CAPÍTULO 5

Função quadrática

Introdução

Vejamos duas situações que envolvem a função quadrática.

LEANDRO MARTINS/FRAMEPHOTO

Estádio de futebol, São Paulo (SP), 2015.

Situação 1

Um campeonato de futebol vai ser disputado por 10 clubes pelo sistema em que todos jogam contra todos em dois turnos. Quantos jogos serão realizados no campeonato?

Contamos o número de jogos que cada clube fará "em casa", ou seja, no seu campo: 9 jogos. Como são 10 clubes, o total de jogos será $10 \cdot 9 = 90$.

Se o campeonato fosse disputado por 20 clubes (como é o Campeonato Brasileiro de Futebol), poderíamos calcular quantos jogos seriam realizados usando o mesmo raciocínio:

$$20 \cdot 19 = 380$$

Enfim, para cada número (**x**) de clubes, é possível calcular o número (**y**) de jogos do campeonato. O valor de **y** é função de **x**.

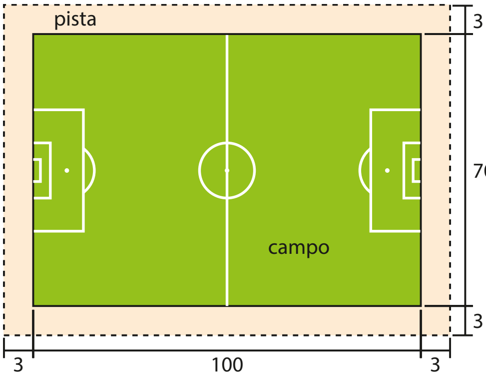
Nesse caso, a regra que permite calcular **y** a partir de **x** é a seguinte:

$$y = x \cdot (x - 1), \text{ ou seja, } y = x^2 - x$$

Esse é um exemplo de **função polinomial do 2º grau** ou **função quadrática**.

Situação 2

Um clube construiu um campo de 100 m de comprimento por 70 m de largura e, por medida de segurança, decidiu cercá-lo, deixando entre o campo e a cerca uma pista com 3 m de largura. Qual é a área do terreno limitado pela cerca?



A área da região cercada é:

$$(100 + 2 \cdot 3) \cdot (70 + 2 \cdot 3) = 106 \cdot 76 = 8\,056$$

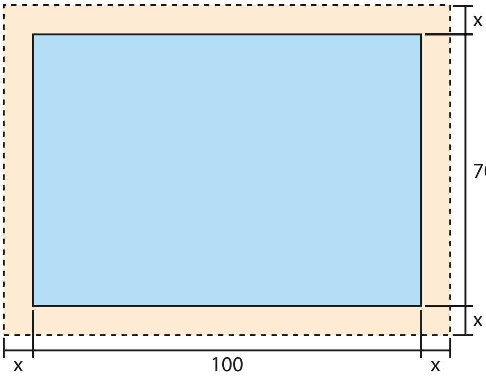
Logo, a área do terreno limitado pela cerca é 8 056 m^2.

Se a medida da largura da pista fosse 4 m, teríamos:

$$(100 + 2 \cdot 4) \cdot (70 + 2 \cdot 4) = 108 \cdot 78 = 8\,424$$

Nessas condições, a área da região cercada seria: 8 424 m^2.

Enfim, a cada medida **x** de largura escolhida para a pista há uma área **A** da região cercada. A área da região cercada é função de **x**. Procuremos a lei que expressa **A** em função de **x**:



$$A(x) = (100 + 2x) \cdot (70 + 2x)$$

$$A(x) = 7\,000 + 200x + 140x + 4x^2$$

$$A(x) = 4x^2 + 340x + 7\,000$$

Esse é outro exemplo de **função polinominal do 2º grau** ou **função quadrática**.

Chama-se **função quadrática**, ou **função polinomial do 2º grau**, qualquer função **f** de ℝ em ℝ dada por uma lei da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que **a**, **b** e **c** são números reais e $a \neq 0$.

Veja os exemplos a seguir.

- $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$, sendo $a = 2$, $b = 3$ e $c = 5$.
- $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$, sendo $a = 3$, $b = -4$ e $c = 1$.
- $f(x) = x^2 - 1$, sendo $a = 1$, $b = 0$ e $c = -1$.
- $f(x) = -x^2 + 2x$, sendo $a = -1$, $b = 2$ e $c = 0$.
- $f(x) = -4x^2$, sendo $a = -4$, $b = 0$ e $c = 0$.

PENSE NISTO:

Por que é colocada a restrição $a \neq 0$?

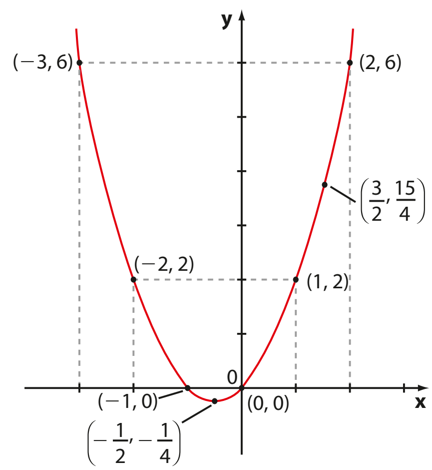
Gráfico

Vamos construir os gráficos de algumas funções polinomiais do 2º grau. Veja os exemplos.

EXEMPLO 1

Para construir o gráfico da função f: ℝ → ℝ dada pela lei $f(x) = x^2 + x$, atribuímos a **x** alguns valores (observe que o domínio de **f** é ℝ), calculamos o valor correspondente de **y** para cada valor de **x** e, em seguida, ligamos os pontos obtidos:

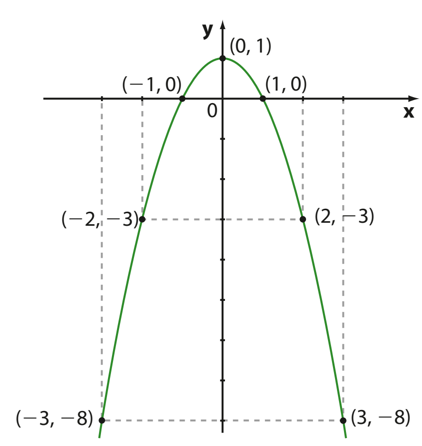
x	$y = x^2 + x$
-3	6
-2	2
-1	0
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$
0	0
1	2
$\frac{3}{2}$	$\frac{15}{4}$
2	6



EXEMPLO 2

Consideremos f: ℝ → ℝ dada por $y = -x^2 + 1$.
Repetindo o procedimento usado no exemplo anterior, temos:

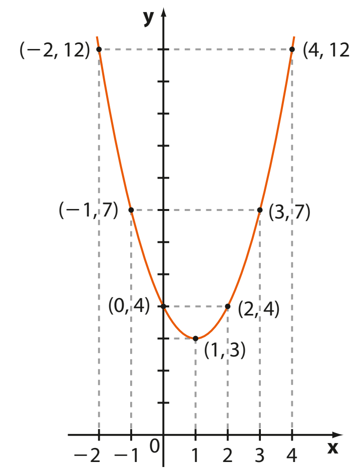
x	$y = -x^2 + 1$
-3	-8
-2	-3
-1	0
0	1
1	0
2	-3
3	-8



EXEMPLO 3

Seja f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 - 2x + 4$:

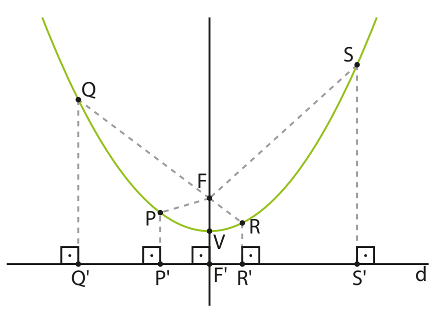
x	$y = x^2 - 2x + 4$
-2	12
-1	7
0	4
1	3
2	4
3	7
4	12



Em cada um dos três exemplos anteriores, a curva obtida é chamada **parábola**. É possível mostrar que o gráfico de qualquer função quadrática dada por $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, é uma parábola.

