CAPÍTULO 6

Função definida por várias sentenças

Função definida por mais de uma sentença

Você sabe o que é o imposto de renda? Sabe como ele é calculado?

Todo mês, ao receber seu salário, muitos trabalhadores brasileiros do mercado formal de trabalho notam, em seu holerite, que há um desconto de parte desse salário, um tributo sobre o rendimento (imposto de renda) pago ao Governo Federal.

Em meados de 2015, o imposto de renda era calculado com base na seguinte tabela:

Tabela de incidência mensal
(a partir do mês de abril do ano calendário de 2015)

Rendimento mensal (em R$)	Alíquota (em %)	Parcela a deduzir (em R$)
Até 1 903,98	—	—
De 1 903,99 até 2 826,65	7,5	142,80
De 2 826,66 até 3 751,05	15	354,80
De 3 751,06 até 4 664,68	22,5	636,13
Acima de 4 664,68	27,5	869,36

Fonte: Receita Federal do Brasil. Disponível em: <idg.receita.fazenda.gov.br/acesso-rapido/tributos/irpf-imposto-de-renda-pessoa-fisica#tabelas-para-atualiza-o-do-custo-de-bens-e-direitos>. Acesso em: 4 mar. 2016.

A tabela mostra a alíquota de imposto e a parcela a deduzir para cada faixa de rendimento mensal. Para se calcular o imposto de renda (IR), é necessário calcular uma porcentagem do salário e, do valor obtido, subtrair uma parcela. Acompanhe os exemplos:

- Um trabalhador com rendimentos mensais de R$ 1 500,00 fica isento do pagamento do imposto, isto é, IR = 0;
- Um trabalhador com rendimento de R$ 2 500,00 no mês tem seu IR assim calculado (veja a 2ª faixa de rendimento mensal da tabela):

  1º) $7{,}5\%$ de $2\,500 = \dfrac{7{,}5}{100} \cdot 2\,500 = 187{,}50$

  2º) $187{,}50 - 142{,}80 = 44{,}70$, isto é, IR = R$ 44,70

- Um trabalhador com salário mensal de R$ 4 000,00 tem seu IR assim calculado (veja a 4ª faixa de rendimento mensal da tabela):

  1º) $22{,}5\%$ de $4\,000 = \dfrac{22{,}5}{100} \cdot 4\,000 = 900$

  2º) $900 - 636{,}13 = 263{,}87$, isto é, IR = R$ 263,87

- Um trabalhador cujo salário mensal é R$ 8 000,00 tem seu IR assim calculado (veja a última faixa de rendimento mensal da tabela):

  1º) 27,5% de 8 000 $= \frac{27,5}{100} \cdot 8000 = 2200$

  2º) 2 200 − 869,36 = 1 330,64, isto é, IR = R$ 1 330,64

Em geral, se o salário do trabalhador é **x**, seu imposto de renda mensal **y** é assim calculado:

- Se $0 < x \leqslant 1903,98$, então $y = 0$
- Se $1903,99 \leqslant x \leqslant 2826,65$, então $y = 0,075 \cdot x - 142,80$
- Se $2826,66 \leqslant x \leqslant 3751,05$, então $y = 0,15 \cdot x - 354,80$
- Se $3751,06 \leqslant x \leqslant 4664,68$, então $y = 0,225 \cdot x - 636,13$
- Se $x > 4664,68$, então $y = 0,275 \cdot x - 869,36$

Podemos observar que **y** é função de **x** e essa relação é estabelecida por cinco sentenças. Usa-se uma sentença ou outra dependendo do intervalo em que o valor de **x** se enquadra. Esse é um exemplo de **função definida por mais de uma sentença.**

Veja o exemplo seguinte.

PENSE NISTO:

Como são obtidos os valores da "parcela a deduzir" na 3ª coluna da tabela do imposto de renda?

EXEMPLO 1

Considere agora o quadro a seguir, que apresenta parte da conta de água de uma residência que gastou 17 m³ de água. Além do valor a pagar, a conta mostra como calculá-lo em função do consumo de água (em m³). Existe uma tarifa mínima e diferentes faixas de tarifação.

Companhia de saneamento – Tarifa de água/m³

Faixa de consumo (em m³)	Tarifas (em reais)	Consumo	Valor (em reais)
até 10	6,00	tarifa mínima	6,00
de 11 a 20	0,93 por m³	7	6,51
de 21 a 50	2,33 por m³		
acima de 50	2,98 por m³		
		Total	12,51

Observe que, à medida que o consumo aumenta, o valor do metro cúbico de água fica mais caro. É uma forma de privilegiar famílias cujo consumo é menor com tarifas mais baixas, estimulando-as a diminuir o consumo de água e alertando a população da necessidade do consumo mais consciente da água.

