CAPÍTULO 4

Função afim

Introdução

Antes de apresentarmos o conceito de função afim, vejamos alguns exemplos envolvendo questões do dia a dia.

EXEMPLO 1

Antônio Carlos pegou um táxi para ir à casa de sua namorada, que fica a 15 km de distância.

O valor cobrado engloba o preço da parcela fixa (bandeirada) de R$ 4,00 mais R$ 2,20 por quilômetro rodado (não estamos considerando aqui o tempo em que o táxi ficaria parado em um eventual congestionamento).

Ou seja, ele pagou 15 · R$ 2,20 = R$ 33,00 pela distância percorrida mais R$ 4,00 pela bandeirada; isto é:

$$\text{R\$ } 33{,}00 + \text{R\$ } 4{,}00 = \text{R\$ } 37{,}00$$

Se a casa da namorada ficasse a 25 km de distância, Antônio Carlos pagaria, pela corrida:

$$25 \cdot \text{R\$ } 2{,}20 + \text{R\$ } 4{,}00 = \text{R\$ } 59{,}00.$$

Podemos notar que, para cada distância **x** percorrida pelo táxi, há certo preço **p** para a corrida.

Nesse caso, a fórmula que expressa **p** (em reais) em função de **x** (em quilômetros) é:

$$p(x) = 2{,}20 \cdot x + 4{,}00$$

que é um exemplo de **função polinomial do 1º grau** ou **função afim**.

EXEMPLO 2

Um corretor de imóveis recebe mensalmente da empresa em que trabalha um salário composto de duas partes:

- uma ajuda de custo de R$ 700,00;
- uma parte variável, que corresponde a um adicional de 2% sobre o valor das vendas realizadas no mês.

Em certo mês, as vendas somaram R$ 300 000,00.

Para calcular quanto o corretor recebeu de salário, fazemos:

$$700 + 2\% \cdot 300000 = 700 + \frac{2}{100} \cdot 300\,000 = 700 + 6\,000 = 6\,700$$

Salário: R$ 6700,00

Em outro mês, as vendas somaram apenas R$ 80000,00. Nesse mês o corretor recebeu:

$$700 + 2\% \cdot 80000 = 700 + 1\,600 = 2300$$

Salário: R$ 2300,00

Observamos que, para cada total **x** de vendas no mês, há um certo salário **s** pago ao corretor.

Nesse caso, a fórmula que expressa **s** em função de **x** é:

$$s(x) = 700 + 0{,}02 \cdot x$$

que é um exemplo de função afim.

EXEMPLO 3

Restaurantes *self-service* podem ser encontrados em todas as regiões do Brasil. Em um deles, cobra-se R$ 3,80 por cada 100 g de comida. Dois amigos serviram-se, nesse restaurante, de 620 g e 410 g. Vamos calcular quanto cada um pagou.

Inicialmente, observe que R$ 3,80 por 100 g equivale a R$ 38,00 por quilograma. Assim, podemos calcular quanto cada amigo pagou. Quem se serviu de 620 g = 0,62 kg, pagou $0,62 \cdot 38 = 23,56$ reais; o outro amigo pagou $0,41 \cdot 38 = 15,58$ reais.

O valor (**y**) pago, em reais, varia de acordo com a quantidade de comida (**x**), em quilogramas. A lei que relaciona **y** e **x**, nesse caso, é: $y = 38 \cdot x$, que é outro exemplo de função polinomial do 1º grau.


ANA DRUZIAN/FOTOARENA

Chama-se **função polinomial do 1º grau**, ou **função afim**, qualquer função **f** de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada por uma lei da forma $f(x) = ax + b$, em que **a** e **b** são números reais dados e $a \neq 0$.

Na lei $f(x) = ax + b$, o número **a** é chamado **coeficiente** de **x**, e o número **b** é chamado **termo constante** ou **independente**.

Veja os exemplos a seguir.

- $f(x) = 5x - 3$, em que $a = 5$ e $b = -3$.
- $f(x) = -2x - 7$, em que $a = -2$ e $b = -7$.
- $f(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{5}$, em que $a = \frac{1}{3}$ e $b = \frac{2}{5}$.
- $f(x) = 11x$, em que $a = 11$ e $b = 0$.
- $y = -x + 3$, em que $a = -1$ e $b = 3$.
- $y = -2,5x + 1$, em que $a = -2,5$ e $b = 1$.

Função linear

Um caso particular de função afim é aquele em que $b = 0$. Nesse caso, temos a função afim **f** de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada pela lei $f(x) = ax$ com **a** real e $a \neq 0$, que recebe a denominação especial de **função linear**.

Exemplos:

- $f(x) = 3x$, em que $a = 3$ e $b = 0$.
- $f(x) = -4x$, em que $a = -4$ e $b = 0$.
- $f(x) = x$, em que $a = 1$ e $b = 0$. Nesse caso a função **f** recebe o nome de **função identidade**.

Veja, na página 77, um texto que relaciona grandezas proporcionais com funções lineares.

Gráfico

O gráfico de uma função polinomial do 1º grau, f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $y = ax + b$, com $a \neq 0$, é uma reta oblíqua aos eixos Ox e Oy (isto é, é uma reta não paralela a nenhum dos eixos coordenados).

Demonstração:

Tomemos três pontos distintos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$ pertencentes ao gráfico dessa função. Vamos mostrar que **A**, **B** e **C** estão alinhados, isto é, pertencem a uma mesma reta.

Como **A**, **B** e **C** são pontos do gráfico da função, suas coordenadas satisfazem a lei $y = ax + b$, com **a** e **b** reais e $a \neq 0$. Temos:

$$\begin{cases} y_1 = a \cdot x_1 + b & (1) \\ y_2 = a \cdot x_2 + b & (2) \\ y_3 = a \cdot x_3 + b & (3) \end{cases}$$

Subtraindo membro a membro, (2) de (3), encontramos:

$$y_3 - y_2 = a(x_3 - x_2)$$

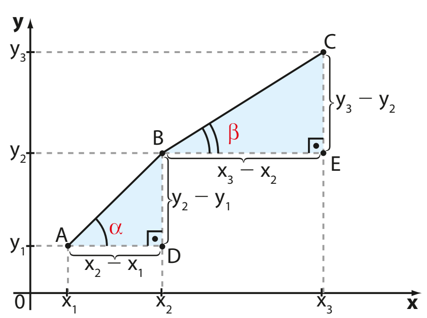
Subtraindo (1) de (2), obtemos:

$$y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1)$$

Daí, temos:

$$\frac{y_3 - y_2}{y_2 - y_1} = \frac{x_3 - x_2}{x_2 - x_1} \quad (4)$$

Vamos supor, por absurdo, que **A**, **B** e **C** não pertencessem a uma mesma reta, como mostra a figura:



Observemos os triângulos ABD e BCE, que são retângulos ($\hat{D} = \hat{E} = 90°$) e têm lados proporcionais, pois, de acordo com (4), temos:

$$\frac{EC}{DB} = \frac{BE}{AD}$$

Nesse caso, os triângulos ABD e BCE seriam semelhantes e, portanto, seus ângulos correspondentes seriam congruentes, de onde se concluiria que $\alpha = \beta$, o que não poderia ocorrer.

A contradição vem do fato de supormos que **A**, **B** e **C** não pertencem a uma mesma reta.

Assim, **A**, **B** e **C** estão alinhados, isto é, pertencem a uma mesma reta.

Desse modo, está provado que o gráfico de uma função polinomial do 1º grau é uma reta.

OBSERVAÇÃO

Provada essa propriedade, podemos, de agora em diante, construir o gráfico de uma função afim utilizando apenas dois de seus pontos, pois, como sabemos da Geometria, dados dois pontos distintos existe uma única reta passando por eles.

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

1 Construa o gráfico da função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $y = 3x - 1$.

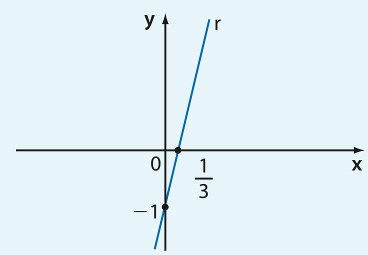
Solução:

Basta obter dois de seus pontos e ligá-los com o auxílio de uma régua:

- Para $x = 0$, temos $y = 3 \cdot 0 - 1 = -1$; portanto, um ponto é $(0, -1)$.
- Para $y = 0$, temos $0 = 3x - 1$; portanto, $x = \frac{1}{3}$ e o outro ponto é $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$.

Marcamos os pontos $(0, -1)$ e $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ no plano cartesiano e ligamos os dois com a reta **r**.

x	y
0	-1
$\frac{1}{3}$	0



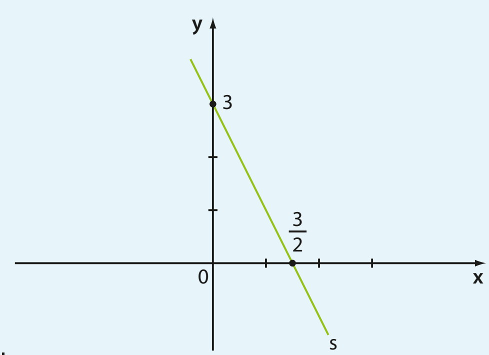
A lei $y = 3x - 1$ é também chamada **equação da reta r**.

2 Construa o gráfico da função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada por $y = -2x + 3$.

Solução:

- Para $x = 0$, temos $y = -2 \cdot 0 + 3 = 3$; portanto, um ponto é $(0, 3)$.
- Para $y = 0$, temos $0 = -2x + 3$; portanto, $x = \frac{3}{2}$ e o outro ponto é $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$.

x	y
0	3
$\frac{3}{2}$	0



A lei $y = -2x + 3$ é também chamada **equação da reta s**.