> Sejam um ponto **F** (foco) e uma reta **d** (diretriz) pertencentes a um mesmo plano, com $F \notin d$.
> **Parábola** é o conjunto dos pontos desse plano que estão à mesma distância de **F** e **d**.

1º caso



Os pontos **Q**, **P**, **V**, **R** e **S** são alguns pontos da parábola. Assim:

QF = QQ'; PF = PP'; VF = VF';
RF = RR'; SF = SS'

PENSE NISTO:

Por que **V** é o ponto médio de $\overline{FF'}$?

Observe o ponto **Q**, por exemplo. A distância de **Q** à diretriz (**d**) é igual à distância de **Q** a **Q'**, sendo **Q'** a interseção de **d** com a reta perpendicular a **d** por **Q**. Da mesma forma definimos as distâncias de **P**, **V**, **R** e **S** à diretriz.

Temos ainda:

- a reta perpendicular à diretriz traçada pelo foco **F** é chamada **eixo de simetria da parábola**;
- o ponto **V** é o ponto da parábola mais próximo da diretriz e recebe o nome de **vértice da parábola**.

Com esse formato, dizemos que a parábola tem a concavidade ("abertura") voltada para cima.

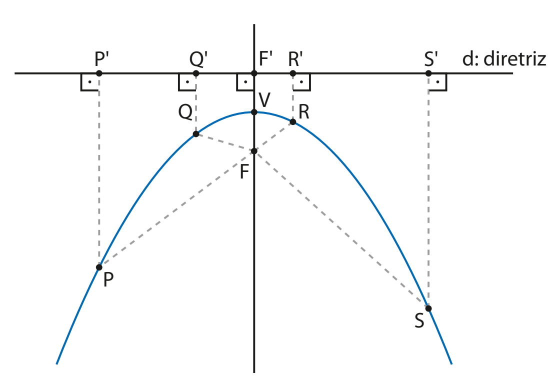
2º caso

Pode ocorrer também que o ponto **F** (foco) esteja abaixo da reta **d** (estamos considerando **d** horizontal, isto é, paralela ao eixo das abscissas). Observe o formato da parábola obtida:

P, **Q**, **V**, **R** e **S** são alguns pontos da parábola:

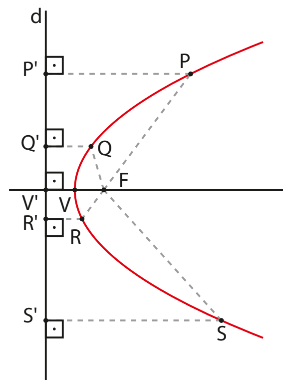
PF = PP'; QF = QQ'; VF = VF'; RF = RR'; SF = SS'; ...

Com esse formato, dizemos que a parábola tem a concavidade ("abertura") voltada para baixo.



PENSE NISTO:

Se a reta **d** (diretriz) for vertical, isto é, paralela ao eixo das ordenadas, como é mostrado abaixo, a parábola pode representar o gráfico de uma função quadrática?



OBSERVAÇÃO

Ao construir o gráfico de uma função quadrática dada por $y = ax^2 + bx + c$, notamos sempre que:

- se $a > 0$, a parábola tem a concavidade voltada para cima, como no 1º caso; veja os exemplos 1 e 3.
- se $a < 0$, a parábola tem a concavidade voltada para baixo, como no 2º caso; veja o exemplo 2.

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

1 Esboce o gráfico de cada uma das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dadas pelas leis seguintes:

a) $y = x^2$ **b)** $y = 2x^2$ **c)** $y = -x^2$ **d)** $y = -2x^2$

2 Construa o gráfico de cada uma das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dadas pelas seguintes leis:

a) $y = x^2 - 2x$ **b)** $y = -x^2 + 3x$

3 Faça o gráfico de cada uma das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dadas pelas leis seguintes:

a) $y = x^2 - 4x + 5$ **b)** $y = -x^2 + 2x - 1$ **c)** $y = x^2 - 2x + 1$

Raízes de uma equação do 2º grau

Chamam-se **raízes** ou **zeros da função polinomial do 2º grau**, dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, os números reais **x** tais que $f(x) = 0$.

Em outras palavras, as raízes da função $y = ax^2 + bx + c$ são as soluções (se existirem) da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$.

Vamos deduzir a fórmula que permite obter as raízes de uma função quadrática. Temos:

$$f(x) = 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Essa é a fórmula resolutiva de uma equação do 2º grau.

PENSE NISTO:

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$ é um trinômio quadrado perfeito?

EXEMPLO 4

Vamos obter os zeros da função **f** de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida pela lei $f(x) = x^2 - 5x + 6$.
Temos $a = 1$, $b = -5$ e $c = 6$.
Então:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \begin{cases} x = 3 \\ x = 2 \end{cases}$$

As raízes são 2 e 3.

EXEMPLO 5

Vamos calcular as raízes reais da função dada pela lei $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$.
Temos $a = 4$, $b = -4$ e $c = 1$.
Então:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{8} = \frac{4 \pm 0}{8} = \frac{1}{2}$$

As raízes são $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$, ou seja, a função admite duas raízes iguais a $\frac{1}{2}$, ou ainda, a função admite uma raiz real dupla igual a $\frac{1}{2}$.

EXEMPLO 6

Vamos calcular os zeros reais da função dada por $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$.
Temos $a = 2$, $b = 3$ e $c = 4$.
Então:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 32}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{-23}}{4} \notin \mathbb{R}$$

Portanto, essa função não tem zeros reais.

Quantidade de raízes

As raízes de uma função quadrática são os valores de **x** para os quais $y = ax^2 + bx + c = 0$, ou seja, são as abscissas dos pontos em que a parábola intersecta o eixo Ox.

Retomando os exemplos 4, 5 e 6, temos:

- o gráfico da função **f** tal que $f(x) = x^2 - 5x + 6$ intersecta o eixo **x** nos pontos (3, 0) e (2, 0);
- o gráfico da função **f** tal que $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$ tangencia o eixo **x** no ponto $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$;
- o gráfico da função **f** tal que $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$ não intersecta o eixo Ox.

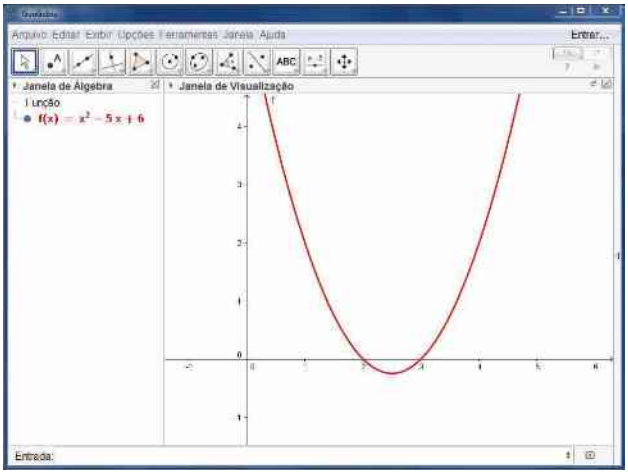
OBSERVAÇÃO

A quantidade de raízes reais de uma função quadrática depende do valor obtido para o radicando $\Delta = b^2 - 4ac$, chamado **discriminante**:

- quando Δ é positivo, há duas raízes reais e distintas;
- quando Δ é zero, há duas raízes reais iguais (ou uma raiz dupla);
- quando Δ é negativo, não há raiz real.

