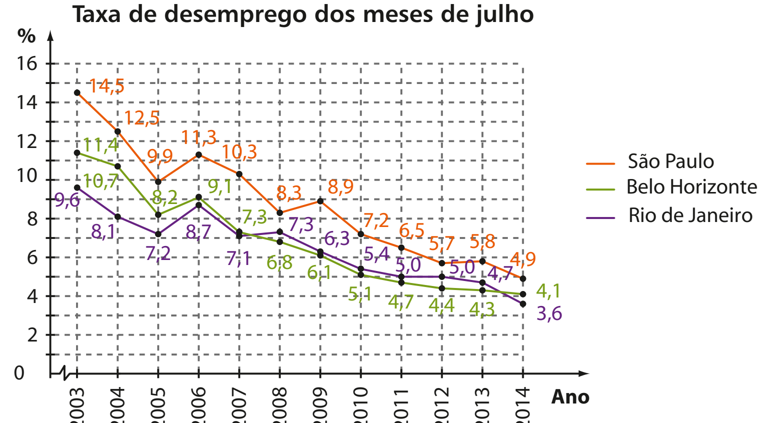
c) Indique, para o ano de 2013, os períodos em que o IPCA subiu e os períodos em que o IPCA caiu.

d) Em quantos meses do período considerado o IPCA ficou acima de 0,8% ao mês?

e) É possível concluir que, no 1º trimestre desses anos, ocorreu uma desaceleração da inflação?

33 O gráfico abaixo compara as taxas de desemprego nos meses de julho, no período de 2003 a 2014, nas regiões metropolitanas de São Paulo (SP), Belo Horizonte (BH) e Rio de Janeiro (RJ). Com base apenas nos dados do gráfico, classifique as afirmações seguintes em verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), justificando as falsas:

Taxa de desemprego dos meses de julho



Fonte: IBGE. Pesquisa Mensal de Emprego (PME). Disponível em: <blog.planalto.gov.br/taxa-de-desemprego-em-julho-e-a-menor-para-o-mes-desde-2003>. Acesso em: 4 mar. 2016.

a) Em todo o período, a região metropolitana de SP registrou as maiores taxas de desemprego.

b) Em todo o período, quando a taxa em BH diminui, a taxa em SP também diminui.

c) A diferença entre a maior e a menor taxa de desemprego no RJ é maior que 5 pontos percentuais.

d) Em todo o período, a taxa de desemprego na região metropolitana do RJ é menor que a taxa em BH.

e) Em 2014, o número de desempregados em BH superava o número de desempregados no RJ.

34 O gráfico ao lado mostra o desflorestamento bruto, no estado do Amazonas, em quilômetros quadrados, no período de 1991 a 2010.

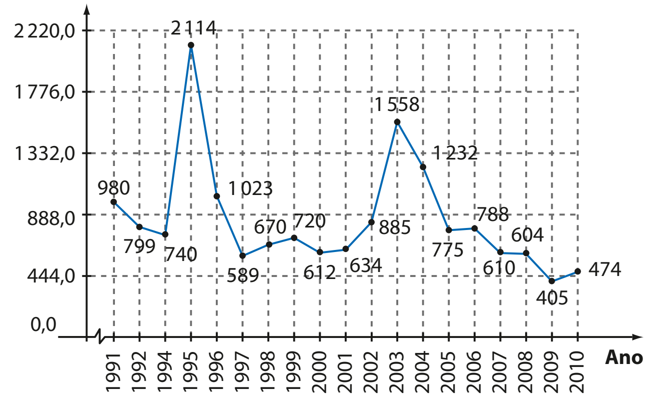
a) Identifique os períodos em que ocorreu aumento na área desmatada, considerando os anos de 1991 a 2005.

b) Considerando dois anos consecutivos, identifique o período em que foi registrado maior aumento absoluto na área desmatada. Esse aumento foi superior ou inferior a 1 000 km^2?

c) Nos últimos dez anos do período considerado no gráfico, identifique o ano que apresentou maior área desmatada.

d) A diferença entre a área desmatada anual foi menor que 15 km^2 para quais anos consecutivos?

Desflorestamento bruto anual no Amazonas (em km²)



Fonte: INPE/PRODES. Disponível em: <seriesestatisticas.ibge.gov.br/series.aspx?no=16&op=0&vcodigo=IU12&t=desflorestamento-amazonia-legal-3-desflorestamento-bruto>. Acesso em: 4 mar. 2016.

e) Em 2010, a área desmatada foi de 474 km^2. Considere um campo de futebol com 100 m de comprimento por 70 m de largura. Determine a quantos campos de futebol, aproximadamente, corresponde a área desmatada naquele ano.

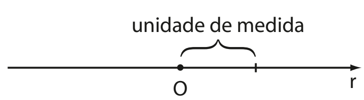
Lembre que 1 km^2 = 1 000 000 m^2.

O plano cartesiano

Representação de pontos em uma reta

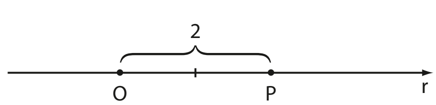
No capítulo 2 apresentamos a representação geométrica do conjunto dos números reais. Vamos agora formalizar alguns conceitos.

Dada uma reta **r** podemos associar números reais aos pontos dessa reta. Para isso, escolhemos um ponto **O** (origem), uma unidade de medida de comprimento e um sentido positivo (para a direita).

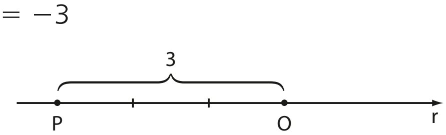


A cada ponto **P** dessa reta associamos um número real **x** tal que:

- Se **P** está à direita de **O** (sentido de **O** a **P** é positivo), **x** é o comprimento do segmento $\overline{OP}$ associado a um sinal positivo.
  Exemplo: $x = +2 = 2$



- Se **P** está à esquerda de **O** (sentido de **O** a **P** é negativo), **x** é o comprimento do segmento $\overline{OP}$ associado a um sinal negativo.
  Exemplo: $x = -3$



Em ambos os casos, dizemos que **x** é a **medida algébrica** do segmento $\overline{OP}$ e indicamos por $x = \text{med}(\overline{OP})$.

OBSERVAÇÃO

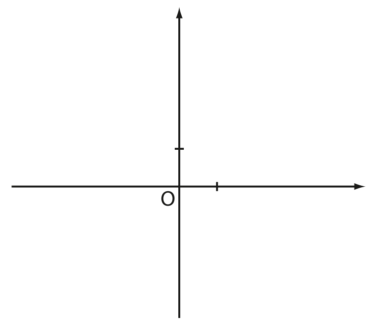
Se **P** coincide com **O**, então $x = 0$.

Representação de pontos em um plano

Para representar pontos em um plano, procederemos da seguinte maneira:

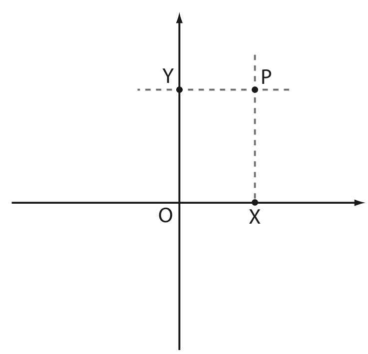
1º) Traçamos duas retas (eixos) perpendiculares e usamos a sua interseção **O** como origem para cada um desses eixos.

2º) Para cada um dos eixos, escolhemos uma unidade de medida e um sentido positivo.



3º) Para cada ponto **P** do plano traçamos:

- uma reta paralela ao eixo vertical que intersecta o eixo horizontal no ponto **X**.
- uma reta paralela ao eixo horizontal que intersecta o eixo vertical no ponto **Y**.



4º) O número real $x = \text{med}(\overline{OX})$ é a **abscissa** de **P**, e o número real $y = \text{med}(\overline{OY})$ é a **ordenada** de **P**. Observe, na figura acima, que a abscissa de **P** é positiva e a ordenada de **P** também é positiva.

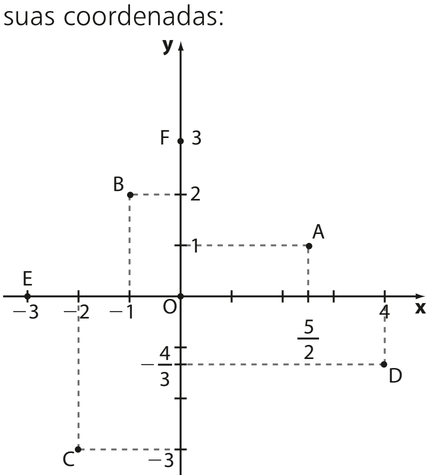
Os números reais **x** e **y** são as **coordenadas** de **P** e as indicamos na forma de **par ordenado** P(x, y).