3 Obtenha a equação da reta que passa pelos pontos $P(-1, 3)$ e $Q(1, 1)$.

Solução:

A reta $\overleftrightarrow{PQ}$ tem equação $y = a \cdot x + b$. Precisamos determinar os valores de **a** e **b**.

Como $(-1, 3)$ pertence à reta, temos:

$$3 = a \cdot (-1) + b, \text{ ou seja, } -a + b = 3$$

Como $(1, 1)$ pertence à reta, temos:

$$1 = a \cdot 1 + b, \text{ ou seja, } a + b = 1$$

Assim, **a** e **b** satisfazem o sistema:

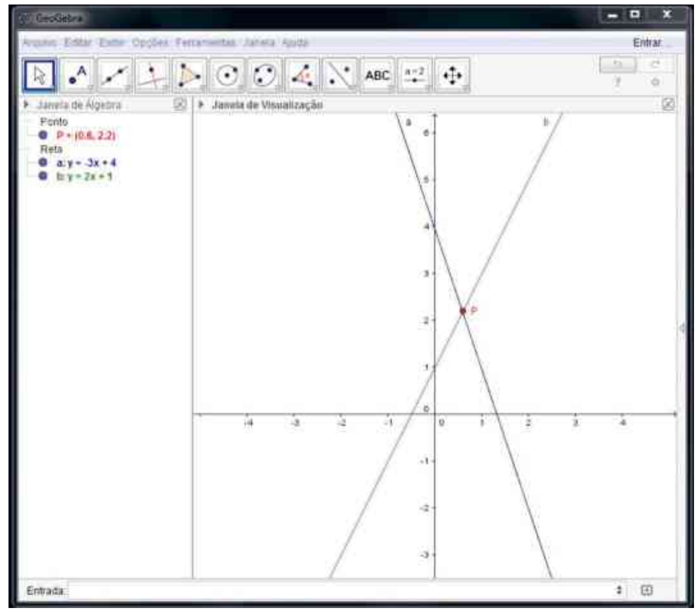
$$\begin{cases} -a + b = 3 \\ a + b = 1 \end{cases}$$

cuja solução é $a = -1$ e $b = 2$. Portanto, a equação procurada é $y = -x + 2$.

Interseção de retas

O ponto $P(x_0, y_0)$ de interseção de duas retas concorrentes pertence, naturalmente, a cada uma das retas. Por esse motivo, suas coordenadas devem satisfazer, simultaneamente, às leis das funções afim que representam tais retas.

No gráfico ao lado podemos ver as retas **a** e **b** que representam as funções $y = -3x + 4$ e $y = 2x + 1$, respectivamente. O gráfico foi feito em um *software* livre de Matemática chamado GeoGebra.



GEOGEBRA

Assim, a solução do sistema formado pelas duas leis $\begin{cases} y = -3x + 4 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$ fornece as coordenadas (x_0, y_0) de **P**.

Igualando, temos:

$$-3x + 4 = 2x + 1 \Rightarrow x = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

Substituindo esse valor de **x** em qualquer uma das equações, obtemos $y = \frac{11}{5} = 2{,}2$. Assim, $P\left(\frac{3}{5}, \frac{11}{5}\right)$.

PENSE NISTO:

É possível que um sistema formado pelas leis de duas funções afins não tenha solução? Qual é a interpretação geométrica nesse caso?

Função constante

Vimos que a função afim **f** é uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada pela lei $y = ax + b$, com $a \neq 0$.

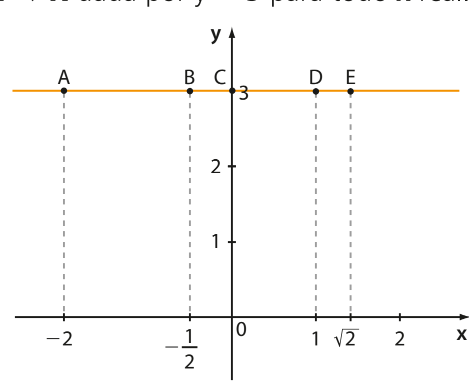
Se em $y = ax + b$ temos $a = 0$, a lei não define uma função afim, mas sim outro tipo de função denominada **função constante**.

Portanto, chama-se função constante uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada pela lei $y = 0x + b$, ou seja, $y = b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

EXEMPLO 4

Vamos construir o gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $y = 3$ para todo **x** real.

x	y	Ponto
-2	3	A
$-\frac{1}{2}$	3	B
0	3	C
1	3	D
$\sqrt{2}$	3	E



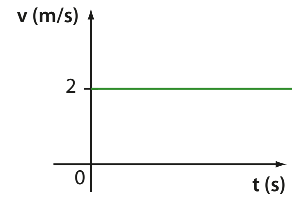
O gráfico é uma reta paralela ao eixo das abscissas.

EXEMPLO 5

Uma pessoa caminha com velocidade escalar **v** constante de 2 m/s, descrevendo um movimento uniforme.

O gráfico da função que relaciona **v** com o tempo **t**, em segundos, é representado ao lado.

Trata-se da função constante definida, para $x \geqslant 0$, por $y = 2$.



EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

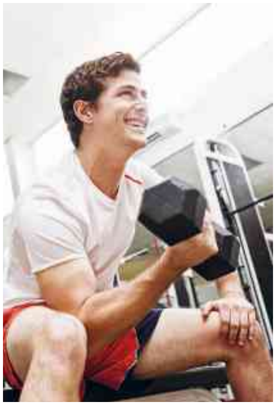
1 Um técnico em informática cobra R$ 45,00 a visita e um adicional de R$ 80,00 por hora de trabalho, com valor proporcional no fracionamento da hora.

a) Quanto o técnico receberia por um serviço de 2,5 h?

b) Dispondo-se de R$ 400,00, seria possível contratar esse técnico para um serviço de 4 horas?

c) Qual é a lei da função que representa o valor **v**, em reais, de um serviço de **x** horas feito pelo técnico? Esboce o gráfico dessa função.

2 A um mês de uma competição, um atleta de 75 kg é submetido a um treinamento específico para aumento de massa muscular, em que se anunciam ganhos de 180 gramas por dia. Supondo que isso realmente ocorra, faça o que se pede.



THINKSTOCK/GETTY IMAGES

a) Determine a massa do atleta após uma semana de treinamento.

b) Encontre a lei que relaciona a massa do atleta (**m**), em quilogramas, em função do número de dias de treinamento (**n**).

c) É possível que o atleta atinja ao menos 80 kg em um mês de treinamento?

3 Um hotel oferece a seus hóspedes duas opções para uso da rede *wi-fi* no acesso à internet:

1ª) Pagamento de uma taxa fixa de R$ 18,00 por dia com acesso ilimitado.

2ª) Cobrança de R$ 2,50 por hora de acesso, com valor proporcional no fracionamento da hora (minuto).

a) Escreva, para cada opção oferecida, a lei da função que relaciona o preço **p**, em reais, pago por esse serviço, em função do tempo **t** (com $0 < t < 24$), em horas de acesso.

b) Se escolher a 1ª opção, quanto pagará a mais um cliente que usou a rede por 5 horas em certo dia, na comparação com a 2ª opção?

c) Por quanto tempo de uso diário da rede *wi-fi* seria indiferente a escolha de qualquer um dos planos?

4 Uma caixa-d'água, de volume 21 m³, inicialmente vazia, começa a receber água de uma fonte à razão de 15 litros por minuto. Lembre-se de que 1 m³ equivale a 1 000 litros.

a) Quantos litros de água haverá na caixa após meia hora?

b) Após **x** minutos de funcionamento da fonte, qual será o volume (**y**) de água na caixa, em litros?

c) Após **x** minutos de funcionamento da fonte, qual será o volume (**y**) de água (em litros) necessário para preencher completamente a caixa?

d) Em quanto tempo a caixa estará cheia?

5 Faça os gráficos das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dadas por:

a) $y = x + 1$

b) $y = -2x + 4$

c) $y = 3x + 2$

d) $y = -x - 2$

e) $y = \frac{5}{2}$

f) $y = -1$

6 Construa o gráfico de cada uma das funções afim, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, dadas pelas leis:

a) $y = 2x$

b) $y = -3x$

c) $y = \frac{1}{2}x$

d) $y = -x$

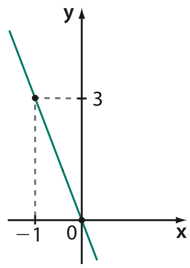
Após construir os quatro gráficos, é possível identificar uma propriedade comum a todos. Qual é essa propriedade?

7 Uma reta passa pelos pontos $(-1, 5)$ e $(2, -4)$. Qual é a lei da função representada por essa reta?

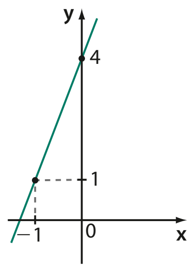
8 Qual é a equação da reta que passa pelos pontos $(-4, 2)$ e $(2, 5)$?

9 Obtenha, em cada caso, a lei da função cujo gráfico é mostrado a seguir.

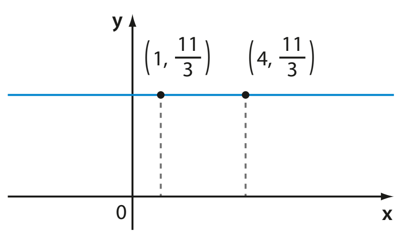
a)



b)

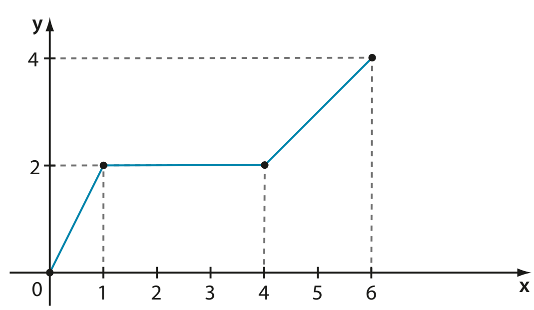


c)



10 Em uma corrida de táxi é cobrado um valor fixo, conhecido como bandeirada, acrescido de outro valor que depende do número de quilômetros rodados. Sabendo que a corrida de 10 km custou R$ 48,80 e outra de 25 km custou R$ 111,80, determine o valor cobrado por uma corrida de 18 km.