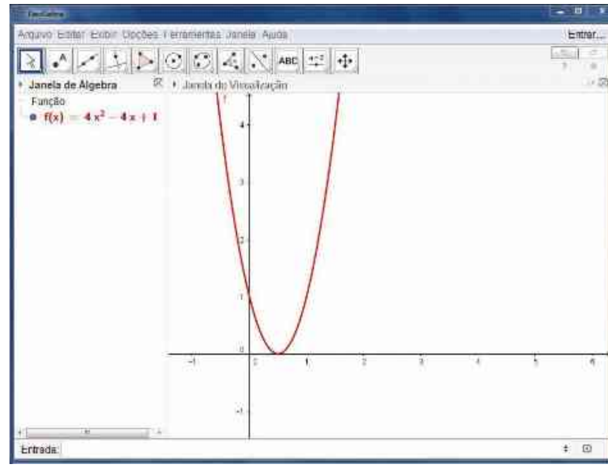
Observe como são os três respectivos gráficos, traçados no GeoGebra:

Exemplo 4



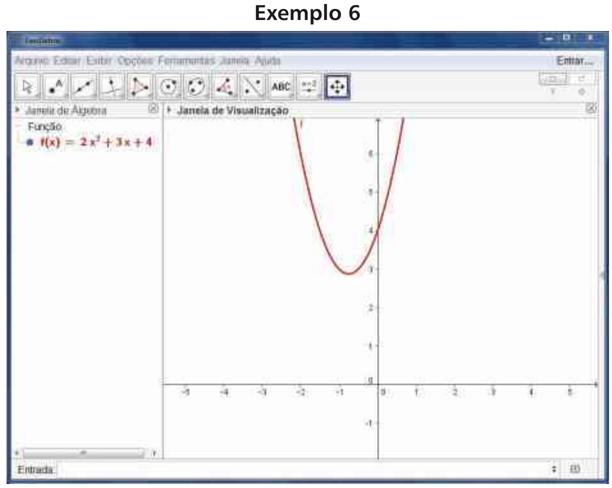
GEOGEBRA

Exemplo 5



GEOGEBRA

Exemplo 6



GEOGEBRA

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

1 Determine as condições sobre o parâmetro real **m** na função dada por $y = 3x^2 - 2x + (m - 1)$ a fim de que:

a) não existam raízes reais;

b) haja uma raiz dupla;

c) existam duas raízes reais e distintas.

Solução:

Na lei $y = 3x^2 - 2x + (m - 1)$ as variáveis **x** e **y** se relacionam, e **m** é um parâmetro que pode assumir qualquer valor real.

Calculando o discriminante (Δ), temos:

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (m - 1) = 4 - 12m + 12 = 16 - 12m$$

Devemos ter:

a) $\Delta < 0 \Rightarrow 16 - 12m < 0 \Rightarrow m > \frac{4}{3}$

b) $\Delta = 0 \Rightarrow 16 - 12m = 0 \Rightarrow m = \frac{4}{3}$

c) $\Delta > 0 \Rightarrow 16 - 12m > 0 \Rightarrow m < \frac{4}{3}$

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

4 Determine as raízes (zeros) reais de cada uma das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dadas pelas seguintes leis:

a) $y = 2x^2 - 3x + 1$

b) $y = 4x - x^2$

c) $y = -x^2 + 2x + 15$

d) $y = 9x^2 - 1$

e) $y = -x^2 + 6x - 9$

f) $y = 3x^2$

g) $y = x^2 - 5x + 9$

h) $y = -x^2 + 2$

i) $y = x^2 - x - 6$

j) $y = (x + 3) \cdot (x - 5)$

5 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações:

a) $x^2 - 3\sqrt{3}x + 6 = 0$

b) $(3x - 1)^2 + (x - 2)^2 = 25$

c) $2 \cdot (x + 3)^2 - 5 \cdot (x + 3) + 2 = 0$

d) $x + \frac{1}{x} = 3$

e) $(x - 1) \cdot (x + 3) = 5$

6 Resolva, em $\mathbb{R}$, as equações a seguir:

a) $(-x^2 + 1) \cdot (x^2 - 3x + 2) = 0$

b) $(x - 1) \cdot (x - 2) = (x - 1) \cdot (2x + 3)$

c) $(x + 5)^2 = (2x - 3)^2$

d) $x^3 + 10x^2 + 21x = 0$

e) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

7 Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (2x + 1) \cdot (x - 3)$. Determine o(s) elemento(s) do domínio cuja imagem é -5.

8 Em um retângulo, a medida de um dos lados excede a medida do outro em 4 cm. Sabendo que a área desse retângulo é 621 cm², determine seu perímetro.

9 Um grupo de professores programou uma viagem de confraternização que custaria, no total, R$ 6400,00 — valor que dividiriam igualmente entre si. Alguns dias antes da partida, seis professores desistiram da viagem e, assim, cada professor participante pagou R$ 240,00 a mais. Quantos foram à viagem?

10 Economistas estimam que os valores médios, em reais, das ações de duas empresas **A** e **B** sejam dados, respectivamente, por $v_A(t) = 4{,}20 + \frac{1}{4}t$ e $v_B(t) = \frac{1}{16}t^2 - \frac{1}{8}t + 3{,}20$, em que **t** é o tempo, em anos, contado a partir da data desta previsão.

a) Qual é o valor atual das ações de cada uma das empresas?

b) Daqui a 4 anos qual ação estará mais valorizada?

c) Daqui a quantos anos as ações das duas empresas terão o mesmo valor? Qual será esse valor?

11 Certo mês, um vendedor de sucos naturais arrecadou uma média diária de R$ 180,00, vendendo cada copo de suco pelo mesmo preço. No mês seguinte, aumentou o preço em R$ 0,50 e vendeu uma média de 18 unidades a menos por dia, mas a arrecadação média diária foi a mesma. Determine:

a) o preço do copo de suco no primeiro mês;

b) o número de copos por dia vendidos no primeiro mês;

c) o número de copos por dia vendidos no segundo mês.

12 Determine os valores reais de **p** a fim de que a função quadrática **f** dada por $f(x) = x^2 - 2x + p$ admita duas raízes reais e iguais.

13 Estabeleça os valores reais de **m** para os quais a função **f**, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 5x^2 - 4x + m$, admita duas raízes reais e distintas.

14 Encontre, em função de **m**, $m \in \mathbb{R}$, a quantidade de raízes da função **f**, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, dada pela lei $y = x^2 - 4x + (m + 3)$.

15 Qual é o menor número inteiro **p** para o qual a função **f**, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, dada por $f(x) = 4x^2 + 3x + (p + 2)$, não admite raízes reais?

Soma e produto das raízes

Sendo $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$ as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$. Vamos calcular $x_1 + x_2$ e $x_1 \cdot x_2$.

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{b^2 - \left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{(2a)^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

EXEMPLO 7

A soma das raízes da equação $3x^2 + 2x - 5 = 0$ é $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{2}{3}$, e o produto dessas raízes é $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{5}{3}$.

PENSE NISTO:

Utilizando essas fórmulas, resolva mentalmente a equação $x^2 - 6x + 8 = 0$.

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

2 Determine $k \in \mathbb{R}$, a fim de que uma das raízes da equação $x^2 - 5x + (k + 3) = 0$, de incógnita **x**, seja igual ao quádruplo da outra.

Solução:

Utilizando as fórmulas da soma e do produto, temos:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 5 \quad (1) \qquad \text{e} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = k + 3 \quad (2)$$

Do enunciado, temos $x_1 = 4x_2$. (3)

Substituindo (3) em (1), obtemos:

$$4x_2 + x_2 = 5 \Rightarrow x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = 4$$

De (2), temos:

$$1 \cdot 4 = k + 3 \Rightarrow k = 1$$

Forma fatorada

Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função polinomial do 2º grau dada por $y = ax^2 + bx + c$, com raízes $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$, então **f** pode ser escrita na forma $y = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$, que é a chamada **forma fatorada** da função do 2º grau (lembre-se de que fatorar uma expressão algébrica significa escrevê-la sob a forma de multiplicação).

Vamos mostrar esta propriedade:

$$y = ax^2 + bx + c = a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

Lembrando que $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, podemos escrever:

$$y = a \cdot \left[x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2\right]$$
$$y = a \cdot \left[\underbrace{x^2 - x_1x} - \underbrace{x_2x + x_1x_2}\right]$$
$$y = a \cdot \left[x \cdot (x - x_1) - x_2 \cdot (x - x_1)\right]$$
$$y = a \cdot \left[(x - x_1) \cdot (x - x_2)\right] = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

EXEMPLO 8

As raízes da função $y = x^2 - 2x - 3$ são -1 e 3. A forma fatorada dessa função é:

$$y = 1 \cdot [x - (-1)] \cdot (x - 3) = (x + 1) \cdot (x - 3)$$

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

16 Calcule a soma e o produto das raízes reais das seguintes equações do 2º grau:

a) $3x^2 - x - 5 = 0$

b) $-x^2 + 6x - 5 = 0$

c) $2x^2 - 7 = 0$

d) $x(x - 3) = 2$

e) $(x - 4) \cdot (x + 5) = 0$

17 Sejam r_1 e r_2 as raízes da equação do 2º grau $2x^2 - 6x + 3 = 0$. Determine o valor de:

a) $r_1 + r_2$

b) $r_1 \cdot r_2$

c) $(r_1 + 3) \cdot (r_2 + 3)$

d) $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$

e) $r_1^2 + r_2^2$

18 A diferença entre as raízes da equação $x^2 + 11x + p = 0$ (com $p \in \mathbb{R}$) é igual a 5. Com base nesse dado:

a) determine as raízes;

b) encontre o valor de **p**.