O plano que contém as duas retas é o **plano cartesiano**.

O eixo horizontal (Ox) é o **eixo das abscissas**.

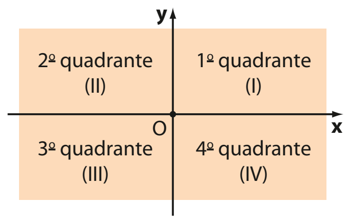
O eixo vertical (Oy) é o **eixo das ordenadas**.

Observe, no plano cartesiano seguinte, a representação dos pontos **A**, **B**, **C**, **D**, **E** e **F** por meio de suas coordenadas:



- $O(0, 0)$
- $A\left(\frac{5}{2}, 1\right)$
- $B(-1, 2)$
- $C(-2, -3)$
- $D\left(4, -\frac{4}{3}\right)$
- $E(-3, 0)$
- $F(0, 3)$

Cada uma das quatro partes em que fica dividido o plano pelos eixos cartesianos chama-se **quadrante**. A numeração dos quadrantes é feita no sentido anti-horário, a contar do quadrante correspondente aos pontos que possuem ambas as coordenadas positivas.

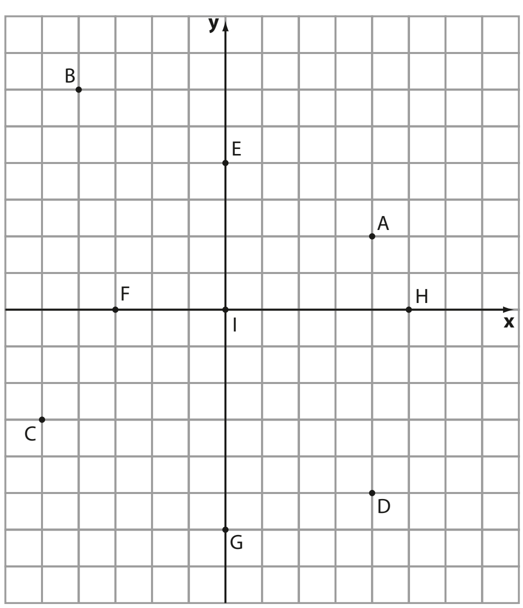


EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

35 Distribua em um plano cartesiano os pontos: A(3, 1); B(−4, 2); C(5, −3); D(−1, −1); E(2, 0); F(0, −2); G(0, 0); H(−4, 0); I(0, 4); $J\left(-\frac{3}{2}, -4\right)$; $K(\sqrt{2}, 2)$; $L\left(-2, \frac{5}{2}\right)$; $M\left(3, -\frac{7}{3}\right)$.

36 Forneça as coordenadas de cada ponto assinalado no plano cartesiano abaixo; o lado de cada quadradinho mede uma unidade.



37 Encontre **x** e **y** que determinam, em cada caso, a igualdade:

a) (x, y) = (2, −5)

b) (x + 4, y − 1) = (5, 3)

c) (x + y, x − 3y) = (3, 7)

38 Determine **m** para que $(m^2, m + 4) = (16, 0)$.

39 O ponto P(m − 3, 4) pertence ao eixo **y**. Qual é o valor de **m**?

40 O ponto $Q(-2, m^2 - 1)$ pertence ao eixo das abscissas. Qual é o valor de **m**?

41 Para cada item, represente em um plano cartesiano, o conjunto de pontos (x, y) tais que:

a) $y > 0$

b) $x \leqslant 0$

c) $x = y$

d) $x \cdot y < 0$

e) $y = 0$

f) $x = 0$ e $y \geqslant 0$

42 O ponto P(a, b) pertence ao 2º quadrante.

a) Quais são os sinais de **a** e de **b**?

b) A qual quadrante pertence o ponto Q(−a, b)?

43 O ponto R(−a, b) pertence ao 3º quadrante.

a) Quais são os sinais de **a** e de **b**?

b) A qual quadrante pertence o ponto S(a, b)?

Construção de gráficos

Como podemos construir o gráfico de uma função conhecendo a sua lei de correspondência y = f(x) e seu domínio **D**?

Se **D** é finito, pode-se proceder assim:

- 1º passo: construímos uma tabela na qual aparecem os valores de **x** pertencentes a **D** e os valores do correspondente **y**, calculados por meio da lei y = f(x);

- 2º passo: representamos cada par ordenado (a, b) da tabela por um ponto do plano cartesiano. O conjunto dos pontos obtidos constitui o gráfico da função.

EXEMPLO 14

Vejamos como construir o gráfico da função dada por $y = 2x$, com domínio $D = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

1º passo:

Construímos uma tabela:

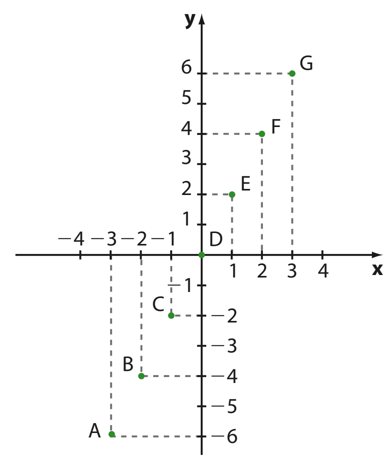
x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	−6	−4	−2	0	2	4	6

2º passo:

Representamos os pares ordenados que estão na tabela por pontos, a saber:

- A(−3, −6)
- B(−2, −4)
- C(−1, −2)
- D(0, 0)
- E(1, 2)
- F(2, 4)
- G(3, 6)

O gráfico da função é formado por esses 7 pontos.

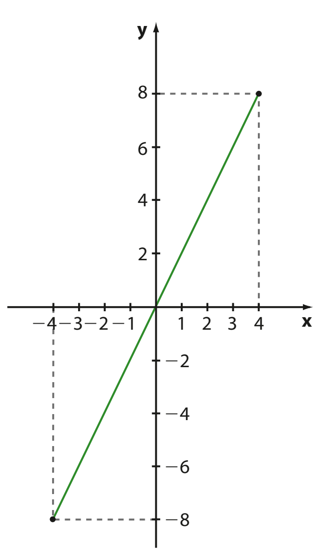


Se o conjunto **D** não é finito, podemos construir uma tabela e obter alguns pontos do gráfico; entretanto, o gráfico da função será constituído por infinitos pontos.

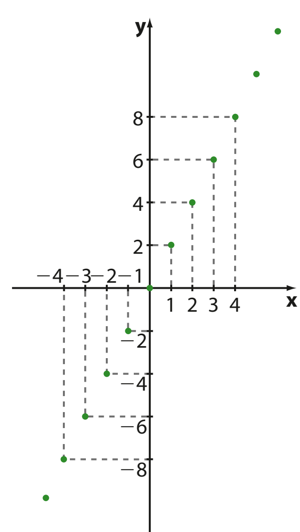
EXEMPLO 15

Veja como são os gráficos da função $y = 2x$ em domínios diferentes do exemplo anterior.

