CAPÍTULO 7

Função exponencial

Introdução

Os dados do último censo demográfico, ocorrido em 2010, indicaram que, naquele ano, a população brasileira era de 190 755 799 habitantes e estava crescendo à taxa aproximada de 1,2% ao ano. A taxa de crescimento populacional leva em consideração a natalidade, a mortalidade, as imigrações etc.

RUBENS CHAVES/PULSAR IMAGENS

O censo é realizado a partir da coleta de dados efetuada pelos recenseadores, que visitam cada domicílio.

Suponha que tal crescimento seja mantido para a década seguinte, isto é, de 2011 a 2020. Nessas condições, qual seria a população brasileira ao final de **x** anos (x = 1, 2, ..., 10), contados a partir de 2010?

Para facilitar os cálculos, vamos aproximar a população brasileira em 2010 para 191 milhões de habitantes.

- Passado 1 ano a partir de 2010 (em 2011), a população, em milhões, seria:

$$\underbrace{191}_{\substack{\text{população}\\ \text{em 2010}}} + \overbrace{\underset{\downarrow\ \frac{1,2}{100} = 0,012}{1,2\%} \cdot 191}^{\text{aumento}} = 191 + 0,012 \cdot 191 = 1,012 \cdot 191$$

  Aproximadamente 193,29 milhões de habitantes.

- Passados 2 anos a partir de 2010 (em 2012), a população, em milhões, seria:

$$\underbrace{1,012 \cdot 191}_{\substack{\text{população}\\ \text{em 2011}}} + \underbrace{0,012 \cdot 1,012 \cdot 191}_{\text{aumento}} = 1,012 \cdot 191\,(1 + 0,012) = 1,012^2 \cdot 191$$

  Aproximadamente 195,61 milhões de habitantes.

- Passados 3 anos a partir de 2010 (em 2013), a população, em milhões, seria:

$$\underbrace{1,012^2 \cdot 191}_{\substack{\text{população}\\ \text{em 2012}}} + \underbrace{0,012 \cdot 1,012^2 \cdot 191}_{\text{aumento}} = 1,012^2 \cdot 191(1 + 0,012) = 1,012^3 \cdot 191$$

  Aproximadamente 197,96 milhões de habitantes.

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

- Passados **x** anos, contados a partir de 2010, (x = 1, 2, ..., 10), a população brasileira, em milhões de habitantes, seria:

$$\boxed{1,012^x \cdot 191}$$

A função que associa a população (**y**), em milhões de habitantes, ao número de anos (**x**), transcorridos a partir de 2010, é:

$$y = 1{,}012^x \cdot 191$$

que é um exemplo de **função exponencial**, a qual passaremos a estudar agora.

Inicialmente, vamos fazer uma revisão sobre potências, raízes e suas propriedades – assunto já estudado no Ensino Fundamental II.

Potência de expoente natural

Dados um número real **a** e um número natural **n**, com $n \geqslant 2$, chama-se **potência de base a** e **expoente n** o número $\mathbf{a^n}$ que é o produto de **n** fatores iguais a **a**.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\textbf{n} \text{ fatores}}$$

Dessa definição decorre que:

$$a^2 = a \cdot a, \quad a^3 = a \cdot a \cdot a, \quad a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a \quad \text{etc.}$$

Há dois casos especiais:

- Para $n = 1$, definimos $a^1 = a$, pois com um único fator não se define o produto.
- Para $n = 0$ e supondo $a \neq 0$, definimos $a^0 = 1$.

Vejamos alguns exemplos de potências:

- $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$
- $\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$
- $(-6)^4 = (-6) \cdot (-6) \cdot (-6) \cdot (-6) = 1\,296$
- $3^1 = 3$
- $\left(\frac{3}{10}\right)^0 = 1$
- $(3{,}2)^2 = 3{,}2 \cdot 3{,}2 = 10{,}24$
- $0^5 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$
- $(-8)^1 = -8$
- $7^0 = 1$
- $(1{,}5)^3 = 1{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot 1{,}5 = 3{,}375$

As calculadoras científicas auxiliam no cálculo de potências, que pode ser bastante trabalhoso.

Observe a tecla y^x, em que **y** representa a base da potência, e **x**, seu expoente.

- Para calcular $1{,}3^5$, pressionamos:

1 . 3 → y^x → 5 → = → 3.71293

Obtemos 3,71293.

- Para calcular $2{,}3^8$, pressionamos:

2 . 3 → y^x → 8 → = → 783.1098528

Obtemos o valor aproximado 783,1098528.

Cabe ressaltar que existem muitos modelos de calculadora e, em alguns casos, uma ou outra das operações anteriores poderá ser invertida.

Em alguns modelos, a tecla y^x é substituída pela tecla ^.

Propriedades

Sendo **a** e **b** números reais e **m** e **n** naturais, valem as seguintes propriedades:

I) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

II) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $(a \neq 0 \text{ e } m \geqslant n)$

III) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

IV) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ $(b \neq 0)$

V) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Estas propriedades podem ser usadas para simplificar expressões. Veja o exemplo a seguir.

EXEMPLO 1

Supondo $a \cdot b \neq 0$, simplifiquemos a expressão:

$$y = \frac{(a^2b^3)^5}{(a^2)^3b^7}$$

Aplicando as propriedades estudadas, temos:

$$y = \frac{a^{10}b^{15}}{a^6b^7} = a^{10-6}b^{15-7} = a^4b^8$$

OBSERVAÇÃO

Na definição de potência com expoente natural, foi estabelecido que $\forall a \in \mathbb{R}^*$, $a^0 = 1$. Isso garante a validade das propriedades apresentadas. Veja:

- Façamos $m = 0$, de acordo com a primeira propriedade:

$$a^0 \cdot a^n = a^{0+n} = a^n$$

Para que ocorra igualdade, devemos ter $a^0 = 1$.