19 Uma das raízes da equação $x^2 - 25x + 2p = 0$ (com $p \in \mathbb{R}$) excede a outra em 3 unidades. Encontre as raízes da equação e o valor de **p**.

20 As raízes reais da equação $x^2 + 2mx + 48 = 0$ (com $m \in \mathbb{R}$) são negativas e uma é o triplo da outra. Qual é o valor de **m**?

21 Resolva mentalmente as equações do 2º grau usando soma e produto.

a) $x^2 - 2x - 3 = 0$

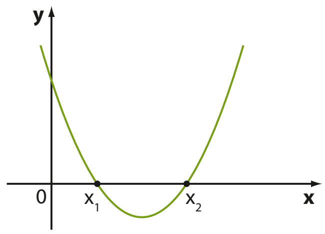
b) $x^2 + 6x + 5 = 0$

c) $x^2 + 4x - 5 = 0$

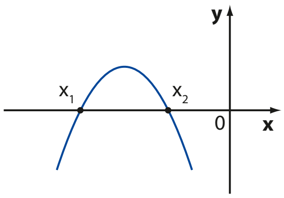
d) $x^2 + 2x - 35 = 0$

22 Em cada item, está representado o gráfico de uma função quadrática **f**.
Determine, para cada caso, o sinal da soma (**S**) e do produto (**P**) das raízes de **f**:

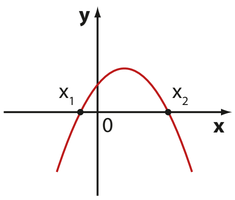
a)



b)



c)



23 Determine $m \in \mathbb{R}$ de modo que a equação $x^2 + mx + (m^2 - m - 12) = 0$ tenha uma raiz nula e a outra positiva.

24 Em cada caso, obtenha a forma fatorada de **f**, sendo:

a) $f(x) = x^2 - 8x$

b) $f(x) = x^2 - 7x + 10$

c) $f(x) = -2x^2 + 10x$

d) $f(x) = -x^2 + 10x - 25$

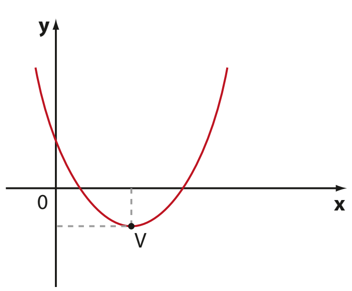
e) $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$

Coordenadas do vértice da parábola

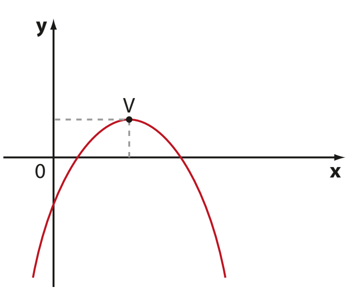
Vamos obter as coordenadas do ponto **V**, chamado **vértice da parábola**.

Se $a > 0$, a parábola tem concavidade voltada para cima e um ponto de mínimo **V**; se $a < 0$, a parábola tem concavidade voltada para baixo e um ponto de máximo **V**.

- Se $a > 0$



- Se $a < 0$



Vamos retomar a fórmula que define a função quadrática e escrevê-la de outra forma:

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

$$y = a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

$$y = a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)\right]$$

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Essa última forma é denominada **forma canônica** da função quadrática.

Observando a forma canônica, podemos notar que **a**, $\frac{b}{2a}$ e $\frac{\Delta}{4a^2}$ são constantes. Apenas **x** é variável. Daí:

- se $a > 0$, então o valor mínimo de **y** é estabelecido quando ocorrer o valor mínimo para $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$; como $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ é sempre maior ou igual a zero, seu valor mínimo ocorre se $x + \frac{b}{2a} = 0$, ou seja, se $x = -\frac{b}{2a}$; nessa situação, o valor mínimo de **y** é:

$$y = a\left[0 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = -\frac{\Delta}{4a}$$

- se $a < 0$, por meio de raciocínio semelhante, concluímos que o valor máximo de **y** ocorre se $x = -\frac{b}{2a}$; nessa situação, o valor máximo de **y** é:

$$y = a\left(0 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$$

Concluindo, em ambos os casos as coordenadas de **V** são:

$$V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

EXEMPLO 9

Vamos obter as coordenadas do vértice da parábola que representa a função dada por

$$y = x^2 - 12x + 30.$$

$$x_V = -\frac{b}{2a} = \frac{12}{2} = 6 \text{ e } y_V = -\frac{\Delta}{4a} =$$

$$= -\frac{144 - 120}{4} = -\frac{24}{4} = -6$$

Observe que, como $a = 1 > 0$, o vértice $(6, -6)$ representa um ponto de mínimo da função.

PENSE NISTO:

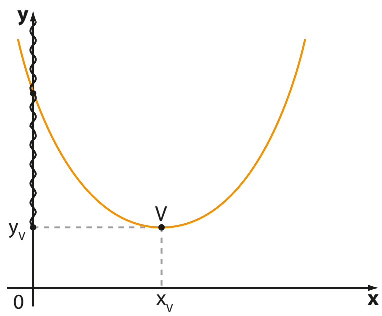
Depois de encontrarmos $x_V = 6$, como seria possível obter $\mathbf{y}_V$ sem usar a fórmula $-\frac{\Delta}{4a}$?

O conjunto imagem

O conjunto imagem Im da função definida por $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, é o conjunto dos valores que **y** pode assumir. Há duas possibilidades:

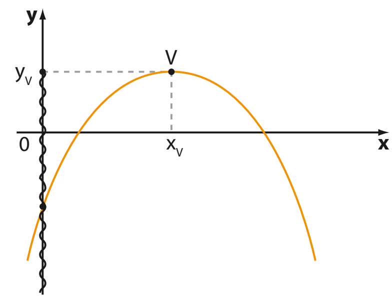
- Se $a > 0$

$$\text{Im} = \left\{y \in \mathbb{R} \,\middle|\, y \geqslant y_V = -\frac{\Delta}{4a}\right\}$$



- Se $a < 0$

$$\text{Im} = \left\{y \in \mathbb{R} \,\middle|\, y \leqslant y_V = -\frac{\Delta}{4a}\right\}$$



EXEMPLO **10**

Vamos determinar o conjunto imagem da função quadrática dada por $y = -3x^2 + 5x - 2$.
O vértice **V** dessa parábola tem coordenadas:

$$x_V = -\frac{b}{2a} = \frac{5}{6} \quad \text{e} \quad y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{25 - 24}{-12} = \frac{1}{12}$$

Como $a < 0$, a função admite ponto de máximo.

O valor máximo que essa função assume é $y_V = \frac{1}{12}$.

Nesse caso, o conjunto imagem dessa função é $\text{Im} = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant \frac{1}{12}\right\}$.