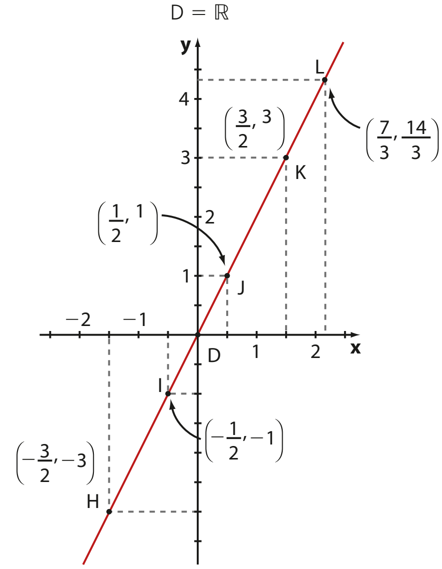
$D = [-4, 4]$



$D = \mathbb{Z}$



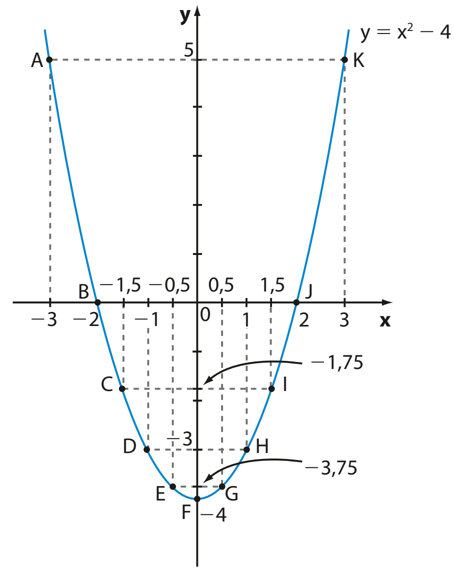
$D = \mathbb{R}$



EXEMPLO **16**

Vamos construir o gráfico da função dada por $y = x^2 - 4$ com domínio $\mathbb{R}$:

x	y	Ponto
−3	5	A
−2	0	B
−1,5	−1,75	C
−1	−3	D
−0,5	−3,75	E
0	−4	F
0,5	−3,75	G
1	−3	H
1,5	−1,75	I
2	0	J
3	5	K

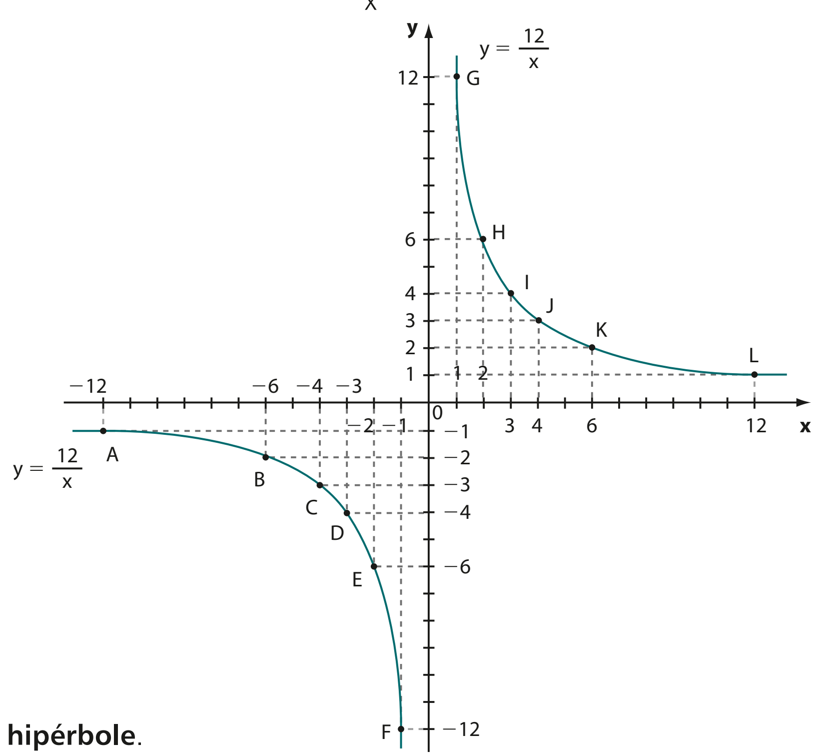


Essa curva é chamada **parábola** e será estudada com mais detalhes no capítulo 5.

EXEMPLO **17**

Vamos construir o gráfico da função dada por $y = \dfrac{12}{x}$ no domínio $\mathbb{R}^*$:

x	y	Ponto
−12	−1	A
−6	−2	B
−4	−3	C
−3	−4	D
−2	−6	E
−1	−12	F
1	12	G
2	6	H
3	4	I
4	3	J
6	2	K
12	1	L



Essa curva é chamada **hipérbole**.

O estudo completo da hipérbole não será feito neste volume da coleção; veja, como complemento, a seção *Um pouco mais sobre* do capítulo 4.

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

44 Construa os gráficos das funções f: $A \to B$, sendo $B \subset \mathbb{R}$, dadas pela lei $y = x + 1$ nos seguintes casos:

a) $A = \{0, 1, 2, 3\}$
b) $A = [0, 3]$
c) $A = \mathbb{Z}$
d) $A = \mathbb{R}$

45 Construa os gráficos das funções f: $A \to B$ com $B \subset \mathbb{R}$, dadas pela lei $y = -2x + 1$ nos seguintes casos:

a) $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
b) $A = [-2, 2[$
c) $A = \mathbb{R}$

46 Construa os gráficos das funções f: $A \to B$, com $B \subset \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^2$, nos seguintes casos:

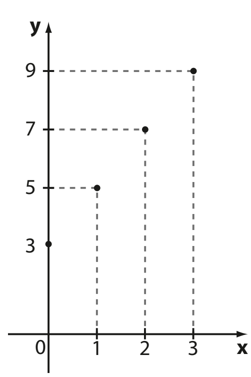
a) $A = \left\{-2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\right\}$
b) $A = [-2, 2[$
c) $A = \mathbb{R}$

47 Construa os gráficos das funções f: $A \to B$, sendo $B \subset \mathbb{R}$, dadas pela lei $y = 1 - x^2$ nos seguintes casos:

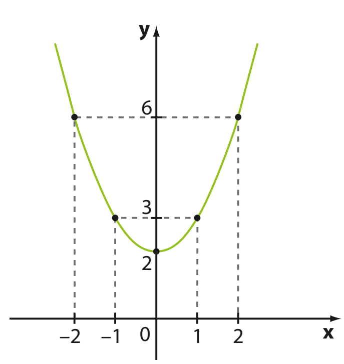
a) $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
b) $A = [-3, 3]$
c) $A = \mathbb{R}$

48 Construa o gráfico da função f: $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ dada por $y = \frac{1}{x}$.

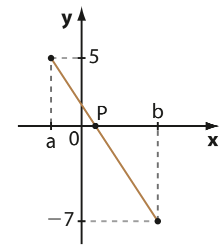
49 A função definida por $y = 2x + b$ tem domínio $D = \mathbb{N}$, e **b** é uma constante que pode ser determinada pela leitura do gráfico ao lado. Qual é o valor de **b**?



50 O gráfico seguinte representa a função **f**, de domínio real, cuja lei é $y = ax^2 + b$, com **a** e **b** constantes. Quais são os valores de **a** e de **b**?



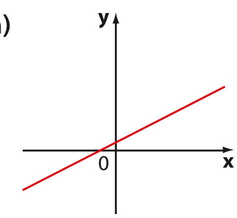
51 O gráfico seguinte representa a função f: $D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sendo $D = [a, b]$. Sabendo que $f(x) = -3x + 2$, determine:



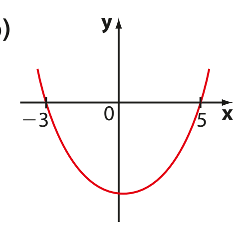
a) os valores de **a** e **b**;
b) a abscissa do ponto **P**.

52 Quais dos gráficos seguintes não representam função de domínio igual a $\mathbb{R}$? Explique.

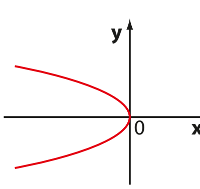
a)



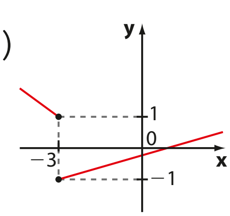
b)



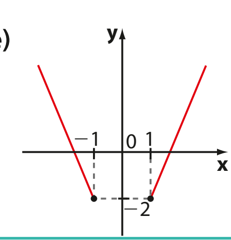
c)



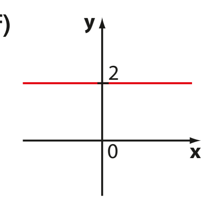
d)



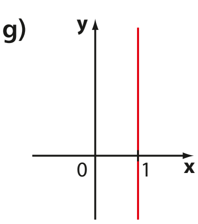
e)



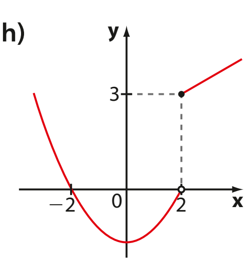
f)



g)



h)



Análise de gráficos

Muitas informações a respeito do comportamento de uma função podem ser obtidas a partir do seu gráfico. Por meio dele, podemos ter uma visão do crescimento (ou decrescimento) da função, dos valores máximos (ou mínimos) que ela assume, do seu conjunto imagem, de eventuais simetrias etc.