Veja qual seria o valor da conta se o consumo dobrasse, isto é, se passasse a 34 m³ de água:

$$\underbrace{6,00}_{\text{primeiros } 10\ m^3} + \underbrace{0,93 \cdot 10}_{\text{de } 11\ m^3 \text{ a } 20\ m^3} + \underbrace{2,33 \cdot 14}_{\text{de } 21\ m^3 \text{ a } 34\ m^3} = 6,00 + 9,30 + 32,62 = 47,92$$

PENSE NISTO:

Nesse exemplo, o valor da conta e o número de m³ consumidos são grandezas diretamente proporcionais?

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1 Seja f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida pela lei:

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x < 0 \\ x + 1, \text{ se } x \geq 0 \end{cases}$$

Calcule $f(-3)$, $f\left(-\sqrt{2}\right)$, $f(0)$, $f(2)$ e $f(1000)$.

Solução:

- $-3 < 0 \Rightarrow f(-3) = 1$
- $-\sqrt{2} < 0 \Rightarrow f\left(-\sqrt{2}\right) = 1$
- $0 \geq 0 \Rightarrow f(0) = 0 + 1 = 1$
- $2 \geq 0 \Rightarrow f(2) = 2 + 1 = 3$
- $1000 \geq 0 \Rightarrow f(1000) = 1000 + 1 = 1001$

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

1 Seja f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x \geq 2 \\ -1, \text{ se } x < 2 \end{cases}$.

Calcule:

a) $f(0)$

b) $f(-1)$

c) $f\left(\sqrt{3}\right)$

d) $f\left(\sqrt{5}\right)$

e) $f(2)$

2 Seja f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida pela lei:

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 3, \text{ se } x \geq 0 \\ 4x^2 - x + 5, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Qual é o valor de:

a) $f(1)$?

b) $f(-1)$?

c) $f(3) + f(-3)$?

3 Seja f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, \text{ se } x < -2 \\ x + 3, \text{ se } -2 \leq x < 1 \\ x^2 - 5, \text{ se } x \geq 1 \end{cases}$$

Calcule o valor de:

a) $f(-3) + f(0)$

b) $f\left(\sqrt{3}\right) - f(-1)$

c) $f(-2) \cdot f(2)$

4 Seja f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 5, \text{ se } x < 1 \\ 2x - 3, \text{ se } x \geq 1 \end{cases}$$

Determine os possíveis valores de **x** correspondentes a:

a) $f(x) = 0$

b) $f(x) = -3$

5 Uma operadora de celular oferece dois planos a seus clientes:

- Plano I: valor fixo mensal de R$ 80,00 para até 120 minutos de ligações locais. Caso o cliente exceda esse tempo, o custo do minuto adicional é de R$ 1,20.
- Plano II: não há mensalidade e cada ligação local custa R$ 0,80.

Para quantos minutos de ligações locais no mês é indiferente contratar qualquer um dos planos?

6 É comum observarmos em casas de fotocópias promoções do tipo:

- Até 100 cópias: R$ 0,10 por cópia.
- Acima de 100 cópias (de um mesmo original): R$ 0,07 por cópia excedente.

Determine:

a) o valor pago por 130 cópias de um mesmo original;

b) a lei que define a função preço **p** pago pela reprodução de **x** cópias de um mesmo original.

c) refaça os itens *a* e *b*, supondo que, acima de 100 cópias, seja cobrado R$ 0,07 por cópia (e não apenas para as excedentes).

7 Em um encarte de supermercado consta uma promoção de amaciante de roupas, a saber:

- preço da unidade: R$ 6,80
- acima de três unidades: R$ 1,40 de desconto por unidade

a) Qual será a despesa total na compra de 2, 3, 4 e 5 unidades desse amaciante?

b) Seja **x** ($x \in \mathbb{N}$) o número de amaciantes comprados e **y** o valor total (em reais) gasto. Qual é a lei da função que relaciona **x** e **y**?

8 No quadro seguinte estão representados os valores do metro cúbico (m^3) de água praticados em residências de certo município, de acordo com a faixa de consumo.

Faixa de consumo (m^3)	Tarifa (R$)
Até 20 m^3	1,20 por m^3
De 21 m^3 a 50 m^3	1,80 por m^3 excedente
Acima de 50 m^3	2,90 por m^3 excedente

a) Determine o valor da conta de água de duas residências, $\mathbf{R_1}$ e $\mathbf{R_2}$, cujos consumos foram 28 m^3 e 35 m^3, respectivamente.

b) Qual o consumo correspondente a uma conta de água no valor de R$ 112,80?

c) Qual é a lei da função que relaciona o valor total (**v**), em reais, ao consumo de **x** metros cúbicos.

Gráfico

Vamos construir gráficos de algumas funções definidas por várias sentenças.

EXEMPLO 2

Para construir o gráfico da função f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x < 0 \\ x + 1, \text{ se } x \geqslant 0 \end{cases}$, podemos construir o gráfico correspondente a cada sentença e reuni-los.