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

25 Obtenha o vértice de cada uma das parábolas representativas das funções quadráticas:

a) $y = x^2 - 6x + 4$
b) $y = -2x^2 - x + 3$
c) $y = x^2 - 9$

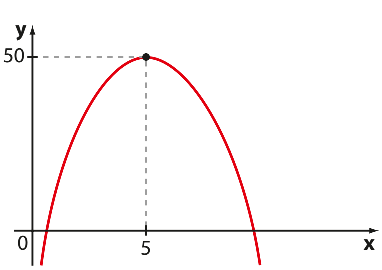
26 Qual é o valor mínimo (ou máximo) assumido por cada uma das funções quadráticas dadas pelas leis abaixo?

a) $y = -2x^2 + 60x$
b) $y = x^2 - 4x + 8$
c) $y = -x^2 + 2x - 5$
d) $y = 3x^2 + 2$

27 Qual é o conjunto imagem de cada uma das funções quadráticas dadas pelas leis abaixo?

a) $y = x^2 - 2$
b) $y = 5 - x^2$
c) $y = (x + 1)(2 - x)$
d) $y = x(x + 3)$

28 O gráfico seguinte representa a função quadrática dada por $y = -3x^2 + bx + c$. Quais são os valores de **b** e **c**?



29 Uma bola, lançada verticalmente para cima, a partir do solo, tem sua altura **h** (em metros) expressa em função do tempo **t** (em segundos), decorrido após o lançamento, pela lei:

$$h(t) = 40t - 5t^2$$

Determine:

a) a altura em que a bola se encontra 1 s após o lançamento;

b) o(s) instante(s) em que a bola se encontra a 75 m do solo;

c) a altura máxima atingida pela bola;

d) o instante em que a bola retorna ao solo.

30 Estima-se que, para um exportador, o valor v(x), em milhares de reais, do quilograma de certo minério seja dado pela lei: $v(x) = 0{,}6x^2 - 2{,}4x + 6$, sendo **x** o número de anos contados a partir de 2010 ($x = 0$), com $0 \leqslant x \leqslant 10$.

a) Entre que anos o valor do quilograma desse produto diminuiu?

b) Qual é o valor mínimo atingido pelo quilograma do produto?

c) Em que ano o preço do quilograma do produto será máximo? Qual será esse valor?

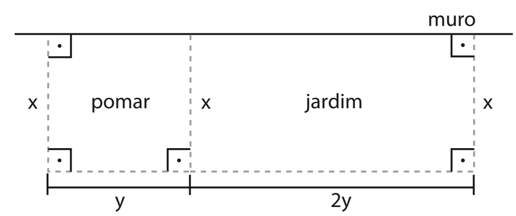
31 A lei que expressa o número (**y**) de milhares de *downloads* de um aplicativo baixado em *smartphones*, em função do número (**x**) de semanas transcorridas desde o instante em que esse aplicativo ficou disponível para ser baixado, é: $y = -\dfrac{1}{50} \cdot x^2 + c \cdot x$, em que **c** é uma constante real.

Sabendo que, ao completar uma semana do início da contagem, já haviam sido registrados 700 *downloads*, determine:

a) após quantas semanas, no mínimo não foram registrados mais *downloads* desse aplicativo;

b) após quantas semanas do início o número de *downloads* foi máximo e qual foi esse número.

32 Um fazendeiro possui 150 metros de um rolo de tela para cercar um jardim retangular e um pomar, aproveitando, como um dos lados, parte de um muro, conforme indica a figura seguinte:



a) Para cercar com a tela a maior área possível, quais devem ser os valores de **x** e **y**?

b) Qual seria a resposta, caso não fosse possível aproveitar a parte do muro indicada, sendo necessário cercá-la com a tela? Nesse caso, em que percentual ficaria reduzida a área máxima da superfície limitada pelo jardim e pelo pomar reunidos?

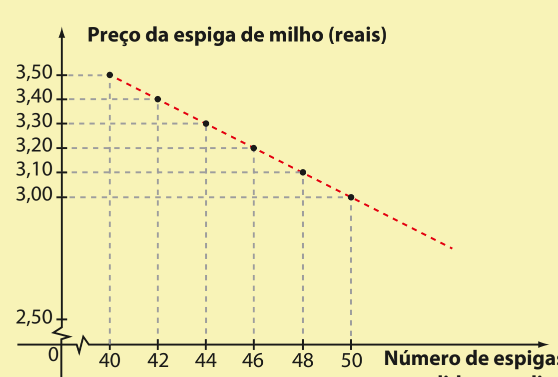
33 Entre todos os retângulos de perímetro 20 cm, determine aquele cuja área é máxima. Qual é essa área?

34 Considere todos os pares ordenados (x, y), com $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$, tais que $x - y = 2$.
Quais os valores de **x** e **y** de modo que a soma dos quadrados de **x** e de **y** seja a menor possível? Qual é o valor encontrado para essa soma?

TROQUE **IDEIAS**

A receita máxima

Ana vende milho verde em uma praia do litoral brasileiro. Durante o primeiro mês de uma temporada de verão, Ana observou que, quando o preço da espiga de milho é fixado em R$ 3,50, são vendidas 40 unidades por dia. Procurando aumentar sua arrecadação, Ana fez algumas reduções no preço da espiga que acarretaram um aumento nas vendas. Nessa relação entre preço e número de espigas vendidas, ela pôde verificar que, para cada R$ 0,10 de desconto, o número de espigas vendidas por dia aumentava em duas unidades, como mostra o gráfico ao lado (o desconto máximo praticado foi de R$ 1,50 e podem ser oferecidos descontos segundo múltiplos de R$ 0,05).



a) Considerando linear a relação entre o preço (**y**) e o número (**x**) de espigas de milho vendidas, encontre a lei da função representada pelo gráfico.

b) Copie no caderno e complete a tabela seguinte, que relaciona o preço da espiga de milho, o número de unidades vendidas por dia e a receita (arrecadação) gerada.

Preço da espiga (R$)	Número de espigas vendidas por dia	Receita diária (R$)
3,50		
3,40		
3,30		
3,00		
2,90		
2,80		
2,50		

c) Ao analisar a tabela, Ana ficou interessada em saber qual o preço a ser cobrado pela espiga que proporcionaria a maior receita possível, isto é, a receita máxima. Use seus conhecimentos para resolver esse problema. Ao final, você deverá determinar:

i) o preço a ser cobrado pela unidade de espiga;

ii) a quantidade de espigas vendidas por esse preço;

iii) a receita gerada nessas condições.

Esboço da parábola

Muitas vezes, é interessante fazer um esboço do gráfico da parábola sem montar toda a tabela de pares (x, y) que satisfazem a lei da função quadrática. Esse esboço reúne elementos da parábola como vértice, interseções com o eixo **x** (se houver), que fornecem os zeros reais da função, e interseção com o eixo **y**. Esses elementos nos permitem analisar aspectos importantes das funções que as representam, como o sinal, os intervalos de crescimento e decrescimento, o ponto de máximo (ou de mínimo) etc.

Acompanhe, no roteiro abaixo, os passos para fazer o esboço da parábola:

- O sinal do coeficiente **a** define a concavidade da parábola.
- As raízes (ou zeros) definem os pontos em que a parábola intersecta o eixo Ox.
- O vértice $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ indica o ponto de mínimo (se $a > 0$) ou o de máximo (se $a < 0$).
- A reta que passa por **V** e é paralela ao eixo Oy é o eixo de simetria da parábola. Veja um pouco mais sobre o eixo de simetria da parábola na página 114.
- Para $x = 0$, temos $y = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$; então $(0, c)$ é o ponto em que a parábola corta o eixo Oy.

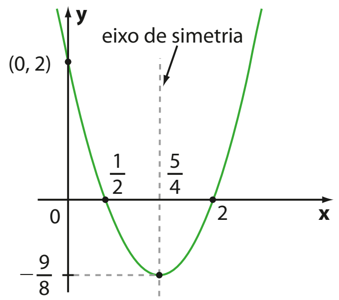
Veja os exemplos a seguir.

EXEMPLO **11**

Façamos o esboço do gráfico da função quadrática dada por $y = 2x^2 - 5x + 2$.

Características:

- concavidade voltada para cima, pois $a = 2 > 0$
- raízes: $2x^2 - 5x + 2 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$ ou $x = 2$
- vértice: $V = \left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{\Delta}{4a}\right) = \left(\dfrac{5}{4}, -\dfrac{9}{8}\right)$
- interseção com o eixo Oy: $(0, c) = (0, 2)$



Note que $\text{Im} = \left\{y \in \mathbb{R} \,\middle|\, y \geqslant -\dfrac{9}{8}\right\}$.