Agora vamos analisar os gráficos já apresentados e observar os comportamentos das respectivas funções.

EXEMPLO 18

Observe, ao lado, o gráfico da função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada por $y = 2x$.

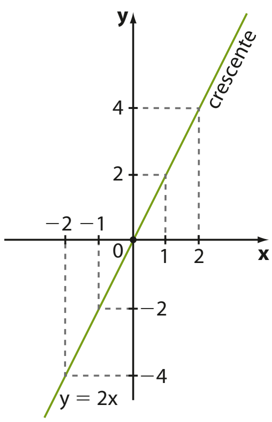
Já vimos que esse gráfico é uma reta.

Como a reta corta o eixo Ox no ponto $x = 0$, então $x = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow y = 2x = 2 \cdot 0 = 0$.

O valor de **x** que anula **y** é chamado **raiz** ou **zero** da função.

Note que, para $x > 0$, os pontos do gráfico estão acima do eixo Ox, portanto apresentam $y > 0$. Veja também que, para $x < 0$, os pontos do gráfico estão abaixo do eixo Ox, portanto apresentam $y < 0$.

Quanto maior o valor dado a **x**, maior será o valor do correspondente $y = 2x$. Dizemos, por isso, que essa função é **crescente**.



Observe que todo número real **y** é imagem de algum número real **x**. De fato, dado $y_0 \in \mathbb{R}$, o número real $\mathbf{x_0}$ cuja imagem é $\mathbf{y_0}$ é $x_0 = \frac{y_0}{2}$, pois $f(x_0) = 2 \cdot x_0 = 2 \cdot \frac{y_0}{2} = y_0$. Desse modo, o conjunto imagem de **f** é $Im = \mathbb{R}$.

Note também que $f(1) = 2$ e $f(-1) = -2$; $f(2) = 4$ e $f(-2) = -4$ etc.

De modo geral, se $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$ e $f(-x) = 2 \cdot (-x) = -2x$; portanto, $f(-x) = -f(x)$ para todo **x**. Isso faz com que o gráfico seja simétrico em relação ao ponto **O** (origem).

EXEMPLO 19

Observe, ao lado, o gráfico da função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada por $y = x^2 - 4$.

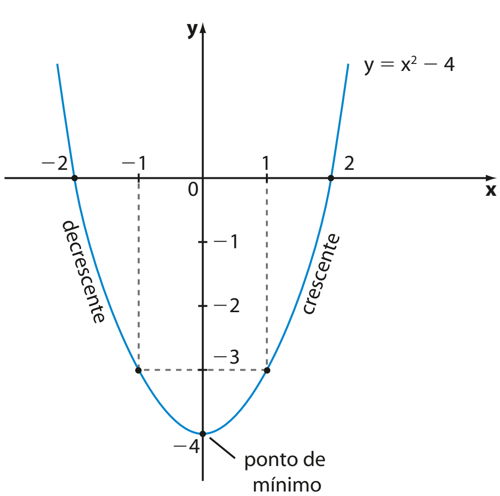
Já vimos que esse gráfico é uma parábola.

Como a parábola corta o eixo Ox nos pontos de abscissas 2 e −2, então:

$x = 2 \Rightarrow y = x^2 - 4 = 2^2 - 4 = 0$ e

$x = -2 \Rightarrow y = x^2 - 4 = (-2)^2 - 4 = 0$

−2 e 2 são as raízes dessa função.



Note que, para $x < -2$ ou $x > 2$, os pontos do gráfico estão acima do eixo Ox, portanto apresentam $y > 0$. Veja também que, para $-2 < x < 2$, os pontos do gráfico estão abaixo do eixo Ox, portanto apresentam $y < 0$.

Para $x > 0$, quanto maior o valor atribuído a **x**, maior será o valor do correspondente $y = x^2 - 4$.

Por outro lado, para $x < 0$, quanto maior o valor dado a **x**, menor será o valor do correspondente $y = x^2 - 4$.

Dizemos, então, que:

- para $x > 0$, essa função é crescente;
- para $x < 0$, essa função é decrescente.

Se $x = 0$, temos $y = -4$, e se $x \neq 0$, temos $y > -4$. Dizemos, por isso, que $(0, -4)$ é **ponto de mínimo** da função e -4 é o **valor mínimo** que a função assume. Assim, o conjunto imagem dessa função é $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -4\}$.

Note também que $f(1) = -3$ e $f(-1) = -3$; $f(2) = 0$ e $f(-2) = 0$ etc.

De modo geral, se $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4$ e $f(-x) = (-x)^2 - 4 = x^2 - 4$; portanto, $f(x) = f(-x)$ para todo **x**. Isso faz com que o gráfico seja simétrico em relação ao eixo **y**.

Conceitos

Analisando o gráfico de uma função **f** qualquer, podemos descobrir algumas propriedades notáveis. Vejamos:

O sinal da função

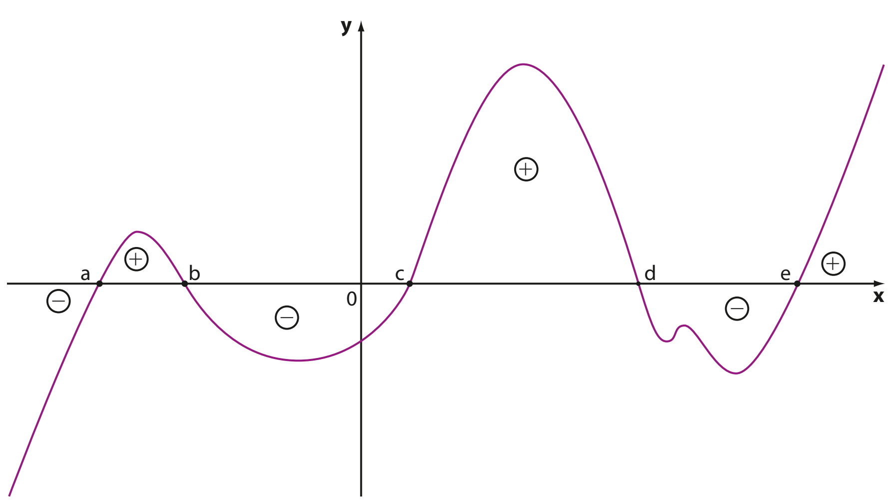
Os pontos de interseção do gráfico com o eixo Ox apresentam ordenadas $y = 0$, ou seja, suas abscissas $\mathbf{x_0}$ são tais que $f(x_0) = 0$. Essas abscissas $\mathbf{x_0}$ são os **zeros** ou **raízes** da função **f**.

Os pontos do gráfico situados acima do eixo Ox apresentam ordenadas $y > 0$, ou seja, suas abscissas $\mathbf{x_0}$ determinam $f(x_0) > 0$.

Já os pontos do gráfico situados abaixo do eixo Ox apresentam ordenadas $y < 0$, ou seja, suas abscissas $\mathbf{x_0}$ determinam $f(x_0) < 0$.

Note que o sinal de uma função refere-se ao sinal de **y**. Estudar o sinal de uma função significa determinar para quais valores de **x** tem-se $y > 0$ e para quais valores de **x** tem-se $y < 0$.

Observe:



Nesse gráfico, temos:

- $f(a) = 0$, $f(b) = 0$, $f(c) = 0$, $f(d) = 0$ e $f(e) = 0$ (**a**, **b**, **c**, **d** e **e** são raízes);
- o sinal de **f** é:

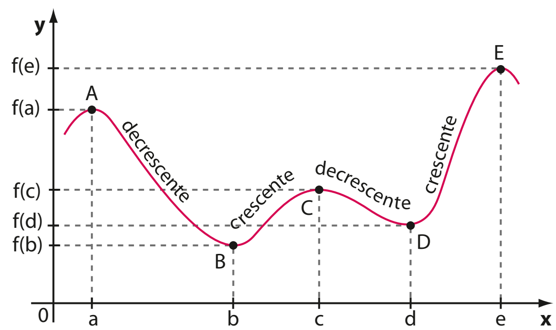
$$y > 0 \text{ para } a < x < b, \text{ para } c < x < d \text{ ou para } x > e;$$
$$y < 0 \text{ para } x < a, \text{ para } b < x < c \text{ ou para } d < x < e.$$

Crescimento/decrescimento

Se, para quaisquer valores $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$ de um subconjunto **S** (contido no domínio **D**), com $x_1 < x_2$, temos $f(x_1) < f(x_2)$, então **f** é crescente em **S**.