- 1º passo: construímos o gráfico da função constante dada por $f(x) = 1$, mas só consideramos a parte em que $x < 0$ (figura 1);
- 2º passo: construímos o gráfico da função afim dada por $f(x) = x + 1$, mas só consideramos a parte em que $x \geqslant 0$ (figura 2);
- 3º passo: reunimos os dois gráficos em um só (figura 3).

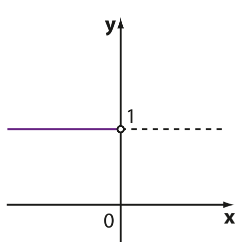


figura 1

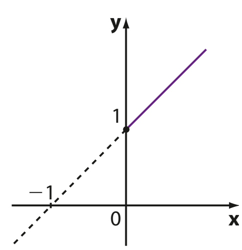


figura 2

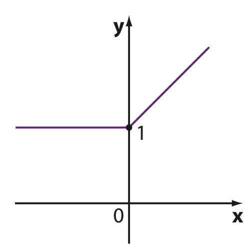


figura 3

Observe que $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 1\}$.

EXEMPLO 3

Vamos construir o gráfico da função **f** de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, \text{ se } x \leqslant 1 \\ 2, \text{ se } 1 < x \leqslant 2. \\ 4 - x, \text{ se } x > 2 \end{cases}$$

PENSE NISTO:

As retas dadas pelas equações $y = 1 - x$ e $y = 4 - x$ se intersectam?

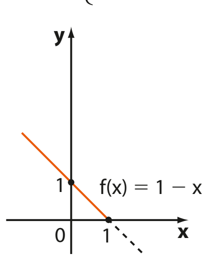


figura 1

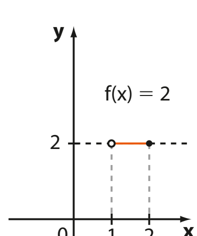


figura 2

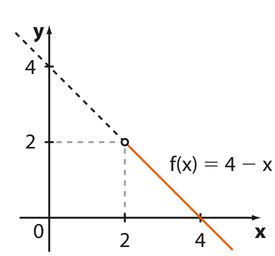


figura 3

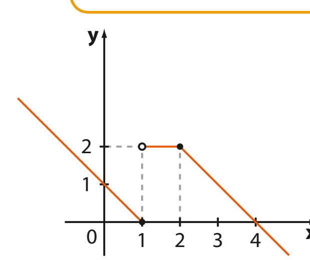


figura 4

Note que $Im = \mathbb{R}_+$.

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

9 Faça o gráfico das seguintes funções f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, destacando seu conjunto imagem.

a) $f(x) = \begin{cases} 2, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -1, \text{ se } x < 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2x, \text{ se } x \geqslant 1 \\ 2, \text{ se } x < 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} -x + 1, \text{ se } x \geqslant 3 \\ 4, \text{ se } x < 3 \end{cases}$

10 Construa os gráficos das seguintes funções definidas em $\mathbb{R}$ e forneça o conjunto imagem.

a) $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x < 2 \\ 3, \text{ se } x = 2 \\ 2, \text{ se } x > 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, \text{ se } x \geqslant 1 \\ 4 - x, \text{ se } x < 1 \end{cases}$

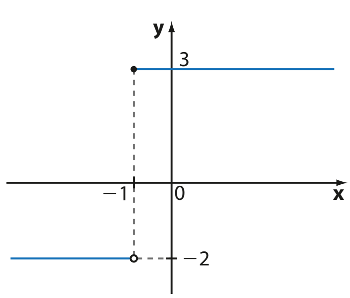
c) $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, \text{ se } x \geqslant 0 \\ x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$

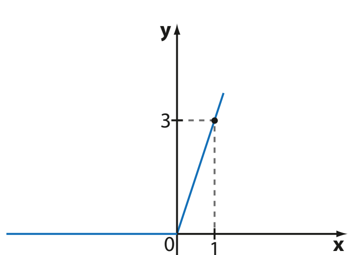
e) $f(x) = \begin{cases} x - 2; \text{ se } x \geqslant 2 \\ -x + 2; \text{ se } x < 2 \end{cases}$

11 Forneça a lei de cada uma das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ cujos gráficos estão abaixo representados:

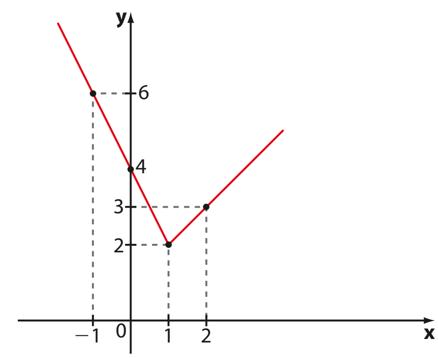
a)



b)



12 Seja f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função representada no gráfico abaixo:

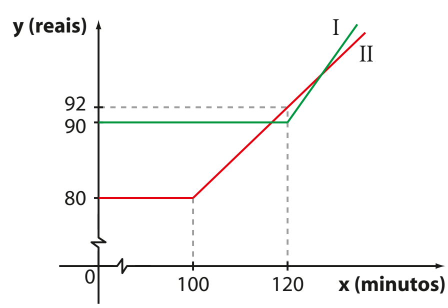


a) Qual é a lei que define **f**?

b) Resolva a equação f(x) = 5. Verifique no gráfico as soluções encontradas.

c) Para que valores reais de **k** a equação f(x) = k apresenta soluções?