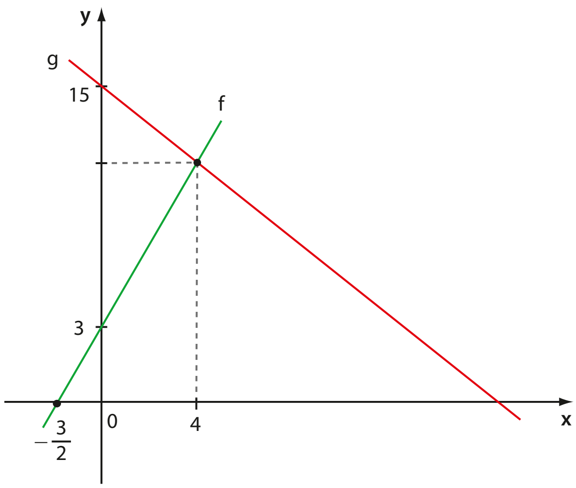
11 Considere uma função **f**, cujo domínio é $[0, 6]$, representada no gráfico a seguir.



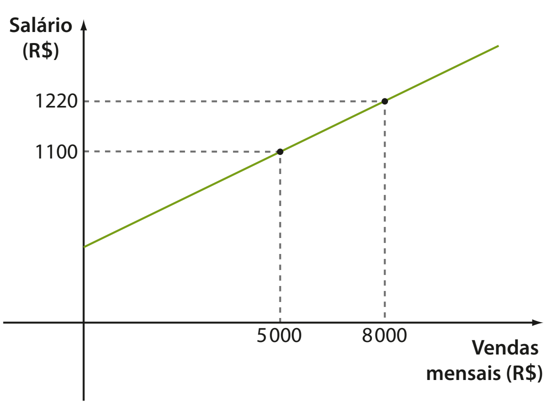
Calcule:

a) $f\left(\frac{1}{2}\right)$ **b)** $f(3)$ **c)** $f\left(\frac{11}{2}\right)$

12 Na figura estão representados os gráficos de duas funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 2x + 3$ e $g(x) = ax + b$. Calcule o valor de $g(8)$.



13 Um vendedor recebe um salário fixo e mais uma parte variável, correspondente à comissão sobre o total vendido em um mês. O gráfico seguinte informa algumas possibilidades de salário (**y**) em função das vendas (**x**).



a) Encontre a lei da função cujo gráfico é essa reta.

b) Qual é a parte fixa do salário?

c) Alguém da loja disse ao vendedor que, se ele conseguisse dobrar as vendas, seu salário também dobraria. Isso é verdade? Explique.

14 Em cada caso, determine o ponto de interseção das retas **r** e **s** que representam as funções **f** e **g** de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dadas por:

a) $f(x) = 3x$ e $g(x) = x + 2$

b) $f(x) = -x + 3$ e $g(x) = 2x - 6$

c) $f(x) = x + 2$ e $g(x) = x - 4$

Grandezas diretamente proporcionais

Um técnico, tendo à sua disposição uma balança e alguns recipientes de vidro, mediu a massa de alguns volumes diferentes de azeite de oliva e montou a seguinte tabela:

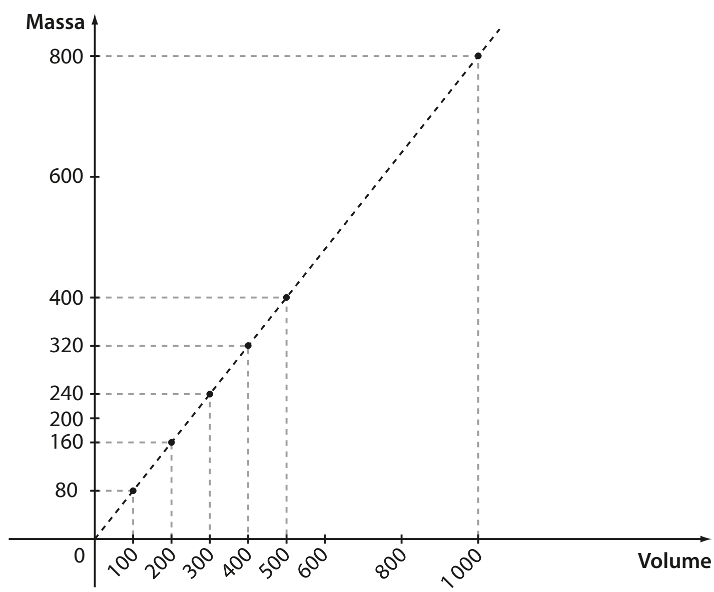
Experiência nº	Volume (em mililitros)	Massa (em gramas)
1	100	80
2	200	160
3	300	240
4	400	320
5	500	400
6	1 000	800
7	2 000	1 600


SÉRGIO DOTTA JR./THE NEXT

Técnico pesando azeite em um laboratório.

Podemos observar que, para cada volume, existe em correspondência uma única massa, ou seja, a massa é função do volume.

Com os resultados obtidos, o técnico construiu o gráfico abaixo.



Ele notou, então, que havia vários pontos alinhados determinando uma reta, a qual passa pela origem do sistema cartesiano, ou seja, tinha obtido o gráfico de uma **função linear**.

Ao observar os pares de valores da tabela, o técnico percebeu que, em todas as experiências, a razão entre a massa e o volume era 0,8:

$$\frac{80}{100} = 0{,}8 \qquad \frac{160}{200} = 0{,}8 \qquad \dots \qquad \frac{400}{500} = 0{,}8 \quad \dots$$

Ele ainda constatou que:

- quando o volume dobrava, a massa também dobrava;
- quando o volume triplicava, a massa também triplicava;
- se o volume era multiplicado por 10, a massa também era multiplicada por 10; e assim por diante.

O técnico concluiu, então, que o volume e a massa de certa substância são **grandezas diretamente proporcionais**. Para uma dada substância, o quociente da massa (**m**) pelo correspondente volume (**V**) é chamado **densidade**. A densidade do azeite é 0,8 g/mL.

Se ele quisesse determinar a massa correspondente a 140 mL de azeite, poderia simplesmente fazer:

$$\frac{m}{V} = 0{,}8 \Rightarrow \frac{m}{140} = 0{,}8 \Rightarrow m = 112$$

Assim, a massa é igual a 112 g.

Outra alternativa seria estabelecer a relação:

$$\begin{cases} 100 \text{ mL} — 80 \text{ g} \\ 140 \text{ mL} — x \end{cases} \Rightarrow 100 \cdot x = 140 \cdot 80 \Rightarrow x = 112 \text{ g}$$

Esse procedimento é comumente chamado **regra de três simples**.

De modo geral, quando uma grandeza **y** é função de uma grandeza **x** e para cada par de valores (x, y) se observa que $\frac{y}{x} = k$ (com $x \neq 0$) é constante, as duas grandezas são ditas diretamente proporcionais. A função $y = f(x)$ é uma função linear, e seu gráfico é uma reta que passa pela origem.

No final deste capítulo, você terá oportunidade de revisar também o conceito de grandezas inversamente proporcionais.

PENSE NISTO:

Dê outros exemplos de grandezas diretamente proporcionais.

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

15 Em cada tabela seguinte, **y** é diretamente proporcional a **x**. Encontre os valores desconhecidos.

a)

x	1,2	1,5	2,1	0,85	c
y	2,4	3	a	b	4

b)

x	3	6	15	60
y	2	4	a	b

16 No seu primeiro mês de atividade, uma pequena empresa lucrou R$ 5 400,00. Paulo e Roberto, seus sócios, investiram R$ 15 000,00 e R$ 12 000,00, respectivamente. Como deve ser dividido o lucro entre Paulo e Roberto, uma vez que ele é diretamente proporcional ao valor investido?

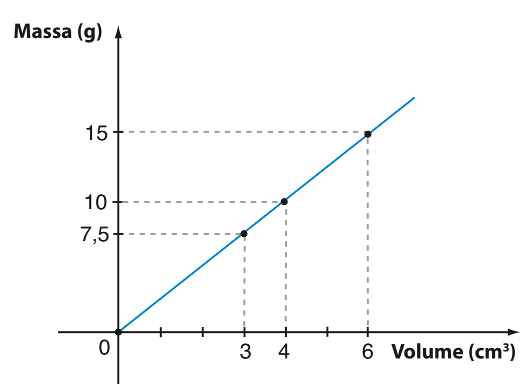
17 Em um quadrado, a medida do lado e o perímetro são diretamente proporcionais? E a medida do lado e a área?

18 Considere todos os retângulos cujo comprimento mede 3 metros e a largura **x** metros, sendo $x > 0$.

a) O perímetro de cada retângulo é diretamente proporcional a **x**?

b) A área de cada retângulo é diretamente proporcional a **x**?

19 No gráfico está representada a relação entre a massa e o volume de certo óleo combustível:



a) As grandezas massa e volume são diretamente proporcionais?

b) Qual é a densidade do óleo?

c) Qual é a lei que relaciona a massa (**m**) em função do volume (**V**)?