Se, para quaisquer valores $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$ de um subconjunto **S**, com $x_1 < x_2$, temos $f(x_1) > f(x_2)$, então **f** é decrescente em **S**.

Observe:



Máximos/mínimos

Seja **S** um subconjunto do domínio **D** e seja $x_0 \in S$.

Se, para todo **x** pertencente a **S**, temos $f(x) \geqslant f(x_0)$, então $(x_0, f(x_0))$ é o **ponto de mínimo** de **f** em **S**, e $f(x_0)$ é o **valor mínimo** de **f** em **S**.

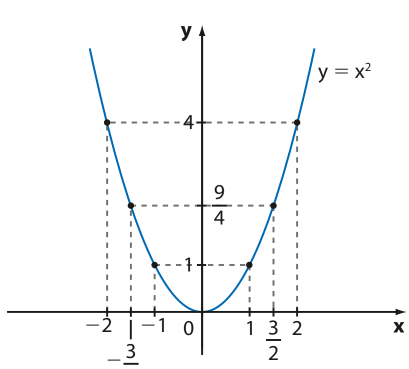
Se, para todo **x** pertencente a **S**, temos $f(x) \leqslant f(x_0)$, então $(x_0, f(x_0))$ é o **ponto de máximo** de **f** em **S**, e $f(x_0)$ é o **valor máximo** de **f** em **S**.

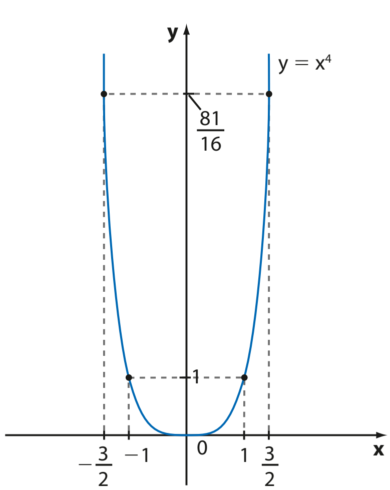
No gráfico anterior:

- considerando o intervalo $I = [a, c]$, temos que **B** é o ponto de mínimo de **f** em **I** e f(b) é o valor mínimo que a função assume em **I**;
- considerando o intervalo $J = [b, d]$, observamos que **C** é o ponto de máximo de **f** em **J** e f(c) é o valor máximo de **f** em **J**;
- quando consideramos o intervalo $K = [a, e]$, observamos que **B** é o ponto de mínimo de **f** em **K** e **E** é o ponto de máximo de **f** em **K**; os valores mínimo e máximo assumidos por **f** em **K** são, respectivamente, f(b) e f(e).

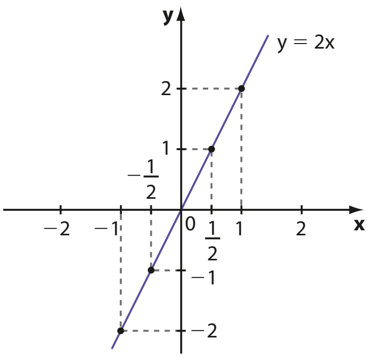
Simetrias

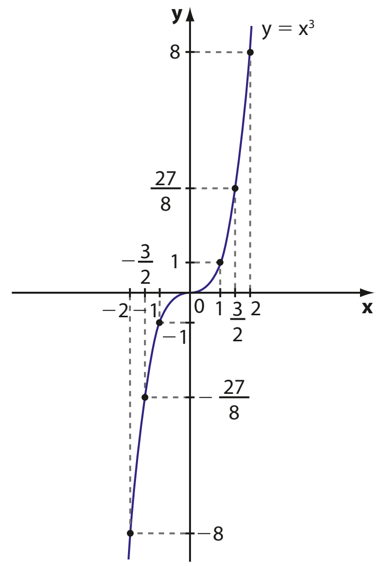
Se $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in D$, então **f** tem o gráfico simétrico em relação ao eixo **y**. Nesse caso, dizemos que **f** é uma **função par**.





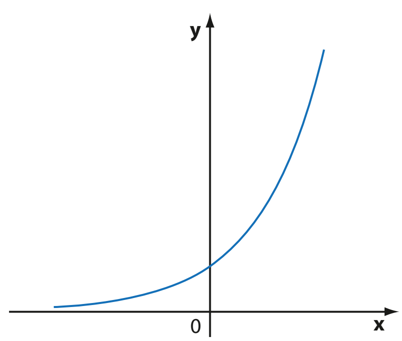
Se $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in D$, então **f** tem o gráfico simétrico em relação à origem. Nesse caso, dizemos que **f** é uma **função ímpar**.





OBSERVAÇÃO

Existem funções que não são classificadas em nenhuma dessas categorias (par e ímpar) e seus gráficos não apresentam nenhuma das simetrias citadas anteriormente. Veja, por exemplo, o gráfico de uma função **f** que não é par nem é ímpar, representado ao lado.



Veja o exemplo a seguir:

EXEMPLO 20

Seja $f: [-3, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função cujo gráfico está representado a seguir.

Observe que:

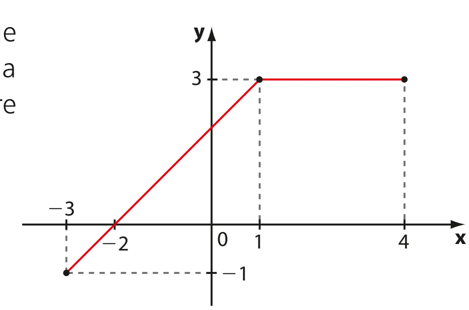
1º) se $-3 \leqslant x < 1$, **f** é crescente; se $1 \leqslant x \leqslant 4$, temos que $f(x) = 3$; dizemos que, nesse intervalo, **f** é **constante**, pois a imagem de qualquer **x** pertencente a esse intervalo é sempre igual a 3;

2º) **f** admite -2 como raiz;

3º) o sinal de **f** é: $\begin{cases} y > 0, \text{ se } -2 < x \leqslant 4 \\ y < 0, \text{ se } -3 \leqslant x < -2 \end{cases}$;

4º) o conjunto imagem de **f** é $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant y \leqslant 3\}$;

5º) **f** não é par nem ímpar.

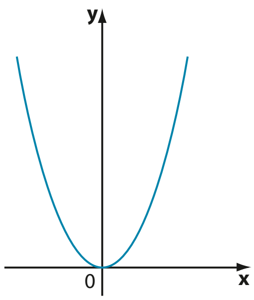


EXERCÍCIOS

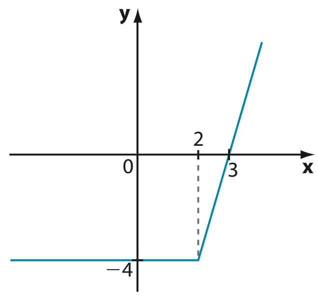
FAÇA NO CADERNO

53 Em cada caso, o gráfico representa uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Especifique os intervalos em que a função é crescente, decrescente ou constante:

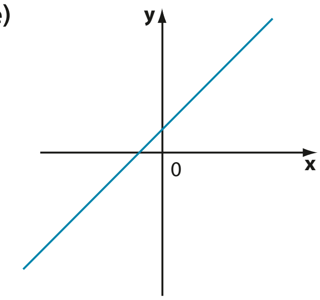
a)



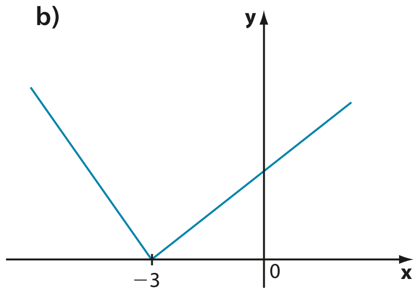
c)



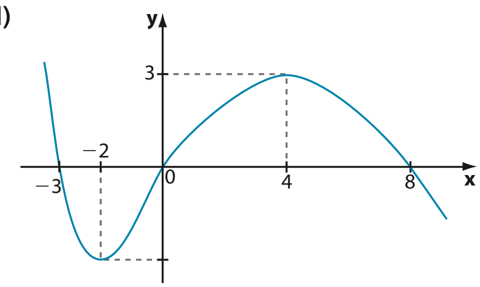
e)



b)

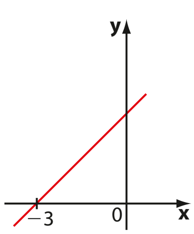


d)

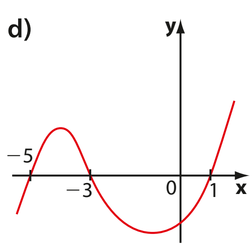


54 Estude o sinal de cada uma das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ cujos gráficos estão representados a seguir e forneça também a(s) raiz(es), se houver.