13 Uma empresa de telefonia móvel oferece a seus clientes dois planos mensais. No plano Alfa, cobra R$ 80,00 para até 100 minutos de ligação para números de outras operadoras e R$ 0,60 por minuto excedente. No plano Beta, cobra R$ 90,00 por até 120 minutos de ligações para outras operadoras e R$ 0,80 por minuto excedente.
O gráfico seguinte mostra a relação entre o valor mensal pago e o número de minutos de ligações para outras operadoras, para os dois planos:



a) Associe os gráficos I e II aos respectivos planos.

b) Determine o valor pago por um cliente **A** que usar 90 minutos mensais no plano Alfa e o valor pago por um cliente **B** que usar 140 minutos nesse mesmo plano, por mês.

c) Uma conta de R$ 154,00, no plano Beta, corresponde a quantos minutos de ligações?

d) Existem dois intervalos de tempo para os quais é mais vantajoso optar pelo plano Alfa. Localize-os no gráfico, determinando-os em seguida. (Considere nos cálculos um número inteiro de minutos.)

Módulo de um número real

O conceito de módulo de um número real é importante para a Matemática. Ele é necessário, por exemplo, para definir $\sqrt{x^2}$. Se $x \geqslant 0$, $\sqrt{x^2} = x$, e, se $x \leqslant 0$, $\sqrt{x^2} = -x$. Veja os exemplos seguintes:

I) $\sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$

II) $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$

III) $\sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5$

IV) $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$

V) $\sqrt{0^2} = \sqrt{0} = 0$

Note que $x \geqslant 0$ em (I), (III) e (V), e $x < 0$ em (II) e (IV). Para definir $\sqrt{x^2}$, podemos usar o conceito de módulo de um número real, já apresentado no capítulo 2 e que será aprofundado agora.

Dado um número real **x**, chama-se **módulo** ou **valor absoluto de x**, e se indica por $|x|$, o número real não negativo tal que:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geqslant 0 \\ \text{ou} \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

PENSE NISTO:

É possível definir

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ se } x > 0 \\ \text{ou} \\ -x, \text{ se } x \leqslant 0 \end{cases} ?$$

Isso significa que:

- o módulo de um número real não negativo é igual ao próprio número;
- o módulo de um número real negativo é igual ao oposto desse número;
- o módulo de um número real qualquer é sempre maior ou igual a zero.

Vejamos alguns exemplos:

- $|2| = 2$
- $|0| = 0$
- $|-\sqrt{3}| = \sqrt{3}$
- $|\underbrace{3 - \pi}_{\text{negativo}}| = -(3 - \pi) = \pi - 3$
- $|-7| = 7$
- $\left|-\dfrac{4}{3}\right| = \dfrac{4}{3}$
- $|\underbrace{\sqrt{7} - \sqrt{2}}_{\text{positivo}}| = \sqrt{7} - \sqrt{2}$

OBSERVAÇÃO

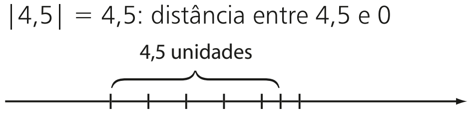
Com a definição de módulo de um número real, podemos escrever: $\sqrt{x^2} = |x|$. Assim, temos:

- $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$
- $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$
- $\sqrt{3^2} = |3| = 3$
- $\sqrt{5^2} = |5| = 5$

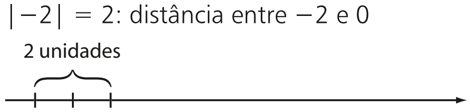
Interpretação geométrica

O módulo de um número real **x** representa a distância, na reta real, entre **x** e 0 (origem). Veja estes exemplos:

- $|4{,}5| = 4{,}5$: distância entre 4,5 e 0



- $|-2| = 2$: distância entre -2 e 0



- $|0| = 0$: nesse caso, **x** é a própria origem e, assim, a distância é nula.

Observe que, para todo número real **x**, a distância entre 0 e **x** é sempre expressa por um número real positivo ou nulo.

Propriedades

Vamos conhecer algumas propriedades do módulo de um número real.