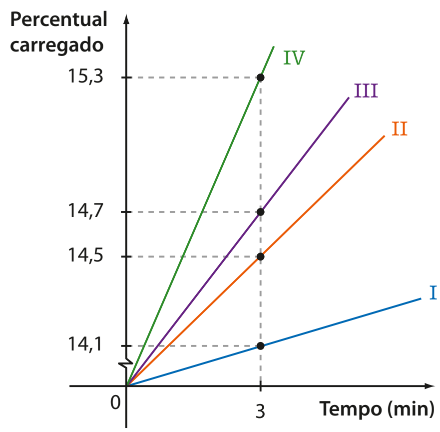
20 Em um restaurante cobra-se R$ 3,25 por 100 g de comida.

a) Qual é o preço pago por alguém que se servir de 300 g de comida? E por quem se servir do dobro?

b) Qual é a lei da função que relaciona o valor pago (**y**), em reais, e o número de quilogramas consumidos (**x**)? Esboce seu gráfico.

c) Raul almoçou nesse restaurante e pagou R$ 17,55 pela comida. De quantos gramas ele se serviu?

21 Uma empresa pretende lançar um modelo novo de *smartphone* no mercado. Para isso, selecionou alguns modelos para teste. O gráfico seguinte mostra os resultados de um teste realizado em quatro modelos (I, II, III e IV) e relaciona o percentual do aparelho carregado e o tempo gasto no carregamento.



Sabe-se que a empresa pretende que o novo modelo de *smartphone* lançado não leve mais que 20 minutos para carregar a bateria. Supondo linear a relação entre o percentual e o tempo, determine qual(is) modelo(s) deve(m) ser descartado(s) nesse teste.

PENSE NISTO:

No exemplo 5 da página 75, está esboçado o gráfico de v $\times$ t. No caderno, esboce o gráfico de d $\times$ t, sendo **d** a distância percorrida, em metros, e **t** o tempo gasto para percorrê-la, em segundos.

Raiz de uma equação do 1º grau

Chama-se **raiz** ou **zero da função polinomial do 1º grau**, dada por $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, o número real **x** tal que $f(x) = 0$.

Temos:

$$f(x) = 0 \Rightarrow ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

OBSERVAÇÕES

- O ponto $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$ pertence ao eixo das abscissas. Desse modo, a raiz de uma função do 1º grau corresponde à abscissa do ponto em que a reta intersecta o eixo Ox.
- A raiz da função **f** dada por $f(x) = ax + b$ é a solução da equação do 1º grau $ax + b = 0$, ou seja, $x = -\frac{b}{a}$.

EXEMPLO 6

- Obtenção do zero da função f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada pela lei $f(x) = 2x - 5$:

$$f(x) = 0 \Rightarrow 2x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

- Cálculo da raiz da função g: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida pela lei $g(x) = 3x + 6$:

$$g(x) = 0 \Rightarrow 3x + 6 = 0 \Rightarrow x = -2$$

- A reta que representa a função h: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $h(x) = -2x + 10$, intersecta o eixo Ox no ponto (5, 0), pois $h(x) = 0 \Rightarrow -2x + 10 = 0 \Rightarrow x = 5$.

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

22 Determine a raiz de cada uma das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dadas pelas seguintes leis:

a) $y = 3x - 1$

b) $y = -2x + 1$

c) $y = -\frac{3x - 5}{2}$

d) $y = 4x$

e) $y = \frac{2x}{5} - \frac{1}{3}$

f) $y = -x$

23 Seja **f** uma função real definida pela lei $f(x) = ax - 3$. Se -2 é raiz da função, qual é o valor de f(3)?

24 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações do 1º grau:

a) $12x + 5 = 2x + 8$

b) $5(3 - x) + 2(x + 1) = -x + 5$

c) $5x + 20(1 - x) = 5$

d) $-x + 4(2 - x) = -2x - (10 + 3x)$

e) $\frac{2x}{3} - \frac{1}{2} = \frac{5x}{2} + \frac{4}{3}$

f) $\frac{6x}{5} - \frac{x + 3}{2} = \frac{x}{3} - 1$

25 Em um triângulo ABC, a medida do ângulo $B\hat{A}C$ excede a medida de $A\hat{B}C$ em 10°, e a medida do ângulo $A\hat{C}B$, adicionado de 30°, é igual ao dobro da medida de $B\hat{A}C$. Quais são as medidas dos ângulos desse triângulo?

26 Carlos é 4 anos mais velho que seu irmão André. Há 5 anos, a soma de suas idades era 84 anos.

a) Qual é a idade atual de cada um?

b) Há quantos anos a idade de Carlos era o dobro da idade de André?

27 André, Bruno e Carlos instalaram um novo *software* em 53 computadores da empresa em que trabalham. André fez a instalação em 3 equipamentos a menos do que Bruno e este, 2 a menos do que Carlos. Determine o número de computadores em que cada um deles instalou o novo *software*.

28 Paulo e Joana recebem a mesma quantia por hora de trabalho. Após Paulo ter trabalhado 4 horas e Joana 3 horas e 20 minutos, Paulo tinha a receber R$ 15,00 a mais que Joana. Quanto recebeu cada um?

29 Considere a equação do 1º grau, na incógnita **x** e $U = \mathbb{R}$:

$$(a - 2) \cdot x - 5 = 0, \text{ sendo } a \in \mathbb{R}.$$

a) Resolva essa equação para $a = 4$, $a = -3$ e $a = 0$.

b) É verdade que, para todo $a \in \mathbb{R}$, a equação apresenta uma única solução real? Explique.

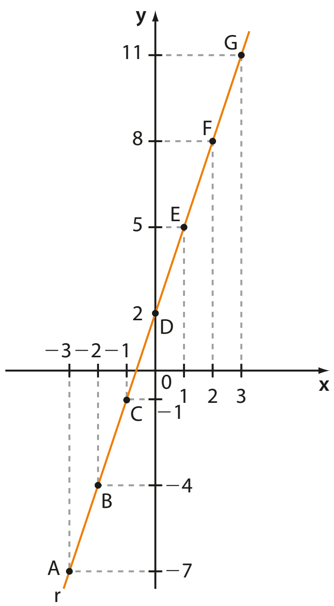
30 Em um jogo de vôlei, foram vendidos ingressos para apenas dois setores: arquibancada e numerada. O ingresso para numerada era R$ 30,00 mais caro que o da arquibancada. Sabendo que o público pagante foi de 3 200 pessoas, das quais 70% estavam na arquibancada, e a renda do jogo foi de R$ 140 800,00, determine o preço do ingresso para a numerada.

Taxa média de variação da função afim

Observemos inicialmente dois exemplos.

EXEMPLO 7

Seja **f** a função afim dada por y = 3x + 2. No gráfico ao lado, destacamos alguns pontos da reta **r**, que é o gráfico de **f**. Vamos calcular a taxa média de variação dessa função nos seguintes intervalos:

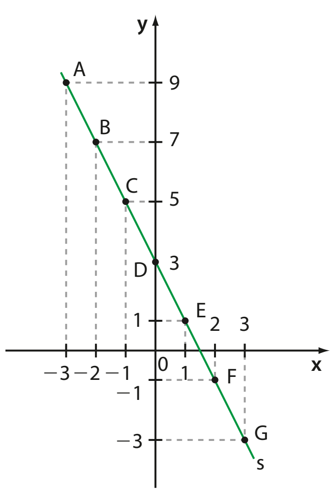


Intervalo	**Δx**	**Δy**	**Taxa de variação: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$**
de A a B	$-2-(-3)=1$	$-4-(-7)=3$	$\frac{3}{1}=3$
de B a C	$-1-(-2)=1$	$-1-(-4)=3$	$\frac{3}{1}=3$
de E a F	$2-1=1$	$8-5=3$	$\frac{3}{1}=3$
de D a G	$3-0=3$	$11-2=9$	$\frac{9}{3}=3$
de B a E	$1-(-2)=3$	$5-(-4)=9$	$\frac{9}{3}=3$
de A a F	$2-(-3)=5$	$8-(-7)=15$	$\frac{15}{5}=3$

Observe que, independentemente do "ponto de partida" e do intervalo considerado, a taxa de variação da função é constante (igual a 3).

EXEMPLO 8

Seja **f** a função afim dada por y = −2x + 3. No gráfico ao lado, destacamos alguns pontos da reta **s**, que é o gráfico de **f**. Vamos calcular a taxa média de variação dessa função nos seguintes intervalos:



Intervalo	**Δx**	**Δy**	**Taxa de variação: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$**
de A a B	$-2-(-3)=1$	$7-9=-2$	$\frac{-2}{1}=-2$
de B a C	$-1-(-2)=1$	$5-7=-2$	$\frac{-2}{1}=-2$
de E a F	$2-1=1$	$-1-1=-2$	$\frac{-2}{1}=-2$
de B a E	$1-(-2)=3$	$1-7=-6$	$\frac{-6}{3}=-2$
de C a G	$3-(-1)=4$	$-3-5=-8$	$\frac{-8}{4}=-2$
de A a G	$3-(-3)=6$	$-3-9=-12$	$\frac{-12}{6}=-2$

Observe que, independentemente do "ponto de partida" e do intervalo considerado, a taxa de variação da função é constante (igual a −2).

Em uma função afim, a taxa média de variação é constante, isto é, independe do "ponto inicial" e do "ponto final" considerados. Observe os exemplos anteriores.

Propriedade:

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função afim dada por $f(x) = ax + b$.

A taxa média de variação de **f**, quando **x** varia de $\mathbf{x_1}$ a $\mathbf{x_2}$, com $x_1 \neq x_2$, é igual ao coeficiente **a**.