Observe que **f** é crescente se $x > \dfrac{5}{4}$ e decrescente se $x < \dfrac{5}{4}$.

PENSE NISTO:

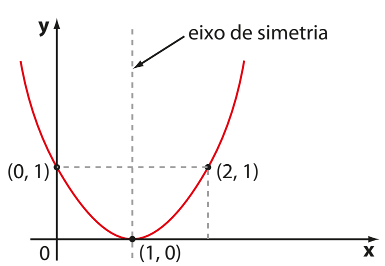
Se a função quadrática tem duas raízes reais e distintas, qual é a relação existente entre elas e a abscissa do vértice?

EXEMPLO **12**

Vamos fazer o esboço do gráfico da função quadrática dada por $y = x^2 - 2x + 1$.

Características:

- concavidade voltada para cima, pois $a = 1 > 0$
- raízes $x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ (raiz dupla)
- vértice: $V = \left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{\Delta}{4a}\right) = (1, 0)$
- interseção com o eixo Oy: $(0, c) = (0, 1)$



Note que $\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 0\}$.

Observe que **f** é crescente se $x > 1$ e decrescente se $x < 1$.

PENSE NISTO:

Se a função quadrática tem uma raiz real dupla, qual é a relação existente entre essa raiz e a abscissa do vértice?

EXEMPLO **13**

Vamos fazer o esboço do gráfico da função quadrática dada por $y = -x^2 - x - 3$.

Características:

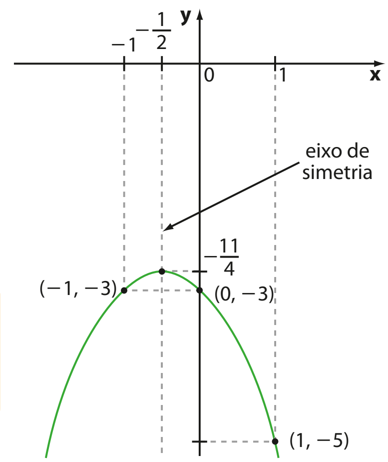
- concavidade voltada para baixo, pois $a = -1 < 0$
- zeros: $-x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow \nexists x$ real, pois $\Delta < 0$
- vértice: $V = \left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{\Delta}{4a}\right) = \left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{11}{4}\right)$
- interseção com o eixo Oy: $(0, c) = (0, -3)$

Como temos apenas dois pontos, é recomendável obter mais alguns, por exemplo:

$$x = 1 \Rightarrow y = -5;\ (1, -5)$$

$$x = -1 \Rightarrow y = -3;\ (-1, -3) \text{ etc.}$$

Note que $\text{Im} = \left\{y \in \mathbb{R} \,\middle|\, y \leqslant -\frac{11}{4}\right\}$.



PENSE NISTO:

Na parábola desse exemplo, qual é o outro valor de **x** correspondente a $y = -5$?

EXEMPLO **14**

Vamos determinar a lei da função quadrática cujo esboço do gráfico está representado ao lado.

As raízes da função quadrática são -3 e 0; então sua lei, na forma fatorada, é:

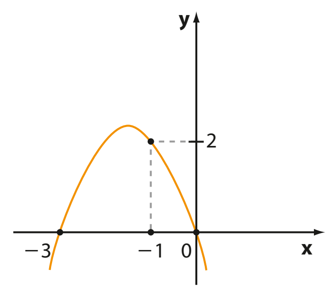
$$y = a \cdot (x + 3) \cdot (x - 0)$$

Para $x = -1$, temos $y = 2$, então:

$$2 = a(-1 + 3) \cdot (-1 - 0) \Rightarrow 2 = -2a \Rightarrow a = -1$$

Daí:

$$y = -1(x + 3) \cdot x \Rightarrow y = -x^2 - 3x$$



EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

35 Faça o esboço do gráfico das funções dadas pelas leis seguintes, com domínio em $\mathbb{R}$, destacando o conjunto imagem.

a) $y = x^2 - 6x + 8$

b) $y = -2x^2 + 4x$

c) $y = x^2 - 4x + 4$

d) $y = (x - 3) \cdot (x + 2)$

36 Esboce o gráfico de cada uma das funções dadas pelas leis a seguir, com domínio real, e forneça também o conjunto imagem:

a) $y = -x^2 + \frac{1}{4}$

b) $y = x^2 + 2x + 5$

c) $y = -3x^2$

37 Faça o esboço do gráfico de cada função quadrática definida pela lei dada, destacando os intervalos em que a função é crescente ou decrescente:

a) $y = 4x^2 - 2x$

b) $y = -2x^2 + 4x - 5$

c) $y = -x^2 - 2x - 1$

d) $y = -x^2 + 2x + 8$

38 Um biólogo desejava comparar a ação de dois fertilizantes. Para isso, duas plantas **A** e **B** da mesma espécie, que nasceram no mesmo dia, foram desde o início tratadas com fertilizantes diferentes.

Durante vários dias ele acompanhou o crescimento dessas plantas, medindo, dia a dia, suas alturas. Ele observou que a planta **A** cresceu linearmente, à taxa de 2,5 cm por dia; e a altura da planta **B** pode ser modelada pela função dada por $y = \frac{20x - x^2}{6}$, em que **y** é a altura medida em centímetros e **x** o tempo medido em dias.

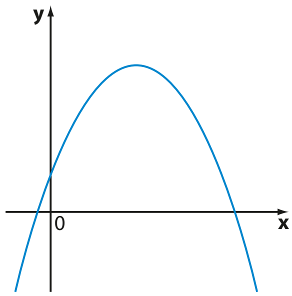
a) Obtenha a diferença entre as alturas dessas plantas com 2 dias de vida.

b) Qual é a lei da função que representa a altura (**y**) da planta **A** em função de **x** (número de dias)?

c) Determine o dia em que as duas plantas atingiram a mesma altura e qual foi essa altura.

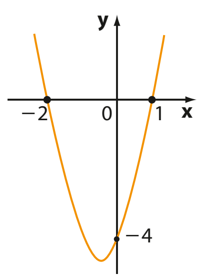
d) Calcule a taxa média de variação do crescimento das plantas **A** e **B** do 1º ao 4º dia.

39 A parábola seguinte representa a função dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$. Determine o sinal dos coeficientes **a**, **b** e **c**.

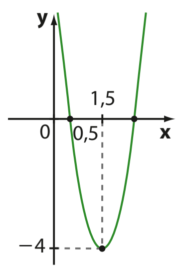


40 Determine a lei da função que cada gráfico a seguir representa:

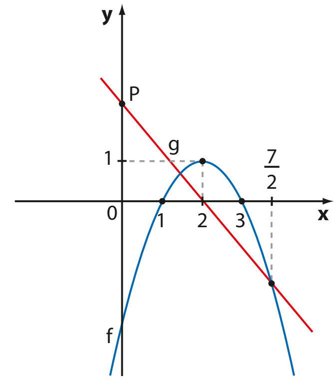
a)



b)



41 A figura a seguir mostra os gráficos de duas funções, **f** e **g**.



a) Usando a forma fatorada, obtenha a lei que define **f**.

b) Qual é a lei que define **g**?

c) Qual é a ordenada do ponto **P**?

42 Determine, em cada caso, a lei que define a função quadrática:

a) de raízes 4 e −2 e cujo vértice da parábola correspondente é o ponto (1, 9);

b) de raiz dupla igual a $\sqrt{3}$ e cujo gráfico intersecta o eixo Oy em (0, 3);

c) cujo gráfico contém os pontos (−1, −4), (1, 2) e (2, −1).

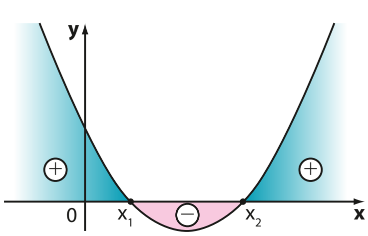
Sinal

Consideremos uma função quadrática dada por $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ e determinemos os valores de **x** para os quais **y** é negativo e os valores de **x** para os quais **y** é positivo.