I) $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geqslant 0$

Demonstração:

É imediata, pois: se $x > 0$, $|x| = x > 0$

se $x < 0$, $|x| = -x > 0$

e se $x = 0$, $|x| = 0$

II) $|x|^2 = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$

Demonstração:

Se $x \geqslant 0$, $|x| = x$ e, então, $|x|^2 = |x| \cdot |x| = x \cdot x = x^2$

Se $x < 0$, $|x| = -x$ e, então, $|x|^2 = |x| \cdot |x| = (-x) \cdot (-x) = x^2$

III) Seja $a \in \mathbb{R}_+$

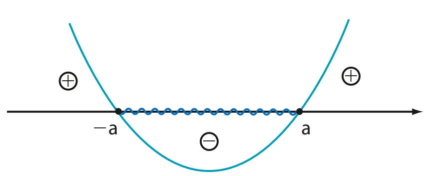
$|x| \leqslant a \Leftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a$

Demonstração:

$|x| \leqslant a \overset{a \geqslant 0}{\Longleftrightarrow} |x|^2 \leqslant a^2$

Pela propriedade **II**, temos: $x^2 \leqslant a^2 \Leftrightarrow x^2 - a^2 \leqslant 0$.

Como **a** é fixo, podemos pensar nessa desigualdade como uma inequação do 2º grau, na incógnita **x**. Estudando o sinal de $y = x^2 - a^2$, temos:



Assim, como queremos $x^2 - a^2 \leqslant 0$, temos que $-a \leqslant x \leqslant a$, isto é, $|x| \leqslant a \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a, \forall a \in \mathbb{R}_+$.

Exemplo:

$|x| \leqslant 2 \Leftrightarrow -2 \leqslant x \leqslant 2$

PENSE NISTO:

Qual é a interpretação geométrica para esse exemplo?

IV) Seja $a \in \mathbb{R}_+$

$|x| \geqslant a \Leftrightarrow x \leqslant -a$ ou $x \geqslant a$

Demonstração:

$|x| \geqslant a \overset{a \geqslant 0}{\Longleftrightarrow} |x|^2 \geqslant a^2$

Pela propriedade **II**, temos:

$x^2 \geqslant a^2 \Leftrightarrow x^2 - a^2 \geqslant 0$

Resolvendo essa inequação do 2º grau na incógnita **x**, temos:

$x \leqslant -a$ ou $x \geqslant a$, isto é, $|x| \geqslant a \Leftrightarrow x \leqslant -a$ ou $x \geqslant a$

Exemplo:

$|x| > 4 \Leftrightarrow x < -4$ ou $x > 4$

PENSE NISTO:

Qual é a interpretação geométrica para esse exemplo?

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

14 Calcule:

a) $|-9|$

b) $\left|\frac{5}{3}\right|$

c) $\left|-\frac{1}{2}\right|$

d) $|0|$

e) $|-\sqrt{2}|$

f) $|0{,}83|$

g) $\sqrt{8^2}$

h) $\sqrt{(-8)^2}$

i) $\sqrt{\left(-\frac{2}{9}\right)^2}$

15 Calcule:

a) $|-5-8|$

b) $|2 \cdot (-3)|$

c) $|0{,}3 - 0{,}1|$

d) $|0{,}1 - 0{,}3|$

e) $\left|\frac{3}{5} - 1\right|$

f) $\left|-\frac{4}{3} + 1\right|$

g) $-|-\sqrt{7}|$

h) $|4| \cdot |-2|$

i) $|4 \cdot (-2)|$

16 Calcule o valor das expressões:

a) $A = |3 - \sqrt{5}| - |\sqrt{5} - 3|$

b) $B = |-\sqrt{2} - 1| + 2 \cdot |1 - \sqrt{2}|$

c) $C = ||\sqrt{10}| - |-3||$

17 Para $x \in \mathbb{R}$, $x > 4$, calcule o valor de cada expressão seguinte:

a) $\dfrac{|x-4|}{4-x}$

b) $3 + \dfrac{|x-4|}{x-4}$

c) $\dfrac{|x|}{x} + \dfrac{|x-4|}{x-4}$

d) $\dfrac{|4-x|}{x-4}$

18 Seja $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$. São verdadeiras as igualdades?

I) $|x| + |y| = |x + y|$

II) $|x| - |y| = |x - y|$

III) $|x| \cdot |y| = |x \cdot y|$

IV) $|x|^3 = x^3$

Prove a(s) que for(em) verdadeira(s); para a(s) falsa(s), dê um contraexemplo.

Função modular

Chama-se **função modular** a função **f** de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que associa cada número real **x** ao seu módulo (valor absoluto), isto é, **f** é definida pela lei $f(x) = |x|$.

Utilizando o conceito de módulo de um número real, a função modular pode ser assim definida:

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

PENSE NISTO:

Considerando **f** a função modular, é possível que tenhamos $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$ reais, com $x_1 \neq x_2$, mas $f(x_1) = f(x_2)$?