Demonstração:

Se $f(x) = ax + b$, temos:

$$f(x_1) = ax_1 + b \quad \text{e} \quad f(x_2) = ax_2 + b$$

A taxa média de variação de **f**, para **x** variando de $\mathbf{x_1}$ até $\mathbf{x_2}$ é:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(ax_2 + b) - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1} = \frac{a \cdot x_2 - a \cdot x_1}{x_2 - x_1} = \frac{a \cdot (x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a$$

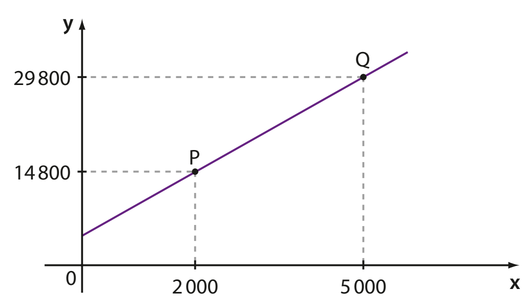
Veja o exemplo a seguir.

OBSERVAÇÃO

Note nos exemplos 7 e 8 que, se $a > 0$, a taxa de variação de **f** é positiva e **f** é crescente; se $a < 0$, a taxa de variação de **f** é negativa e **f** é decrescente.

EXEMPLO 9

O gráfico a seguir mostra o custo total mensal (**y**), em reais, para se confeccionar **x** unidades de camisetas em uma pequena fábrica.



Vamos calcular o custo de confecção de 3 000 camisetas.

Considerando o intervalo de **P** a **Q**, a taxa média de variação, em reais/camiseta, dessa função é:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{29\,800 - 14\,800}{5\,000 - 2\,000} = \frac{15\,000}{3\,000} = 5$$

Como se trata de uma função afim, sabemos que essa taxa é constante. Isso significa que, a cada camiseta produzida, o custo aumenta em 5 reais.

Assim, considerando um aumento de 1000 unidades, a partir da produção de 2 000 camisetas ($3000 - 2000 = 1000$), o aumento no custo é de 5 000 reais ($1000 \cdot 5$), o que elevaria os gastos a 19 800 reais ($14\,800 + 5\,000$).

Para obter a lei da função que relaciona **y** e **x**, podemos utilizar a taxa média de variação da função.

Como vimos, na lei $y = ax + b$, temos $a = 5$, isto é, $y = 5x + b$.

Como o ponto $P(2\,000, 14\,800)$ pertence à reta, temos:

$$x = 2\,000 \text{ e } y = 14\,800$$

$$14\,800 = 5 \cdot 2000 + b \Rightarrow b = 4\,800 \text{ (custo fixo da fábrica)}$$

Daí, a lei é: $y = 5x + 4\,800$.

Aplicações

Movimento uniforme e movimento uniformemente variado

Vamos imaginar que você esteja na estrada em um automóvel no qual o velocímetro se mantém sempre na mesma posição (durante um determinado intervalo de tempo) indicando, por exemplo, 80 km/h.

Nas aulas de Física você já deve ter aprendido que se trata de um **movimento uniforme**: se considerarmos intervalos de tempo iguais, o automóvel sofre variações de espaço iguais (no exemplo, o automóvel percorre 40 km a cada meia hora ou 20 km a cada 15 minutos e assim por diante).

Decorre daí que a função horária dos espaços, no movimento uniforme, é:

$$s(t) = s_0 + v \cdot t \quad *$$

- s(t) representa o espaço correspondente ao tempo **t**, com $t \geqslant 0$; observe que **s** e **t** são as grandezas relacionadas;
- as constantes $\mathbf{s_0}$ e **v** representam, respectivamente, o espaço inicial (correspondente a $t = 0$) e a velocidade escalar (velocidade do móvel em cada instante considerado).

Observe que * representa a lei de uma função do 1º grau: $y = ax + b$, com **x** e **y** representados por **t** e **s**, respectivamente. A taxa média de variação dessa função é constante e igual ao coeficiente de **x**, que vale **a**. Desse modo, em *, **v** representa a taxa média de variação dos espaços, considerando o intervalo de $\mathbf{t_1}$ a $\mathbf{t_2}$:

$$\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = v$$

Note que **v** representa também a velocidade escalar média, como vimos no capítulo anterior.

Veja os exemplos a seguir.

Na função horária $s(t) = 5 + 10t$, com **t** em segundos e **s** em metros, o coeficiente de **t**, que é igual a 10, representa a velocidade escalar do móvel, isto é, $v = 10$ m/s. Como $v > 0$, o movimento é progressivo ("**s** cresce com **t**").

Já na lei $s(t) = 40 - 20t$, com **t** em segundos e **s** em metros, temos que $v = -20$ m/s e o movimento é retrógrado ("**s** decresce com **t**").

Já no **movimento uniformemente variado**, a velocidade escalar de um móvel sofre variações iguais em intervalos de tempo iguais, isto é, varia de modo uniforme no decorrer do tempo. A função que representa a velocidade (**v**) em um instante (**t**), $t \geqslant 0$, é:

$$v(t) = v_0 + \alpha \cdot t$$

sendo $\mathbf{v_0}$ e α constantes (para cada movimento) que representam, respectivamente, a velocidade inicial do móvel (correspondente a $t = 0$) e a aceleração escalar.

A taxa média de variação da velocidade no intervalo de $\mathbf{t_1}$ a $\mathbf{t_2}$ é constante e igual ao coeficiente de **t**, que vale:

$$\alpha = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

Observe que α (aceleração escalar) representa também a aceleração escalar média, como vimos no capítulo 3.

Fonte de pesquisa: HALLIDAY, D.; RESNICK, R. e WALKER, J. *Fundamentos de Física 1:* Mecânica. 9ª ed. São Paulo: LTC, 2012.

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

31 Determine a taxa média de variação das seguintes funções do 1º grau:

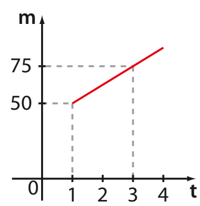
a) $f(x) = 4x + \frac{1}{2}$

b) $g(x) = -3x$

c) $h(x) = x + 2$

d) $i(x) = 4 - x$

32 O gráfico ao lado mostra a evolução da massa (**m**) de um mamífero, em quilogramas, nos primeiros meses de vida.



a) Com quantos quilogramas esse mamífero nasceu?

b) Qual era a sua massa com 2 meses de vida?

c) Mantida essa tendência até o 5º mês, qual seria a massa do mamífero com 4,5 meses de vida?

33 Em 31/12/2009 uma represa continha 500 milhões de metros cúbicos de água. Devido à seca, a quantidade de água armazenada nessa represa vem decrescendo, ano a ano, de forma linear, chegando, em 31/12/2017, a 250 milhões de metros cúbicos de água.

Se esse comportamento se mantiver nos anos seguintes, determine:

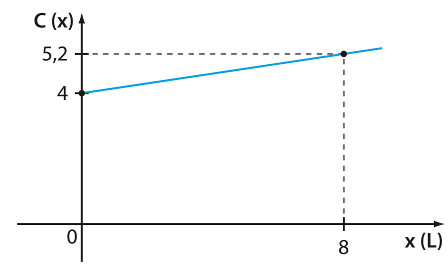
a) quantos metros cúbicos de água a represa terá em 31/12/2021.

b) quantos metros cúbicos de água a represa terá em 30/6/2022.

c) em que data (mês e ano) a represa ficaria vazia.

34 A valorização anual do preço (em reais) de um quadro é constante. Seu preço atual é R$ 4 500,00. Há quatro anos, o quadro custava R$ 3 300,00. Qual será o seu preço daqui a cinco anos?

35 O custo **C**, em milhares de reais, de produção de **x** litros de certa substância é dado por uma função afim, com $x \geqslant 0$, cujo gráfico está representado abaixo.



a) O que o ponto (0, 4) pertencente à reta indica?

b) Qual é o custo de produção de 1 litro dessa substância?

c) O custo de R$ 7 000,00 corresponde à produção de quantos litros dessa substância?

36 Em uma cidade, verificou-se que, em um dia de verão, a temperatura variou linearmente com o tempo, no período das 8 às 16 horas. Sabendo que às 11 h 30 min a temperatura era de 29,5 °C e às 14 h ela atingiu a marca de 33 °C, determine:

a) a temperatura às 9 h 30 min e às 15 h.

b) a lei da função que representa a temperatura **y** (em °C) de acordo com o tempo (**t**), em horas, transcorrido a partir das 8 h; $t \in [0, 8]$.

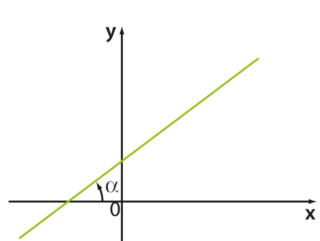
Função afim crescente e decrescente

O coeficiente angular

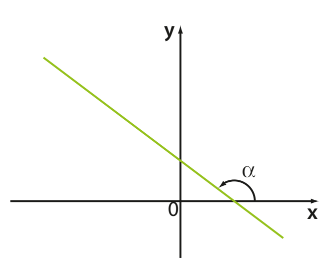
Já vimos que o gráfico da função afim $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $y = ax + b$, $a \neq 0$, é uma reta.

O coeficiente de **x**, indicado por **a**, é chamado **coeficiente angular** ou **declividade** da reta e está ligado à inclinação da reta em relação ao eixo Ox.

Observe o ângulo α que a reta forma com o eixo **x**, convencionado tal como mostram os dois casos a seguir.