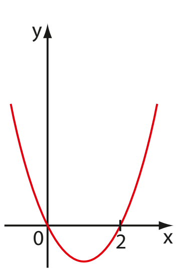
a)



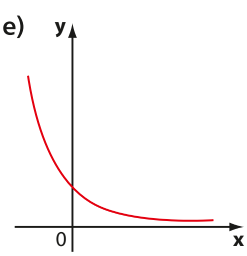
d)



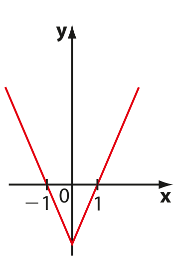
b)



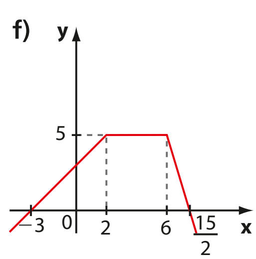
e)



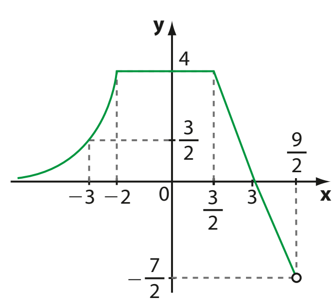
c)



f)



55 O gráfico abaixo representa uma função $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com $D = \left]-\infty, \frac{9}{2}\right[$.



Determine:

a) os valores de f(–1), f(0), f(–3) e f(3);

b) os intervalos em que **f** é crescente;

c) os intervalos em que **f** é decrescente;

d) o sinal de **f**;

e) o conjunto imagem de **f**;

f) a(s) raiz(es) de **f**.

56 Em cada item é dada uma condição sobre uma função de domínio real. Faça um gráfico possível de uma função que verifique tal condição.

a) **f** é sempre decrescente.

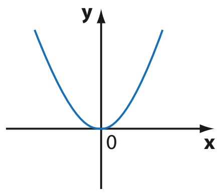
b) **f** é crescente se $x > 2$ e decrescente se $x < 2$.

c) **f** é constante se $x < 1$ e decrescente se $x > 1$.

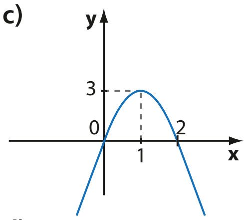
d) **f** é crescente se $x < 1$, decrescente se $x > 1$ e o sinal de **f** é $y < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

57 Determine, em cada caso, o conjunto imagem das funções de domínio real cujos gráficos estão a seguir representados:

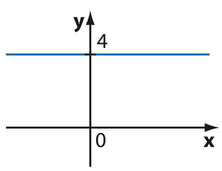
a)



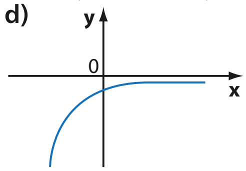
c)



b)

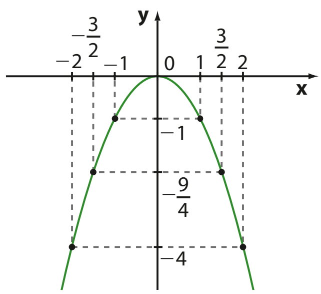


d)

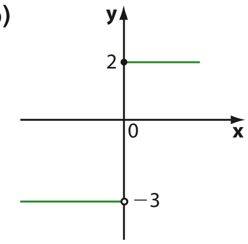


58 Indique **P** para a função par, **I** para função ímpar e **O** para função que não é par nem ímpar:

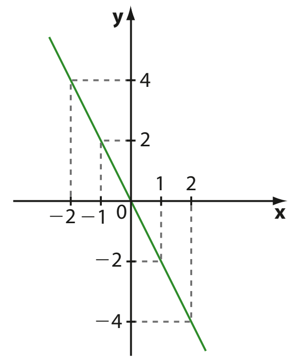
a)



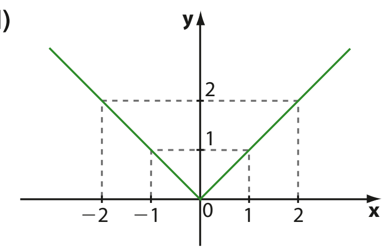
b)



c)

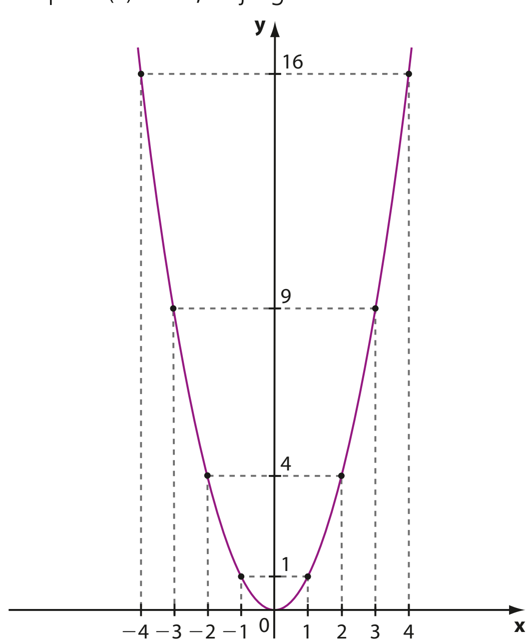


d)



Taxa média de variação de uma função

Seja f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = x^2$, cujo gráfico está abaixo representado:



Vamos analisar de que maneira, em um determinado intervalo, os valores da imagem (isto é, da variável **y**) variam à medida que variam os valores do domínio (isto é, da variável **x**). Em outras palavras, à medida que **x** varia de $\mathbf{x}_1$ até $\mathbf{x}_2$, analisaremos como se dá a variação das imagens de $f(x_1)$ a $f(x_2)$.

Acompanhe a tabela seguinte, considerando inicialmente o intervalo em que **f** é crescente, isto é, $x \geq 0$:

	x_1	x_2	Δx: variação de x $\Delta x = x_2 - x_1$	$y_1 = f(x_1)$	$y_2 = f(x_2)$	Δy: variação de y $\Delta y = y_2 - y_1$
(I)	0	1	$\Delta x = 1 - 0 = 1$	0	1	$\Delta y = 1 - 0 = 1$
(II)	1	2	$\Delta x = 2 - 1 = 1$	1	4	$\Delta y = 4 - 1 = 3$
(III)	2	3	$\Delta x = 3 - 2 = 1$	4	9	$\Delta y = 9 - 4 = 5$
(IV)	3	4	$\Delta x = 4 - 3 = 1$	9	16	$\Delta y = 16 - 9 = 7$

Nos itens (I), (II), (III) e (IV), à medida que **x** aumenta uma unidade, os valores de **y** aumentam 1, 3, 5 e 7 unidades, respectivamente.

Observe o sinal (positivo) de Δy.

Podemos perceber que o "ritmo" de variação de **y** em relação à variação de **x** difere de acordo com os pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) considerados.

Considerando agora o intervalo em que **f** é decrescente ($x \leq 0$), montamos a tabela:

	x_1	x_2	$\Delta x = x_2 - x_1$	$y_1 = f(x_1)$	$y_2 = f(x_2)$	$\Delta y = y_2 - y_1$
(V)	-4	-3	$\Delta x = 1$	16	9	$\Delta y = 9 - 16 = -7$
(VI)	-3	-2	$\Delta x = 1$	9	4	$\Delta y = 4 - 9 = -5$
(VII)	-2	-1	$\Delta x = 1$	4	1	$\Delta y = 1 - 4 = -3$
(VIII)	-1	0	$\Delta x = 1$	1	0	$\Delta y = 0 - 1 = -1$

Nos itens (V), (VI), (VII) e (VIII), à medida que **x** aumenta uma unidade, os valores de **y** diminuem 7, 5, 3 e 1 unidade, respectivamente.

Observe o sinal (negativo) de Δy.

Veja a seguinte definição:

Seja **f** uma função definida por $y = f(x)$; sejam $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$ dois valores do domínio de **f**, $(x_1 \neq x_2)$, cujas imagens são, respectivamente, $f(x_1)$ e $f(x_2)$.