Gráfico

Para construir o gráfico da função modular, procedemos assim:

- 1º passo: construímos o gráfico da função $f(x) = x$, mas só consideramos a parte em que $x \geqslant 0$ (figura 1), que é a bissetriz do 1º quadrante.
- 2º passo: construímos o gráfico da função $f(x) = -x$, mas só consideramos a parte em que $x < 0$ (figura 2), que é a bissetriz do 2º quadrante.
- 3º passo: reunimos os dois gráficos anteriores (figura 3).

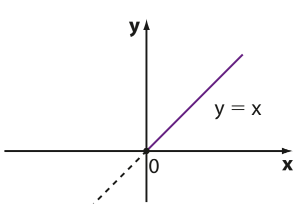


figura 1

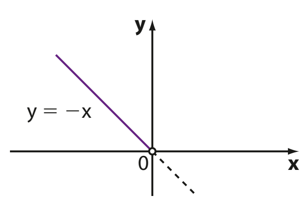


figura 2

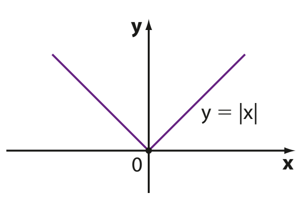


figura 3

Observe que o conjunto imagem de **f** é $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 0\}$, pois $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| \geqslant 0$.

Outros gráficos

I) A partir do gráfico da função **f** dada por $y = |x|$, podemos construir o gráfico de outras funções definidas por uma lei do tipo $y = |x| + k$, em que $k \in \mathbb{R}$.

Vamos considerar, como exemplo, a função **g** de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $g(x) = |x| + 1$. Temos:

- Se $x \geqslant 0$, então $|x| = x$ e $g(x) = x + 1$ (figura 1).
- Se $x < 0$, então $|x| = -x$ e $g(x) = -x + 1$ (figura 2).

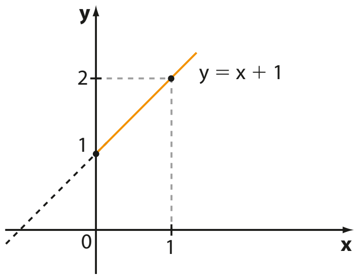


figura 1

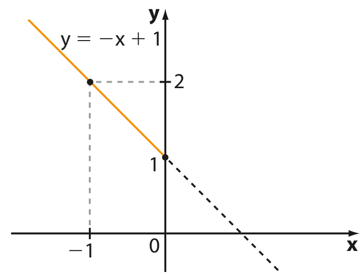


figura 2

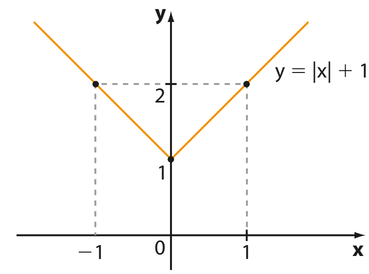
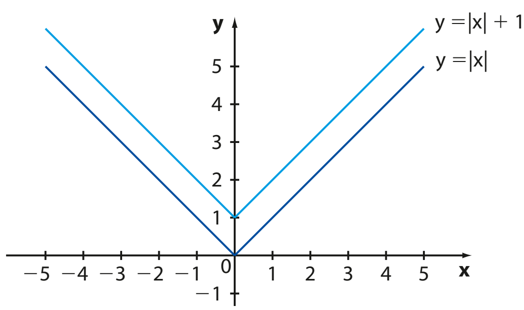


figura 3

Observe que o gráfico obtido para a função **g** definida por $y = |x| + 1$ (figura 3) corresponde ao gráfico da função modular ($y = |x|$), deslocado, verticalmente, uma unidade para cima. A esse deslocamento damos o nome de **translação vertical**. Acompanhe os dois gráficos feitos, em um mesmo plano.



PENSE NISTO:

É possível determinar o conjunto imagem da função real $y = |x| + 1$ sem construir seu gráfico?

II) A partir do gráfico da função dada por $y = |x|$, podemos construir o gráfico de outras funções definidas por uma lei do tipo $y = |x + k|$, em que $k \in \mathbb{R}$.

Consideremos, por exemplo, a função **f**, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = |x - 2|$.

Como $|x - 2| = \begin{cases} x - 2, \text{ se } x - 2 \geqslant 0, \text{ isto é, } x \geqslant 2 \\ -x + 2, \text{ se } x - 2 < 0, \text{ isto é, } x < 2 \end{cases}$, procedemos assim:

- 1º passo: construímos o gráfico de $y = x - 2$, mas só consideramos a parte em que $x \geqslant 2$ (figura 1).
- 2º passo: construímos o gráfico de $y = -x + 2$, mas só consideramos a parte em que $x < 2$ (figura 2).
- 3º passo: reunimos os dois gráficos anteriores (figura 3).