α é agudo ($0 < \alpha < 90°$)



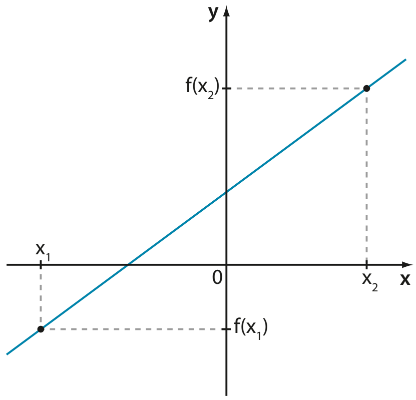
α é obtuso ($90° < \alpha < 180°$)

PENSE NISTO:

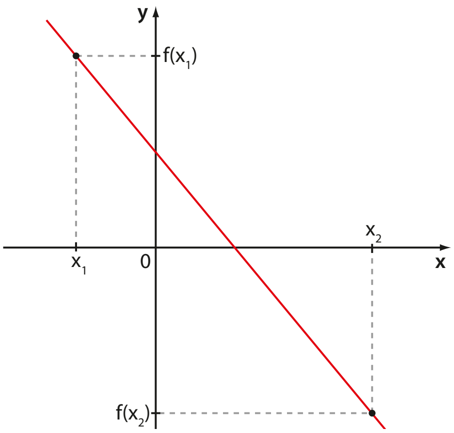
O que ocorreria se $\alpha = 90°$?

Considerando a função afim definida por $f(x) = ax + b$, temos duas possibilidades.

- Para $a > 0$, se $x_1 < x_2$, então $ax_1 < ax_2$ e, daí, $ax_1 + b < ax_2 + b$; portanto, $f(x_1) < f(x_2)$, e a função é dita **crescente**.



- Para $a < 0$, se $x_1 < x_2$, então $ax_1 > ax_2$ e, daí, $ax_1 + b > ax_2 + b$; portanto, $f(x_1) > f(x_2)$, e a função é dita **decrescente**.



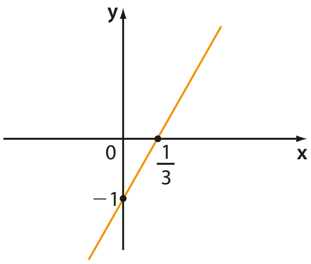
EXEMPLO **10**

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $y = 3x - 1$. Observe a tabela e o gráfico de **f**.

x aumenta →

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	−10	−7	−4	−1	2	5	8

y aumenta →



Note que $a = 3 > 0$; lembre-se de que **a** representa também a taxa média de variação de **f**. A função é crescente.

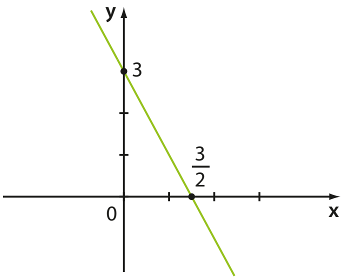
EXEMPLO **11**

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $y = -2x + 3$. Observe a tabela e o gráfico de **f**.

x aumenta →

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	9	7	5	3	1	−1	−3

y diminui →



Note que $a = -2 < 0$; lembre-se de que **a** representa também a taxa média de variação de **f**. A função é decrescente.

Em resumo, as funções **f**, definidas por $f(x) = ax + b$, com $a > 0$, são crescentes, e aquelas com $a < 0$ são decrescentes.

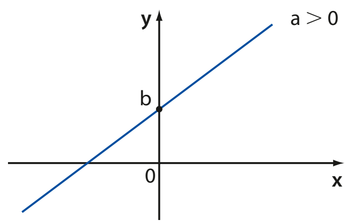
PENSE NISTO:

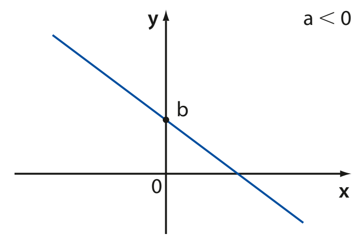
O que ocorre se $a = 0$?

O coeficiente linear

O termo constante **b** é chamado **coeficiente linear** da reta. Para $x = 0$, temos $y = a \cdot 0 + b = b$.

O ponto (0, b) pertence ao eixo das ordenadas. Assim, o coeficiente linear é a ordenada do ponto em que a reta intersecta o eixo Oy.





EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

37 Para cada uma das funções afim dadas pelas leis seguintes, identifique o coeficiente angular (**a**) e o coeficiente linear (**b**). Classifique a função em crescente ou decrescente.

a) $y = 3x - 2$

b) $y = -x + 3$

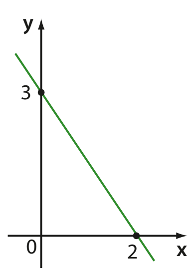
c) $y = \dfrac{5 - 2x}{3}$

d) $y = 9x$

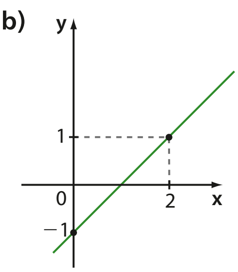
e) $y = (x + 3)^2 - (x + 1)^2$

38 Determine os valores dos coeficientes angulares e lineares (**a** e **b**, respectivamente) das retas seguintes.

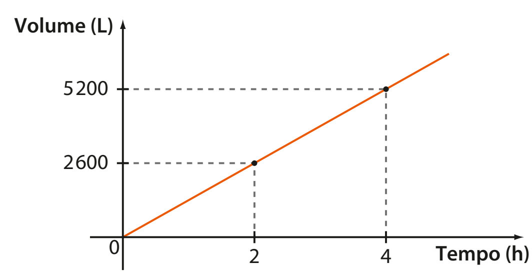
a)



b)



39 No gráfico seguinte está representado o volume de petróleo, em litros, existente em um reservatório de 26 m^3 inicialmente vazio, em função do tempo, em horas, de abastecimento do reservatório.



a) Determine a taxa média de variação do volume em relação ao tempo.

b) Determine os coeficientes angular e linear dessa reta.

c) Qual é a equação dessa reta?

d) Em quanto tempo o reservatório estará cheio?

Sinal

Já vimos que estudar o sinal de uma função **f** qualquer, definida por $y = f(x)$, é determinar os valores de **x** para os quais **y** é positivo ou **y** é negativo.

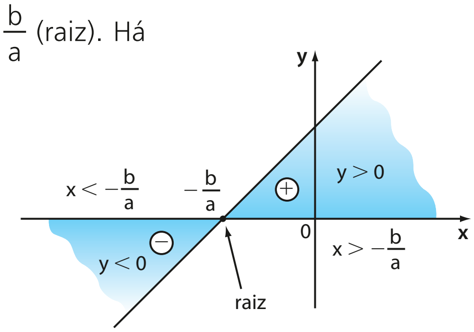
Consideremos uma função afim dada por $y = f(x) = ax + b$ e estudemos seu sinal. Já vimos que essa função se anula ($y = 0$) para $x = -\dfrac{b}{a}$ (raiz). Há dois casos possíveis:

- $a > 0$ (a função é crescente)

$$y > 0 \Rightarrow ax + b > 0 \Rightarrow x > -\frac{b}{a}$$

$$y < 0 \Rightarrow ax + b < 0 \Rightarrow x < -\frac{b}{a}$$

Conclusão: **y** é positivo para valores de **x** maiores que a raiz; **y** é negativo para valores de **x** menores que a raiz.

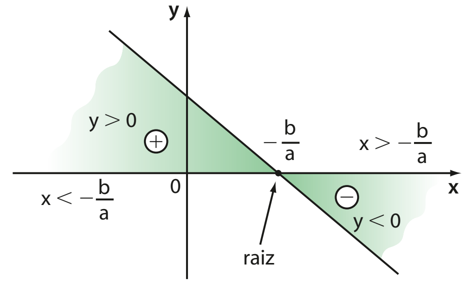


- $a < 0$ (a função é decrescente)

  $y > 0 \Rightarrow ax + b > 0 \Rightarrow x < -\dfrac{b}{a}$

  $y < 0 \Rightarrow ax + b < 0 \Rightarrow x > -\dfrac{b}{a}$

  Conclusão: **y** é positivo para valores de **x** menores que a raiz; **y** é negativo para valores de **x** maiores que a raiz.

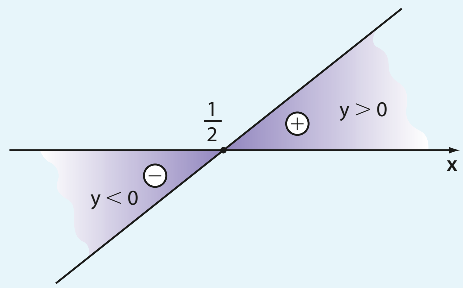


EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

4 Estude o sinal da função afim definida por $y = 2x - 1$.

Solução:

Essa função polinomial do 1º grau apresenta $a = 2 > 0$ e raiz $x = \frac{1}{2}$. A função é crescente e a reta intersecta o eixo Ox no ponto $\frac{1}{2}$.

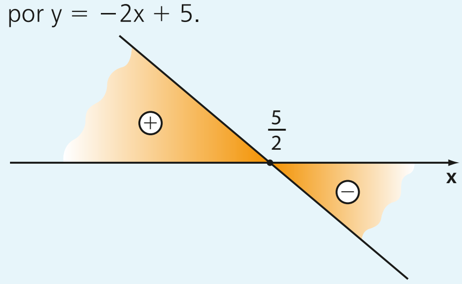


Sinal
$y > 0$ se $x > \frac{1}{2}$
$y < 0$ se $x < \frac{1}{2}$

5 Estude o sinal da função afim dada por $y = -2x + 5$.

Solução:

Essa função do 1º grau apresenta $a = -2 < 0$ e raiz $x = \frac{5}{2}$. A função é decrescente e a reta intersecta o eixo Ox no ponto $\frac{5}{2}$.