O quociente $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ recebe o nome de **taxa média de variação da função f**, para **x** variando de $\mathbf{x_1}$ até $\mathbf{x_2}$.

OBSERVAÇÕES

- A taxa média de variação depende dos pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) tomados.
- Note que
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{-[f(x_1) - f(x_2)]}{-(x_1 - x_2)} = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$
Desse modo, verificamos que é indiferente escolher o sentido em que calculamos a variação (de $\mathbf{x_1}$ para $\mathbf{x_2}$ ou de $\mathbf{x_2}$ para $\mathbf{x_1}$), desde que mantenhamos o mesmo sentido no numerador e no denominador.

Vamos retomar a função $f(x) = x^2$ apresentada na página anterior e calcular a taxa média de variação de **f**, para **x** variando de:

a) 0 a 1

$$\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{1 - 0}{1} = 1$$

b) 2 a 3

$$\frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{9 - 4}{1} = 5$$

c) 1 a 3

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{9 - 1}{2} = 4$$

d) 3 a 1

$$\frac{f(1) - f(3)}{1 - 3} = \frac{1 - 9}{-2} = \frac{-8}{-2} = 4$$

Observe que as taxas médias de variação calculadas nos itens *c* e *d* coincidem, como mostra a observação anterior.

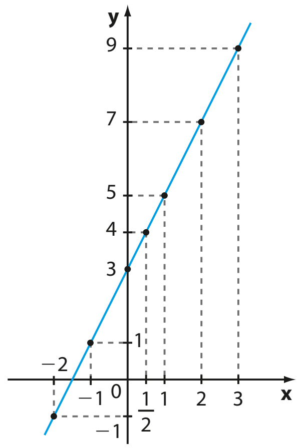
e) -4 a -1

$$\frac{f(-1) - f(-4)}{-1 - (-4)} = \frac{1 - 16}{3} = \frac{-15}{3} = -5$$

Veja outros exemplos:

EXEMPLO 21

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = 2x + 3$ cujo gráfico está representado ao lado. Vamos calcular a taxa média de variação de **f** para **x** variando de:



a) −2 a 0

$$\begin{cases} f(-2) = -1 \\ f(0) = 3 \end{cases} \Rightarrow \frac{f(0) - f(-2)}{0 - (-2)} = \frac{3 - (-1)}{2} = 2$$

b) $\frac{1}{2}$ a 3

$$\begin{cases} f\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \\ f(3) = 9 \end{cases} \Rightarrow \frac{f(3) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{3 - \frac{1}{2}} = \frac{9 - 4}{\frac{5}{2}} = \frac{5}{\frac{5}{2}} = 2$$

c) −1 a 1

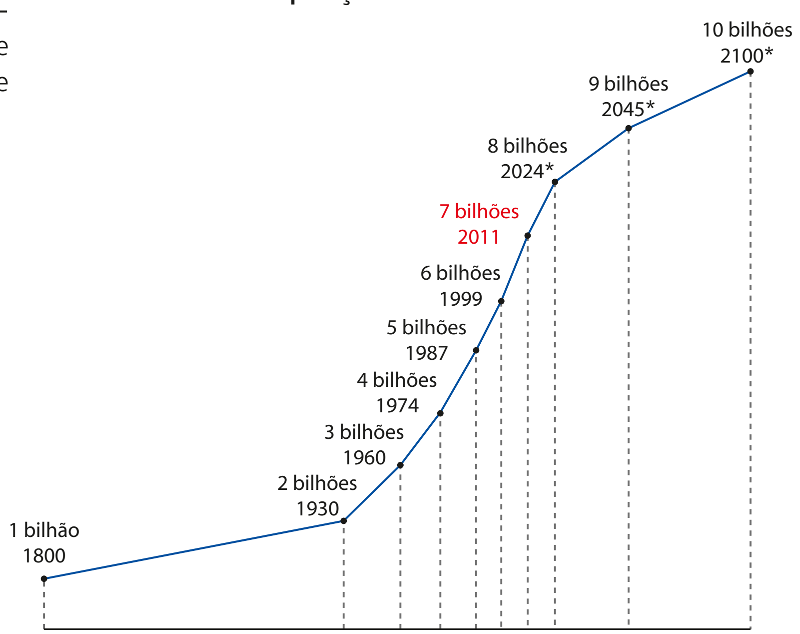
$$\begin{cases} f(1) = 5 \\ f(-1) = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{5 - 1}{2} = 2$$

Observe, nesse exemplo, que o valor encontrado para a taxa média de variação da função **f** é o mesmo, independente dos pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) considerados. No capítulo seguinte, veremos que se trata de uma propriedade particular das funções polinomiais do 1º grau.

EXEMPLO 22

O gráfico ao lado mostra a evolução da população mundial no decorrer do tempo e sua projeção para o fim deste século (até o ano de 2100).

População mundial



* Projeção segundo a qual, em 2100, a população estabiliza ou cai um pouco.

Fonte: Revista *Veja*, edição 2241, 2 nov. 2011, p. 124-125.

Vamos calcular inicialmente a taxa média de variação da população, em pessoas/ano, de 1800 a 2011:

$$\frac{7\,000\,000\,000 - 1\,000\,000\,000}{2011 - 1800} = \frac{6\,000\,000\,000}{211} \simeq 28\,436\,019 \simeq 28{,}44 \text{ milhões}$$

A taxa média encontrada não significa, obrigatoriamente, que a população mundial aumentou 28,44 milhões de pessoas por ano no período considerado. Há períodos em que a população cresceu mais devagar (por exemplo, de 1800 a 1930) e períodos em que a população cresceu mais rápido (de 1999 a 2011, por exemplo). Quando analisamos globalmente, todas as variações ocorridas equivalem, em média, a um aumento de 28,44 milhões de pessoas por ano.

A seguir, vamos comparar o ritmo de crescimento da população em três períodos:

- 1º período: de 1800 a 1930

  A taxa média de variação, em pessoas/ano, é:

  $$\frac{2\,000\,000\,000 - 1\,000\,000\,000}{1930 - 1800} = \frac{1\,000\,000\,000}{130} \simeq 7\,692\,308 \simeq 7{,}69 \text{ milhões}$$

  Dizemos que a população mundial aumentou, no período considerado (1800 a 1930), em média, 7,69 milhões de pessoas/ano (valem as ressalvas feitas para o período anterior).

- 2º período: de 1987 a 2011

  A taxa média de variação, em pessoas/ano, é:

  $$\frac{7\,000\,000\,000 - 5\,000\,000\,000}{2011 - 1987} = \frac{2\,000\,000\,000}{24} \simeq 83\,333\,334 \simeq 83{,}3 \text{ milhões}$$

  Observe que esse ritmo de aumento é quase 11 vezes o ritmo de aumento da população humana registrado no 1º período, de 1800 a 1930.

- 3º período: de 2045 a 2100 (projeções)

  A taxa média de variação, em pessoas/ano, é:

  $$\frac{10\,000\,000\,000 - 9\,000\,000\,000}{2100 - 2045} = \frac{1\,000\,000\,000}{55} \simeq 18\,181\,818 \simeq 18{,}2 \text{ milhões}$$

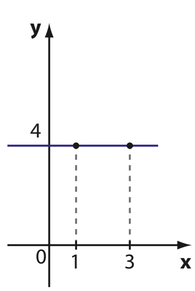
  Esse valor indica uma tendência de desaceleração do crescimento populacional até o final deste século. Observe que esse valor é pouco maior que a quinta parte da taxa calculada no 2º período.

EXERCÍCIOS

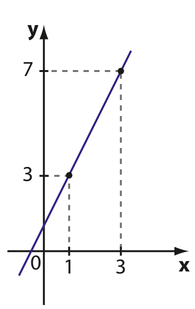
FAÇA NO CADERNO

59 Em cada caso, calcule a taxa média de variação da função cujo gráfico está representado, quando **x** varia de 1 a 3:

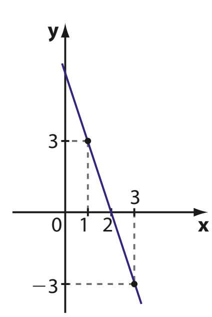
a)



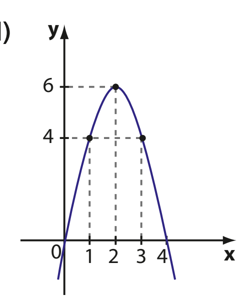
b)



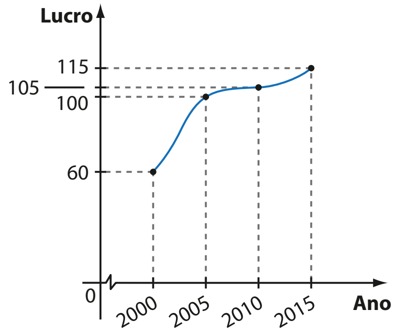
c)



d)



60 O gráfico mostra o lucro (em milhares de reais) de uma pequena empresa, de 2000 a 2015:



Compare o ritmo de crescimento do lucro da empresa, calculando a taxa média de variação do lucro nos 5 primeiros e nos 5 últimos anos do período considerado.