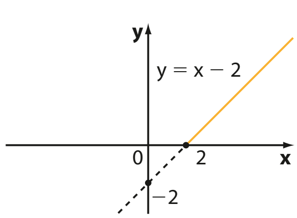


figura 1

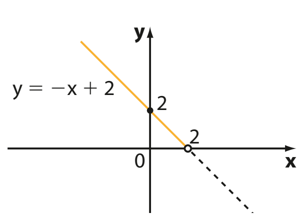


figura 2

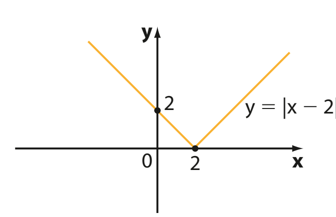
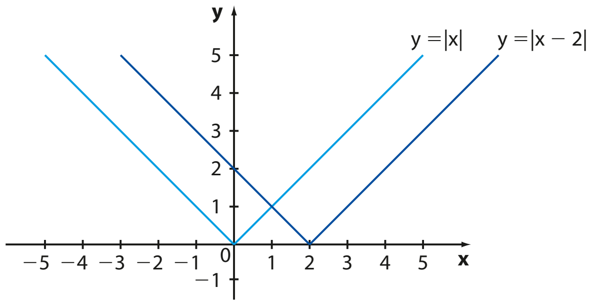


figura 3

Note que o gráfico obtido na figura 3 corresponde ao gráfico da função modular ($y = |x|$) transladado, na horizontal, duas unidades para a direita. Veja os dois gráficos construídos em um mesmo plano.



PENSE NISTO:

Como você representaria o gráfico de $y = |x + 2|$?

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

19 Construa o gráfico das seguintes funções definidas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, dadas por:

a) $y = |x| + 2$

b) $y = |x| - 3$

c) $y = |x| + 5$

d) $y = |x| - \frac{1}{2}$

20 Construa os gráficos das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definidas por:

a) $y = |x - 1|$

b) $y = |x + 1|$

c) $y = |x + 3|$

d) $y = |x - 3|$

21 A partir do gráfico de $y = |x|$, represente a sequência de gráficos necessária para construir o gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x - 1{,}5| + 2$.

22 Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida pela lei $f(x) = |2x - 4| + 3$.

a) Qual é o valor de $f(0) + f(1)$?

b) Sem fazer o gráfico, é possível encontrar o conjunto imagem de **f**. Determine-o.

Equações modulares

Notemos uma propriedade do módulo dos números reais:

- $|x| = 2 \Rightarrow |x|^2 = 2^2 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = +2 \text{ ou } x = -2$
- $|x| = \frac{3}{7} \Rightarrow |x|^2 = \left(\frac{3}{7}\right)^2 \Rightarrow x^2 = \frac{9}{49} \Rightarrow x = +\frac{3}{7} \text{ ou } x = -\frac{3}{7}$

De modo geral, sendo **k** um número real positivo, temos:

$$|x| = k \Rightarrow x = k \text{ ou } x = -k$$

Por exemplo: $|x| = 5 \Rightarrow x = -5$ ou $x = 5$

Utilizando essa propriedade, vejamos como solucionar algumas equações modulares.

PENSE NISTO:

Qual é a interpretação geométrica para o exemplo ao lado?

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

2 Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $|3x - 1| = 2$.

Solução:

Temos: $|3x - 1| = 2 \Rightarrow \begin{cases} 3x - 1 = 2 \Rightarrow x = 1 \\ \text{ou} \\ 3x - 1 = -2 \Rightarrow x = -\frac{1}{3} \end{cases}$

$S = \left\{1, -\frac{1}{3}\right\}$

3 Resolva a equação $|2x + 3| = x + 2$, em $\mathbb{R}$.

Solução:

Para todo **x** real, sabemos que $|2x + 3| \geqslant 0$. Assim, para que a igualdade seja possível, devemos ter $x + 2 \geqslant 0$, ou seja, $x \geqslant -2$ (*).

Supondo $x \geqslant -2$, temos:

$$|2x + 3| = x + 2 \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3 = x + 2 \Rightarrow x = -1 \\ \text{ou} \\ 2x + 3 = -x - 2 \Rightarrow x = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

- $x = -1$ satisfaz (*)
- $x = -\frac{5}{3}$ satisfaz (*)

$$S = \left\{-1, -\frac{5}{3}\right\}$$

PENSE NISTO:

Qual é o conjunto solução da equação $|2x + 3| = -2$?