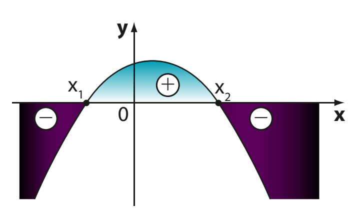
Conforme o sinal do discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$, podem ocorrer os seguintes casos:

$\Delta > 0$

Nesse caso, a função quadrática admite duas raízes reais distintas ($x_1 \neq x_2$). A parábola intersecta o eixo Ox em dois pontos, e o sinal da função é o indicado nos gráficos abaixo:



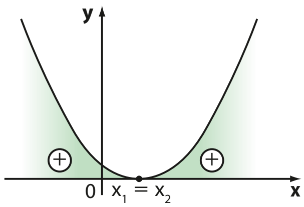
$a > 0$
$y > 0 \Leftrightarrow x < x_1$ ou $x > x_2$
$y < 0 \Leftrightarrow x_1 < x < x_2$



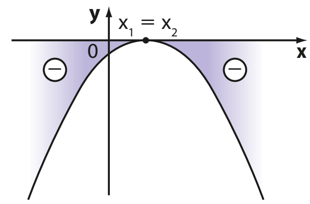
$a < 0$
$y > 0 \Leftrightarrow x_1 < x < x_2$
$y < 0 \Leftrightarrow x < x_1$ ou $x > x_2$

$\Delta = 0$

Nesse caso a função quadrática admite duas raízes reais iguais ($x_1 = x_2$). A parábola tangencia o eixo Ox, isto é, intersecta o eixo em um único ponto, e o sinal da função é o indicado nos gráficos abaixo:



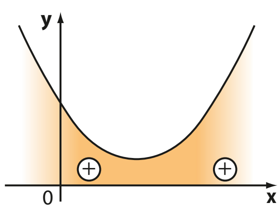
$a > 0$
$y > 0, \forall x \neq x_1$
$\nexists x$ tal que $y < 0$



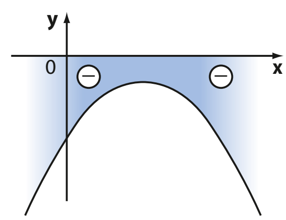
$a < 0$
$y < 0, \forall x \neq x_1$
$\nexists x$ tal que $y > 0$

$\Delta < 0$

Nesse caso, a função quadrática não admite raízes reais. A parábola não intersecta o eixo Ox e o sinal da função é o indicado nos gráficos abaixo:



$a > 0$
$y > 0, \forall x$
$\nexists x$ tal que $y < 0$



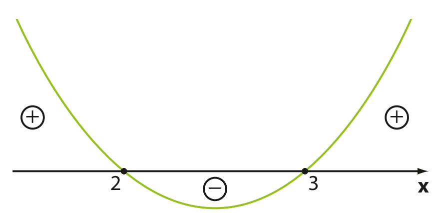
$a < 0$
$y < 0, \forall x$
$\nexists x$ tal que $y > 0$

EXEMPLO 15

Vamos estudar o sinal de $y = x^2 - 5x + 6$.
Temos:
$a = 1 > 0 \Rightarrow$ parábola com concavidade voltada para cima
$\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 24 = 1 > 0 \Rightarrow$ dois zeros reais distintos

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow x_1 = 2 \text{ e } x_2 = 3$$

Assim: $y > 0 \Leftrightarrow x < 2$ ou $x > 3$
$y < 0 \Leftrightarrow 2 < x < 3$

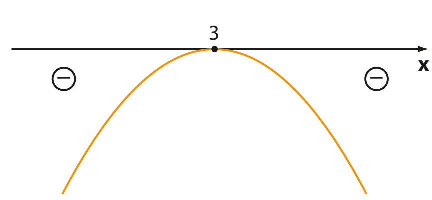


EXEMPLO 16

Vamos estudar o sinal de $y = -x^2 + 6x - 9$.
Temos:
$a = -1 < 0 \Rightarrow$ parábola com concavidade voltada para baixo
$\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 36 = 0 \Rightarrow$ dois zeros reais iguais

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 \pm 0}{-2} = 3$$

Assim: $y < 0, \forall x \neq 3$
$\nexists x$ tal que $y > 0$

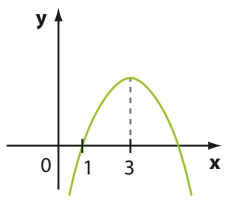


EXERCÍCIOS

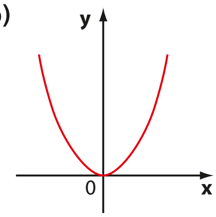
FAÇA NO CADERNO

43 Faça o estudo do sinal de cada função, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, cujo gráfico está representado a seguir.

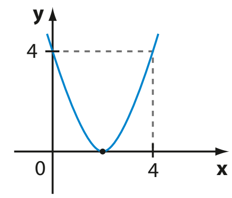
a)



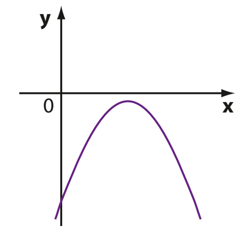
b)



c)



d)



44 Faça o estudo de sinal de cada uma das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definidas pelas seguintes leis:

a) $y = -3x^2 - 8x + 3$

b) $y = 4x^2 + x - 5$

c) $y = 9x^2 - 6x + 1$

d) $y = 2 - x^2$

e) $y = -x^2 + 2x - 1$

f) $y = 3x^2 - x + 4$

g) $y = 3x^2$

h) $y = 4x^2 + 8x$

Inequações

Vamos retomar a situação 1 da introdução deste capítulo.

Vimos que a lei que expressa o número (**y**) de jogos do campeonato em função do número (**x**) de clubes é:

$$y = x^2 - x$$

Suponhamos que a Confederação Brasileira de Futebol (CBF), ao organizar um campeonato, perceba que só há datas disponíveis para a realização de no máximo 150 jogos. Quantos clubes poderão participar?

Para responder a essa questão, temos de resolver a **inequação**:

$$x^2 - x \leqslant 150$$

que equivale a $x^2 - x - 150 \leqslant 0$.

Esse é um exemplo de uma inequação do 2º grau, conteúdo que passaremos a estudar agora.

O processo de resolução de uma inequação do 2º grau está baseado no estudo do sinal da função do 2º grau envolvida na desigualdade. É importante observar a analogia entre o processo que será apresentado e um dos processos usados para resolver inequações do 1º grau, como vimos no capítulo anterior.

Acompanhe os exemplos seguintes:

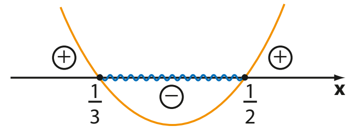
EXEMPLO 17

Para resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $6x^2 - 5x + 1 \leqslant 0$, fazemos o seguinte:

Chamamos de **y** a função quadrática no 1º membro: $y = 6x^2 - 5x + 1$. Depois, estudamos o sinal de **y**:

$a = 6 > 0$, $\Delta = 1 > 0$, raízes: $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$.

Sinal
$y > 0 \Leftrightarrow \left(x < \frac{1}{3} \text{ ou } x > \frac{1}{2}\right)$
$y < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$



A inequação pergunta: "para que valores de **x** temos $y \leqslant 0$?".

Temos: $\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$ ou $S = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{1}{3} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\right\}$

EXEMPLO 18

Para resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $x^2 + x \geqslant 2x^2 + 1$, vamos escrever todos os termos da inequação em um dos membros, por exemplo, o 1º membro:

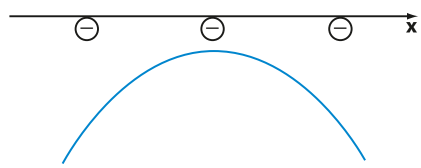
$$x^2 + x - 2x^2 - 1 \geqslant 0$$
$$-x^2 + x - 1 \geqslant 0$$

Agora, estudamos o sinal de $y = -x^2 + x - 1$.

Temos:

$a = -1 \Rightarrow$ parábola com concavidade voltada para baixo

$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3 \Rightarrow$ não há zeros reais



Concluindo, $y < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

A inequação pergunta: "para que valores de **x** temos $y \geqslant 0$?".

Dessa forma, $\nexists x \in \mathbb{R}$ tal que $y \geqslant 0$, ou seja, $S = \varnothing$.