61 Em cada item, calcule a taxa média de variação da função dada quando **x** varia de 1 a 4:

a) f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2^x$.

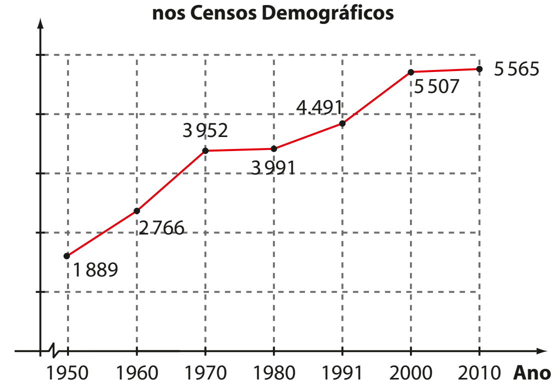
b) g: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = 4x$.

c) h: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = -\frac{1}{2}x^2$.

d) i: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $i(x) = -3x + 5$.

62 O gráfico mostra a evolução da quantidade de municípios no Brasil de 1950 a 2010 (datas dos Censos Demográficos).

Número de municípios existentes nos Censos Demográficos



Fonte: IBGE. Censo demográfico 1950/2010. Disponível em: <seriesestatisticas.ibge.gov.br/series.aspx?no=10&op=0&vcodigo=CD96&t=numero-municipios-existentes-censos-demograficos>. Acesso em: 4 mar. 2016.

a) Para a função representada pelo gráfico, determine a taxa média de variação de:

i) 1960 a 1970

ii) 1970 a 1980

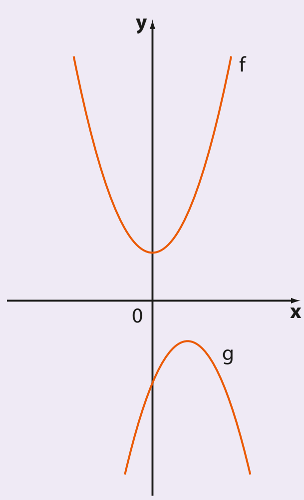
iii) 1950 a 2010

b) Entre quais censos: 1960-1970 ou 1991-2000 o número de municípios no Brasil cresceu mais rápido?

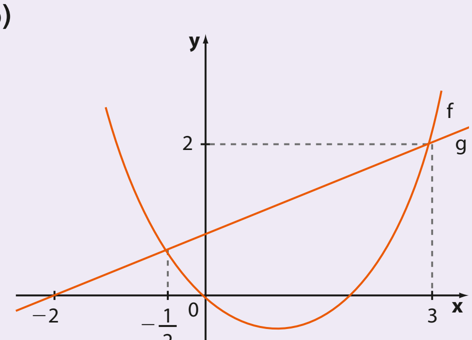
DESAFIO

Sejam **f** e **g** funções cujo domínio é $\mathbb{R}$. Para cada $x \in \mathbb{R}$, define-se a função **h** pela lei $h(x) = \sqrt{f(x) - g(x)}$. Obtenha, em cada caso, o domínio da função **h**, sendo dados os gráficos das funções **f** e **g**:

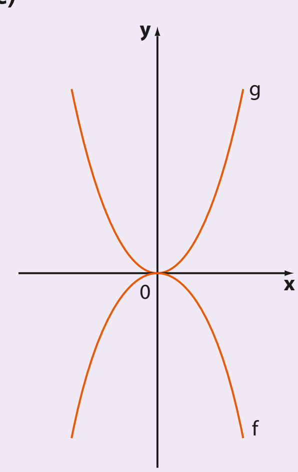
a)



b)



c)



Aplicações

A velocidade escalar média e a aceleração escalar média

1ª situação:

Viajando em um ônibus para a praia, Cléber observou que exatamente às 10 h o ônibus passou pelo km 56 da rodovia; às 11 h 30 min, o ônibus passava pelo km 191 da mesma rodovia.

Observe que, nesse período de 1,5 h (11,5 h − 10 h), a variação da posição ocupada pelo ônibus é 191 km − 56 km = 135 km.

A razão $\dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{(191 - 56)\text{ km}}{(11{,}5 - 10)\text{ h}} = \dfrac{135\text{ km}}{1{,}5\text{ h}} =$ $= 90$ km/h representa a taxa média de variação da posição ou variação do espaço (Δs) em relação ao intervalo de tempo (Δt) da viagem.

Esse quociente é a conhecida **velocidade escalar média**. Isso não significa, necessariamente, que o ônibus manteve a velocidade de 90 km/h em todo o percurso. Em alguns trechos ele pode ter ido mais rápido ou mais devagar. O valor da velocidade escalar média nos dá apenas uma ideia global sobre o movimento do ônibus nesse período.

2ª situação:

Um carro está viajando em uma via expressa. Em um certo momento, quando o velocímetro apontava a velocidade de 72 km/h, o motorista aciona os freios ao observar um congestionamento à sua frente. Em 4 s de frenagem, o veículo diminui uniformemente a velocidade até parar.

Vamos calcular a taxa média de variação da velocidade, considerando o intervalo de tempo decorrido do instante em que o motorista aciona os freios até a parada:

$$v_1 = 72\text{ km/h} = \frac{72\,000\text{ m}}{3\,600\text{ s}} = 20\text{ m/s}$$

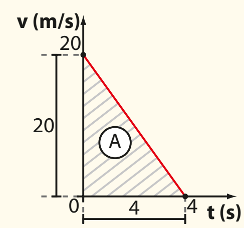
$v_2 = 0$ km/h ou 0 m/s (parada do veículo após 4 segundos)

A taxa é:

$$\frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{0 - 20}{4 - 0} = -5\text{ m/s}^2$$

Isso significa que a velocidade do carro variou (diminuiu – veja o sinal negativo obtido), em média, 5 m/s a cada segundo. Esse quociente representa a taxa média de variação da velocidade em relação ao tempo e é conhecido como **aceleração escalar média**.

Podemos avaliar a distância percorrida pelo carro durante a frenagem até parar com base no gráfico ao lado, da velocidade (**v**) × tempo (**t**).



Nas aulas de Física você verá que a distância percorrida é numericamente igual à área **A**, destacada no gráfico.

Como $A_{\triangle} = \dfrac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \dfrac{20 \cdot 4}{2} = 40$, a distância percorrida foi 40 m.

Porém, precisamos ter em mente que, entre o motorista notar o congestionamento e acionar os freios, existe um intervalo de tempo correspondente à transmissão do impulso nervoso entre a parte receptora (olho, que vê um obstáculo) e a parte do corpo correspondente à ação (pés, que acionam os freios): é o chamado **tempo de reação**. Supondo que esse tempo seja igual a 1 segundo, podemos estimar que a distância percorrida pelo carro, do momento em que o motorista vê o congestionamento até a parada, é composta pelos 40 metros com os freios acionados mais a distância percorrida ao longo do tempo de reação, dada por:

$$20\text{ m/s} \cdot 1\text{ s} = 20\text{ m}$$

Assim, a distância total passa para 60 m (50% maior que no caso anterior). Por isso é importante que o motorista não exceda os limites de velocidade e que mantenha uma distância segura do veículo à sua frente.

Fontes de pesquisa:
TAOKA, G. T. *Tempo de reação para frenagem de motoristas não alertados*. (Trad.) LEHFELD, Gilberto Monteiro. Disponível em: <www.cetsp.com.br/media/20608/nt148.pdf>. Acesso em: 4 mar. 2016; DETRAN-PR. *Comportamentos seguros no trânsito*. Disponível em: <www.detran.pr.gov.br/modules/catasg/servicos-detalhes.php?tema=motorista&id=345>. Acesso em: 4 mar. 2016.