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

23 Resolva, em $\mathbb{R}$, as equações:

a) $|x| = 4$
b) $|x| = \frac{3}{2}$
c) $|x| = 0$
d) $|x| = -2$
e) $|x| = -\frac{5}{3}$
f) $|x|^2 = 9$

24 Resolva, em $\mathbb{R}$, as equações seguintes:

a) $|3x - 2| = 1$
b) $|x + 6| = 4$
c) $|x^2 - 2x - 5| = 3$
d) $|x^2 - 4| = 5$
e) $||2x - 1| - 3| = 2$

25 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações:

a) $|-2x + 5| = x$
b) $|3x - 1| = x + 2$
c) $|10 - 2x| = 2x - 5$
d) $|3x - 4| = x^2$
e) $|2x - 1| = 2x - 1$
f) $|x - 3| = 3 - x$
g) $|x|^2 - 3|x| = 10$

26 Determine os valores reais de **p** a fim de que a equação $|4x - 5| = p - 3$ admita solução.

27 Um *site* de compras coletivas lançou uma promoção válida para os doze primeiros dias de um certo mês. A lei seguinte representa o número (**n**) de dezenas de cupons vendidos no dia **t**; com $t \in \{1, 2, ..., 12\}$:

$n(t) = 3 \cdot |18 - 2t| + 40$

a) Quantos cupons foram vendidos no dia 3? E no dia 10?

b) Em que dia foram vendidos 520 cupons?

c) Em que dia foi vendida a menor quantidade de cupons e qual foi essa quantidade?

28 Em um laboratório de Física foi feito um experimento cujo objetivo era medir, em centímetros, a deformação de uma mola elástica. Tal experimento foi executado por 5 duplas de alunos, cada uma das quais repetiu-o por duas vezes, em condições idênticas. No quadro seguinte encontram-se as duas medições obtidas pelas duplas, com exceção da 2ª medição feita pela dupla **E**.

Dupla	1ª medição (em cm)	2ª medição (em cm)
A	4,175	4,189
B	4,190	4,181
C	4,179	4,185
D	4,177	4,188
E	4,176	

O professor calculou, para cada dupla, o módulo **m** da diferença das medidas obtidas e considerou aceitável os casos em que **m** não superasse 0,01 cm.

a) Entre as duplas **A, B**, **C**, **D**, quais tiveram resultado considerado aceitável?

b) Determine o valor que não consta no quadro, sabendo que, para a dupla **E**, obteve-se $m = 0{,}012$.

Inequações modulares

A resolução de algumas inequações modulares tem por base a aplicação das seguintes propriedades do módulo de um número real, já estudadas neste capítulo.

Para $a \in \mathbb{R}$ e $a > 0$, temos:

- $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$
- $|x| > a \Leftrightarrow x < -a$ ou $x > a$

EXEMPLO 4

Vamos utilizar a propriedade para resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $|x - 1| < 4$.

Devemos ter: $-4 < x - 1 < 4 \Rightarrow -3 < x < 5$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 5\}$$

EXEMPLO 5

Para resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $|2x - 3| > 7$, devemos ter:

$$\begin{cases} 2x - 3 < -7 \Rightarrow 2x < -4 \Rightarrow x < -2 \\ \text{ou} \\ 2x - 3 > 7 \Rightarrow 2x > 10 \Rightarrow x > 5 \end{cases}$$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 5\}$

PENSE NISTO:

Qual é, em $\mathbb{R}$, o conjunto solução da inequação $|2x - 3| > -7$?

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

29 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes inequações:

a) $|x| > 6$

b) $|x| \leqslant 4$

c) $|x| < \frac{1}{2}$

d) $|x| \geqslant \sqrt{2}$

e) $|x| > -2$

f) $|x| \leqslant -2$

g) $|x| \leqslant 0$

h) $|x| \geqslant 0$

30 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes inequações:

a) $|x + 3| > 7$

b) $|2x - 1| \leqslant 3$

c) $|-x + 1| \geqslant 1$

d) $|5x - 3| < 12$

31 No ano passado, Neto participou de um curso de inglês em que, todo mês, era submetido a uma avaliação. Como Neto é fanático por Matemática, propôs uma lei para representar, mês a mês, seu desempenho nessas provas.

Na expressão $f(x) = 3 + \frac{|x - 6|}{2}$, f(x) representa a nota obtida por Neto no exame realizado no mês **x** ($x = 1$ corresponde a janeiro; $x = 2$, a fevereiro, e assim por diante).

a) Em que meses sua nota ficou acima de 5?

b) Em que mês Neto obteve seu pior desempenho? Qual foi essa nota?

32 Obtenha, em cada caso, o domínio $D \subset \mathbb{R}$ da função, definida por:

a) $f(x) = \sqrt{|x| - 2}$

b) $g(x) = \sqrt{|x - 1|}$

DESAFIO

Os pontos (x, y) do plano cartesiano que satisfazem a igualdade $|x| + |y| = 1$ determinam (ou limitam) uma região. Qual é a área dessa região?

Sugestão: Faça a análise em 4 casos.