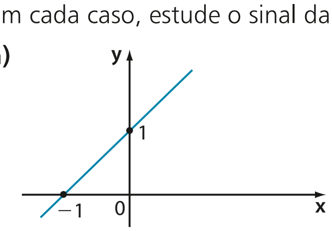
Sinal
$y > 0$ se $x < \frac{5}{2}$
$y < 0$ se $x > \frac{5}{2}$

EXERCÍCIOS

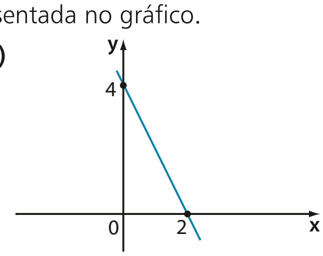
FAÇA NO CADERNO

40 Em cada caso, estude o sinal da função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ representada no gráfico.

a)



b)



41 Estude o sinal de cada uma das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ seguintes:

a) $y = 4x + 1$

b) $y = -3x + 1$

c) $y = -7x$

d) $y = \dfrac{x - 3}{5}$

e) $y = \dfrac{x}{2}$

f) $y = 3 - x$

Inequações

No exemplo 2 da página 70, estabelecemos que o salário do corretor é dado por $s(x) = 700 + 0{,}02 \cdot x$, em que **x** é o total de vendas do mês. Qual deve ser o total de vendas em um mês para que o salário do corretor ultrapasse R$ 4 000,00?

Devemos ter:

$$\begin{aligned} s(x) &> 4\,000 \\ 700 + 0{,}02 \cdot x &> 4\,000 \\ 0{,}02 \cdot x &> 3\,300 \\ x &> 165\,000 \end{aligned}$$

Assim, as vendas precisam superar R$ 165 000,00.

Acabamos de resolver uma inequação do 1º grau. Vamos, a seguir, relembrar como se resolvem outras inequações do 1º grau e também relacionar a resolução de inequações ao estudo do sinal da função afim.

EXEMPLO 12

Podemos resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $2x + 3 > 0$ de dois diferentes modos.

1º modo:

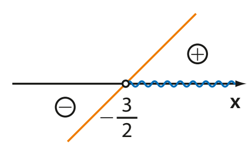
Deixamos no 1º membro apenas o termo que contém a incógnita **x**: $2x > -3$

Dividimos os dois membros pelo coeficiente de **x**: $\frac{2x}{2} > -\frac{3}{2}$, isto é, $x > -\frac{3}{2}$

2º modo:

O primeiro membro da inequação pode ser associado à função $y = 2x + 3$; assim, é preciso determinar **x** tal que $y > 0$. Temos:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Raiz: } 2x + 3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2} \\ \text{A função é crescente, pois } a = 2 > 0. \end{array}\right\}$$



Assim, para que $y > 0$, devemos considerar $x > -\frac{3}{2}$.

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{3}{2}\right\}$$

EXEMPLO 13

Para resolver a inequação $-3x + 12 \leqslant 0$, considerando $U = \mathbb{R}$, podemos proceder de dois modos.

1º modo:

$$-3x + 12 \leqslant 0 \Rightarrow -3x \leqslant -12$$

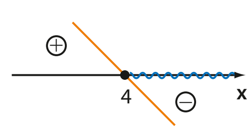
Ao dividirmos os dois membros pelo coeficiente de **x**, que é negativo (-3), é preciso lembrar que o sinal da desigualdade se inverte:

$$\frac{-3x}{-3} \geqslant \frac{-12}{-3}\text{, isto é, } x \geqslant 4$$

2º modo:

Seja $y = -3x + 12$; é preciso determinar para que valores de **x** tem-se $y \leqslant 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \text{raiz: } -3x + 12 = 0 \Rightarrow x = 4 \\ \bullet\ a = -3 < 0 \end{array}\right\}$$



Assim, $y \leqslant 0$ se $x \geqslant 4$.

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 4\}$$

PENSE NISTO:

Observe como um estudante resolveu a inequação:

$-3x + 12 \leqslant 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 12 \leqslant 3x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{12}{3} \leqslant \frac{3x}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4 \leqslant x$, isto é, $x \geqslant 4$.

Essa resolução está correta?

EXERCÍCIO RESOLVIDO

6 Resolva, em $\mathbb{R}$, a inequação $1 \leqslant 2x + 3 < x + 5$.

Solução:

De fato, são duas inequações simultâneas:

$$1 \leqslant 2x + 3 \quad (1) \qquad \text{e} \qquad 2x + 3 < x + 5 \quad (2)$$

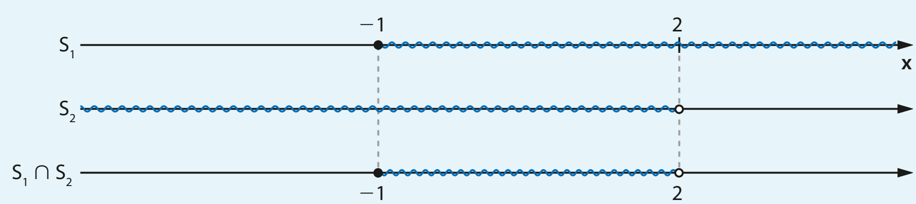
Vamos resolver (1): $1 \leqslant 2x + 3$

$$1 \leqslant 2x + 3 \Rightarrow -2x \leqslant 3 - 1 \Rightarrow -2x \leqslant 2 \Rightarrow x \geqslant -1$$

Vamos resolver (2): $2x + 3 < x + 5$

$$2x + 3 < x + 5 \Rightarrow 2x - x < 5 - 3 \Rightarrow x < 2$$

Como as condições (1) e (2) devem ser satisfeitas simultaneamente, procuremos agora a interseção das duas soluções:



Portanto, $-1 \leqslant x < 2$ ou $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x < 2\}$.

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

42 Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações seguintes, estudando o sinal das funções envolvidas:

a) $2x - 1 \geqslant 0$

b) $-4x + 3 < 0$

c) $-2x \leqslant 0$

d) $3x + 6 > 0$

e) $x - 3 \leqslant -x + 5$

f) $3(x - 1) + 4x \leqslant -10$

g) $-2(x - 1) - 5(1 - x) > 0$

43 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes inequações:

a) $\dfrac{x - 1}{3} - \dfrac{x - 2}{2} \leqslant 2$

b) $\dfrac{2(3 - x)}{5} + \dfrac{x}{2} \geqslant \dfrac{1}{4} + \dfrac{2(x - 1)}{3}$

c) $\dfrac{3x - 1}{4} - \dfrac{x - 3}{2} \geqslant \dfrac{x + 7}{4}$

d) $(x - 3)^2 - (4 - x)^2 \leqslant \dfrac{x}{2}$

e) $\dfrac{4x - 3}{5} - \dfrac{2 + x}{3} < \dfrac{3x}{5} + 1 - \dfrac{2x}{15}$

44 A diferença entre o dobro de um número e a sua metade é menor que 6. Quais os números inteiros positivos que são soluções desse problema?

45 Para animar a festa de 15 anos de sua filha, Marcelo consultou duas bandas que ofereceram as seguintes condições:

- banda **A**: R$ 800,00 fixos, acrescidos de R$ 250,00 por hora (ou fração de hora) de trabalho.
- banda **B**: R$ 650,00 fixos, acrescidos de R$ 280,00 por hora (ou fração de hora) de trabalho.

a) Se Marcelo estima que a festa não vai durar mais que 2,5 horas, que empresa ele deverá contratar pensando exclusivamente no critério financeiro?

b) Acima de quantas horas de duração da festa é mais econômico optar pela banda **A**?

46 Leia a tirinha a seguir.

Suponha que Aline tenha se comprometido a fazer depósitos mensais de R$ 40,00 para cobrir o "rombo" na sua conta corrente, sendo o primeiro depósito daqui a um mês, e que o banco não mais cobrará juros sobre o saldo devedor a partir da data em que fez o acordo com Aline. Considerando a referida data, responda:

a) Após **n** meses, qual será o saldo da conta de Aline?

b) Qual é o número mínimo inteiro de meses necessários para que o saldo devedor de Aline seja menor que R$ 200,00?

c) Qual é o número mínimo inteiro de meses necessários para Aline "sair do vermelho", isto é, para que seu saldo fique positivo?

47 A produção de soja em uma região atingiu a safra de 50 toneladas em janeiro de 2017. A partir daí, a produção tem recuado à taxa de 90 kg ao mês. Mantido esse ritmo, a partir de qual data (mês e ano) a produção mensal estará abaixo de 40 toneladas?

48 Resolva as seguintes inequações simultâneas, sendo $U = \mathbb{R}$.

a) $-1 < 2x \leqslant 4$

b) $3 < x - 1 < 5$

c) $4 > -x > -1$

d) $3 \leqslant x + 1 \leqslant -x + 6$

e) $2x \leqslant -x + 9 \leqslant 5x + 21$

49 Ao chegar a um aeroporto, um turista informou-se sobre locação de automóveis e organizou as informações como a seguir:

Opções	Diária	Preço adicional por quilômetro rodado
Locadora 1	R$ 100,00	R$ 0,30
Locadora 2	R$ 60,00	R$ 0,40
Locadora 3	R$ 150,00	km livre

a) Qual é a lei que define o preço em reais (**y**) da locação em função do número de quilômetros rodados (**x**) em cada uma das situações apresentadas?

b) Para maior economia, a partir de qual número inteiro de quilômetros deve o turista preferir a locadora 1 à locadora 2?

c) Para maior economia, a partir de qual número inteiro de quilômetros ele deve optar pela locadora 3?

TROQUE IDEIAS

Funções custo, receita e lucro

Um empreendedor abriu uma pequena doçaria em uma galeria comercial na qual produz e vende brigadeiros.