EXEMPLO 19

Vamos resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $2x^2 + 3x + 1 > -x(1 + 2x)$.

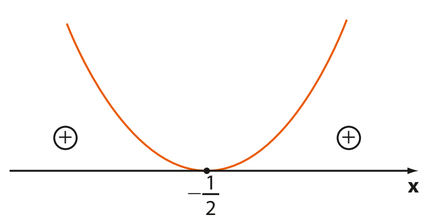
Temos:

$$2x^2 + 3x + 1 + x(1 + 2x) > 0$$
$$4x^2 + 4x + 1 > 0$$

Vamos estudar o sinal de $y = 4x^2 + 4x + 1$.

$a = 4 > 0$, $\Delta = 0$, raiz: $-\frac{1}{2}$

Sinal
$y > 0$, $\forall x \neq -\frac{1}{2}$
$\nexists x \in \mathbb{R}$ tal que $y < 0$



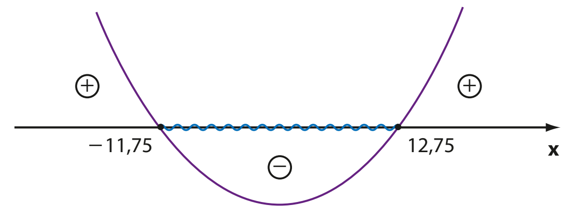
A inequação pergunta: "para que valores de **x** temos $y > 0$?".

Portanto, $x \neq -\frac{1}{2}$ ou $S = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \neq -\frac{1}{2}\right\} = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

EXEMPLO 20

Vamos retomar a situação descrita na página 111; é preciso resolver a inequação $x^2 - x - 150 \leqslant 0$.

As raízes de $y = x^2 - x - 150$ são $\frac{1 \pm \sqrt{601}}{2}$; considerando $\sqrt{601} \simeq 24{,}5$, obtemos como raízes 12,75 e −11,75 e o sinal de **y** é dado ao lado.



Como devemos ter $y \leqslant 0$, segue que $-11{,}75 \leqslant x \leqslant 12{,}75$.

Mas, neste problema, **x** é o número de times e, deste modo, só pode assumir valores inteiros positivos.

O maior inteiro nestas condições é $x = 12$ (12 clubes).

Nesse caso, haveria $12 \cdot 11 = 132$ jogos no campeonato.

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

45 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes inequações:

a) $x^2 - 11x - 42 < 0$

b) $3x^2 + 5x - 2 > 0$

c) $-x^2 + 4x + 5 \geqslant 0$

d) $-4x^2 + 12x - 9 < 0$

e) $3x^2 + x + 5 > 0$

f) $9x^2 - 24x + 16 \leqslant 0$

46 Determine, em $\mathbb{R}$, o conjunto solução das seguintes inequações:

a) $-x^2 + 10x - 25 > 0$

b) $x^2 - 8x + 15 \leqslant 0$

c) $-x^2 - 2x > 15$

d) $x^2 + 2x < 35$

e) $-x^2 - 4x - 3 \leqslant 0$

f) $x^2 - 3x < 1$

47 Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações:

a) $x \cdot (x - 3) \geqslant 0$

b) $x^2 < 16$

c) $9x^2 \geqslant 3x$

d) $-4x^2 < 9$

e) $\left(\sqrt{3}\right)^2 > x^2$

f) $x \cdot (x + 3) < x \cdot (2 - x)$

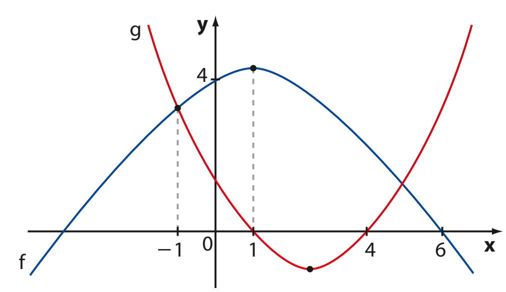
48 Na fabricação de certo produto, o lucro mensal de uma empresa, em milhares de reais, é dado por $L(x) = -\frac{3x^2}{4} + 90x - 1\,500$, sendo **x** o número de milhares de peças vendidas no mês. Determine:

a) o lucro mensal máximo na venda dessas peças;

b) para que valores de **x** a empresa tem prejuízo, isto é, $L < 0$;

c) em que intervalo deve variar o número de peças vendidas a fim de que o lucro supere 1 milhão de reais. Use $\sqrt{600} \simeq 24{,}5$.

49 Na figura a seguir tem-se os gráficos das funções quadráticas **f** e **g**.



Determine:

a) as raízes de **f**;

b) o vértice de cada uma das parábolas que representam essas funções;

c) o conjunto solução da inequação $g(x) < 0$;

d) o conjunto solução da inequação $f(x) \geqslant 0$.

50 Todos os pontos do gráfico da função quadrática $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = mx^2 - 2x + m$ estão localizados abaixo do eixo das abscissas. Determine os possíveis valores reais de **m**.

DESAFIO

(Enem-MEC) Um professor, depois de corrigir as provas de sua turma, percebeu que várias questões estavam muito difíceis. Para compensar, decidiu utilizar uma função polinomial **f**, de grau menor que 3, para alterar as notas **x** da prova para notas $y = f(x)$, da seguinte maneira:

- A nota zero permanece zero.
- A nota 10 permanece 10.
- A nota 5 passa a ser 6.

A expressão da função $y = f(x)$ a ser utilizada pelo professor é:

a) $y = -\dfrac{1}{25}x^2 + \dfrac{7}{5}x$

b) $y = -\dfrac{1}{10}x^2 + 2x$

c) $y = \dfrac{1}{24}x^2 + \dfrac{7}{12}x$

d) $y = \dfrac{4}{5}x + 2$

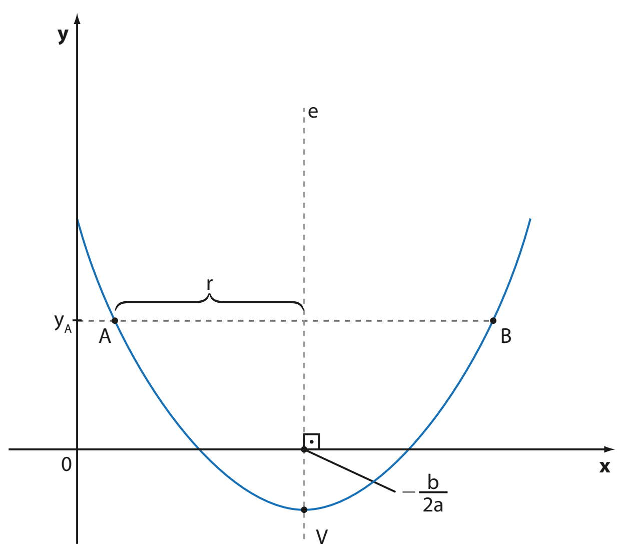
e) $y = x$

UM POUCO MAIS SOBRE — Eixo de simetria da parábola

Consideremos a parábola que representa a função dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$. Seu vértice **V** tem abscissa $x_V = -\dfrac{b}{2a}$.

Consideremos a reta **e** que passa por **V** e é perpendicular ao eixo Ox. Vamos demonstrar que essa reta é o eixo de simetria da parábola.

Tomando um ponto **A** da parábola à distância **r** da reta **e** (conforme mostra a figura ao lado), as coordenadas de **A** são $\left(-\dfrac{b}{2a} - r,\ y_A\right)$.



Tomando a função quadrática na forma canônica:

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

e considerando que **A** pertence à parábola, temos:

$$y_A = f\left(-\frac{b}{2a} - r\right) = a\left[\left(-\frac{b}{2a} - r + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] =$$

$$= a\left[(-r)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left[(r)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] =$$

$$= a\left[\left(-\frac{b}{2a} + r + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = f\left(-\frac{b}{2a} + r\right)$$

Assim, provamos que o ponto **B** da parábola que tem ordenada igual à de **A** também está à distância **r** da reta **e**, pois $x_B = -\dfrac{b}{2a} + r$, ou seja, **A** e **B** são simétricos em relação à reta **e**.