G. EVANGELISTA/OPÇÃO BRASIL IMAGENS

Nos primeiros meses do negócio, ele observou que, mensalmente, há uma despesa ou custo fixo (**C_F**) de R$ 2 700,00 e um custo variável (**C_V**), que depende da quantidade de brigadeiros preparados. Ele estima que o custo unitário (por unidade) de produção do brigadeiro seja de R$ 1,40.

a) A que pode se referir o custo (ou despesa) fixa de um empreendimento?

b) Seja **x** a quantidade de brigadeiros produzidos em um determinado mês. Obtenha a lei que define o custo total (**C**), sendo $C = C_F + C_V$.

O dono do negócio decidiu fixar o preço de venda do brigadeiro em R$ 3,20. Neste momento, vamos admitir que o preço de venda independe de outros fatores e, dessa forma, será mantido fixo. Vamos também supor que toda quantidade de brigadeiro produzida na doçaria seja vendida.

c) Qual é a lei da função que representa a arrecadação bruta (sem levar em conta as despesas) dessa doçaria? Em modelos matemáticos de Economia costuma-se designar a arrecadação bruta por **receita** (**R**).

Assim, escreva **R** em função de **x**.

d) Represente, no caderno, no mesmo plano cartesiano, os gráficos das funções custo (**C**) e receita (**R**) em função de **x**.

e) As grandezas custo (**C**) e número de brigadeiros (**x**) comercializados são diretamente proporcionais? E as grandezas receita (**R**) e número de brigadeiros (**x**)?

f) Como você pode determinar o ponto de interseção das duas retas obtidas? Sob a perspectiva econômica, qual é a interpretação desse ponto? Esse ponto é conhecido como **ponto crítico** ou de **nivelamento**.

Uma vez determinadas as funções receita (**R**) e custo total (**C**), é possível definirmos uma nova função que expressa o **faturamento líquido** ou **lucro** (**L**) da doçaria, dada pela diferença entre **R** e **C**.

g) Escreva a lei que define **L** em função de **x** e esboce seu gráfico. Para quais valores de **x** o lucro é negativo (isto é, a doçaria fica no prejuízo), o lucro é nulo e o lucro é positivo?

Indique, no gráfico construído no item *d*, os intervalos encontrados.

DESAFIO

(Enem-MEC) Uma indústria tem um reservatório de água com capacidade para 900 m^3. Quando há necessidade de limpeza do reservatório, toda água precisa ser escoada. O escoamento da água é feito por seis ralos, e dura 6 horas quando o reservatório está cheio. Esta indústria construirá um novo reservatório, com capacidade de 500 m^3, cujo escoamento da água deverá ser realizado em 4 horas, quando o reservatório estiver cheio. Os ralos utilizados no novo reservatório deverão ser idênticos aos do já existente.

A quantidade de ralos do novo reservatório deverá ser igual a

a) 2 **b)** 4 **c)** 5 **d)** 8 **e)** 9

UM POUCO **MAIS** SOBRE

Grandezas inversamente proporcionais

Em uma experiência, pretende-se medir o tempo necessário para se encher de água um tanque inicialmente vazio. Para isso, são feitas várias simulações que diferem entre si pela vazão da fonte que abastece o tanque. Em cada simulação, no entanto, a vazão não se alterou do início ao fim da experiência. Os resultados são mostrados na tabela ao lado.

Simulação	Vazão (L/min)	Tempo (min)
1	2	60
2	4	30
3	6	20
4	1	120
5	10	12
6	0,5	240

Observando os pares de valores, é possível notar algumas regularidades:

1ª) O produto (vazão da fonte) · (tempo) é o mesmo em todas as simulações:

$$2 \cdot 60 = 4 \cdot 30 = 6 \cdot 20 = ... = 0,5 \cdot 240$$

O valor constante obtido para o produto representa a capacidade do tanque (120 L).

2ª) Dobrando-se a vazão da fonte, o tempo se reduz à metade; triplicando-se a vazão da fonte, o tempo se reduz à terça parte; reduzindo-se a vazão à metade, o tempo dobra; ...

As duas regularidades listadas acima caracterizam **grandezas inversamente proporcionais**.

Se **x** e **y** são duas grandezas que se relacionam de modo que para cada par de valores (x, y) se observa que $x \cdot y = k$ (**k** é constante), as duas grandezas são ditas **inversamente proporcionais**.

Representação gráfica

Com relação à experiência anterior, vamos construir um gráfico da vazão em função do tempo (observe, neste caso, que o gráfico está contido no 1º quadrante, pois as duas grandezas só assumem valores positivos).

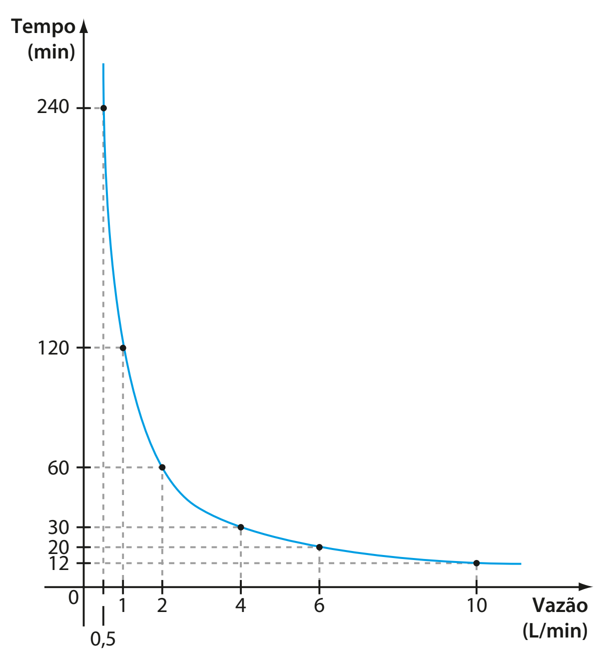
A curva obtida é chamada **hipérbole**.

Veja como podemos determinar o tempo **t** necessário para encher o tanque se a vazão da fonte é de 13 L/min.

Uma maneira é usar a definição de grandezas inversamente proporcionais: o produto (vazão · tempo) é constante e igual a 120.

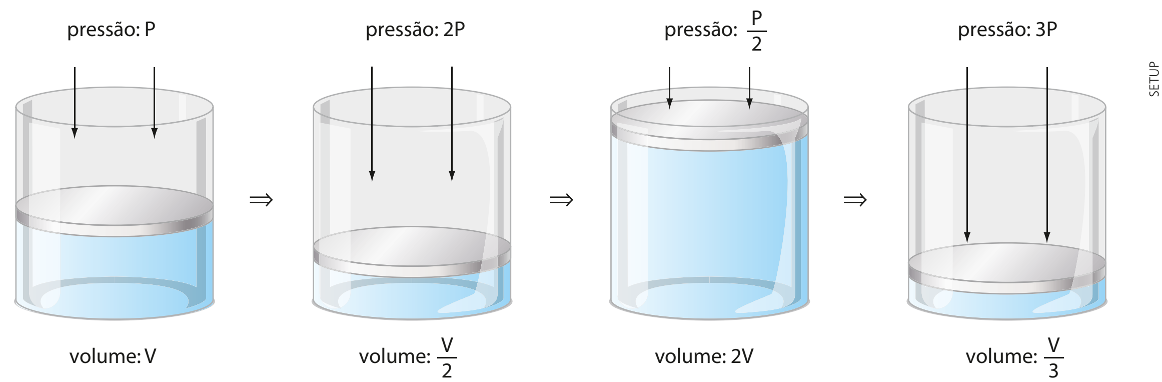
Daí $13 \cdot t = 120 \Rightarrow t = \dfrac{120}{13} \simeq 9,23$.

Para encher o tanque são necessários aproximadamente 9,23 min, ou seja, 9 minutos e 14 segundos.



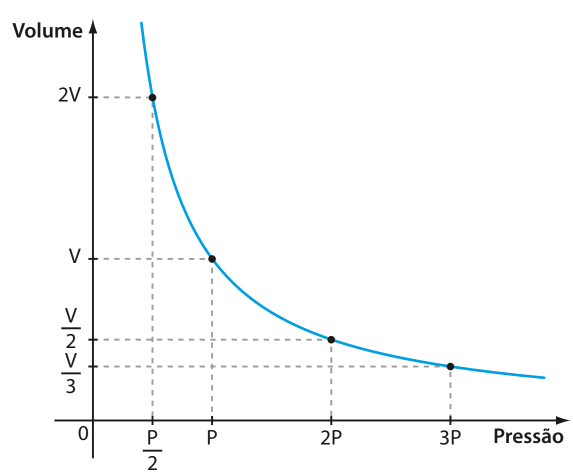
Vejamos outro exemplo.

Considere que uma certa massa de gás é submetida a uma transformação na qual a temperatura é mantida constante. As grandezas que variam durante essa transformação são a pressão e o volume: o volume ocupado por essa massa de gás varia de acordo com a pressão a que ele foi submetido. A sequência de figuras abaixo ilustra a relação entre o volume e a pressão.



Pressão	P	2P	$\frac{P}{2}$	3P	...
Volume	V	$\frac{V}{2}$	2V	$\frac{V}{3}$	...

Observe que, para cada par de valores da tabela, o produto (pressão) · (volume) é constante, isto é, $P \cdot V = k$. Assim, nessas condições, pressão e volume são grandezas inversamente proporcionais. Veja o gráfico de $V \times P$.



PENSE NISTO:

Sejam **x**, **y** e **z** três grandezas tais que **x** é diretamente proporcional a **y** e inversamente proporcional a **z**. Sabendo que, quando $x = 24$, temos $y = 9$ e $z = 6$, determine o valor de **z** quando $x = 36$ e $y = 3$.