- Façamos $m = n$, de acordo com a segunda propriedade:

Por um lado, $\dfrac{a^n}{a^n} = 1$, que é o quociente de dois números iguais.

Por outro lado, aplicando a propriedade, temos:

$$\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0$$

Convenciona-se, então, $a^0 = 1$.

Potência de expoente inteiro negativo

Vamos definir as potências de expoente inteiro negativo de modo que as propriedades estudadas no item anterior continuem valendo.

Observe os exemplos seguintes:

- $2^3 \cdot 2^{-3} = 2^{3+(-3)} = 2^0 = 1$; assim, $2^{-3} = \dfrac{1}{2^3}$
- $\dfrac{7^3}{7^5} = 7^{3-5} = 7^{-2}$

Por outro lado, temos: $\dfrac{7^3}{7^5} = \dfrac{\cancel{7}\cdot\cancel{7}\cdot\cancel{7}}{\cancel{7}\cdot\cancel{7}\cdot\cancel{7}\cdot 7 \cdot 7} = \dfrac{1}{7^2}$

Daí, $7^{-2} = \dfrac{1}{7^2}$

> **PENSE NISTO:**
> Por que esta definição não vale para $a = 0$?

Os cálculos acima sugerem a definição a seguir.

Dados um número real **a**, não nulo, e um número **n** natural, chama-se **potência de base a** e **expoente –n** o número $\mathbf{a^{-n}}$, que é o inverso de a^n.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Vejamos alguns exemplos:

- $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$
- $(-5)^{-2} = \frac{1}{(-5)^2} = \frac{1}{25}$
- $2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$
- $1^{-8} = \frac{1}{1^8} = \frac{1}{1} = 1$
- $(0,4)^{-2} = \left(\frac{4}{10}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{1}{\frac{4}{25}} = \frac{25}{4}$

Propriedades

As cinco propriedades enunciadas para potência de expoente natural são válidas para potência de expoente inteiro negativo, quaisquer que sejam os valores dos expoentes **m** e **n** inteiros.

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

1 Calcule:

a) 5^3

b) $(-5)^3$

c) 5^{-3}

d) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3$

e) $\left(\frac{1}{50}\right)^{-2}$

f) $\left(-\frac{11}{7}\right)^0$

g) $\left(\frac{3}{2}\right)^1$

h) $\left(-\frac{1}{2}\right)^0$

i) $-(-2)^5$

j) -10^2

k) 10^{-3}

l) $-\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$

2 Calcule:

a) $0,2^2$

b) $0,1^{-1}$

c) $3,4^1$

d) $(-4,17)^0$

e) $0,05^{-2}$

f) $1,25^{-1}$

g) $1,2^3$

h) $(-3,2)^2$

i) $0,6^3$

j) $0,08^{-1}$

k) $(-0,3)^{-1}$

l) $(-0,01)^{-2}$

3 Calcule o valor de cada uma das expressões:

a) $A = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot (-2)^3 + \left(-\frac{1}{2}\right)^1$

b) $B = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$

c) $C = -2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 + 1^{15} - (-2)^1$

d) $D = \left[\left(-\frac{5}{3}\right)^{-1} + \left(\frac{5}{2}\right)^{-1}\right]^{-1}$

e) $E = [3^{-1} - (-3)^{-1}]^{-1}$

f) $F = 6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 4 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^{-2}$

4 Escreva em uma única potência:

a) $\frac{11^3 \cdot (11^4)^2 \cdot 11}{11^6}$

b) $\frac{(2^4)^3 \cdot 2^7 \cdot 2^3}{(2^{11})^2}$

c) $\frac{10^{-2} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{-3}}{(0,01)^{-1}}$

d) $\frac{10 \cdot 10^{-5} \cdot (10^2)^{-3}}{(10^{-4})^3}$

e) $\frac{2^{3^2} \cdot 3^4}{3 \cdot (2^3)^2}$

5 Coloque em ordem crescente:

$A = (-2)^{-2} - 3 \cdot (0,5)^3$, $B = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$ e

$C = \frac{-\frac{5}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}}$.

6 Escreva em uma única potência:

a) a metade de 2^{100};

b) o triplo de 3^{20};

c) a oitava parte de 4^{32};

d) o quadrado do quíntuplo de 25^{10}.

7 Sendo $a = \frac{2^{48} + 4^{22} - 2^{46}}{4^3 \cdot 8^6}$, obtenha o valor de $\frac{1}{26} \cdot a$.

TROQUE IDEIAS

Notação científica

Números muito pequenos ou muito grandes são frequentes em estudos científicos e medições de grandezas, permeando várias áreas do conhecimento, como Física, Química, Astronomia, Biologia, Meio Ambiente etc. Observe alguns exemplos:

I) A massa do planeta Terra é de 5 980 000 000 000 000 000 000 000 kg.

II) A distância entre a Terra e a Lua é de 384 000 000 m.

III) A massa de um próton é de 0,00000000000000000000000001673 kg.

IV) Ano-luz é a distância percorrida pela luz em um ano, no vácuo, à velocidade aproximada de 300 000 km/s. Um ano-luz equivale a aproximadamente 9 460 530 000 000 km.

V) Quando o nível de ozônio no ar em certa região atinge 200 μg/m³, inicia-se o estado de atenção na região. Isso significa que cada metro cúbico de ar contém 0,0002 g de ozônio (1 grama corresponde a 1 milhão de microgramas).

A leitura desses números é facilitada quando são escritos em **notação científica**. Basicamente, trata-se de escrevê-los como o produto de um número real **a** $(1 \leqslant a < 10)$ e uma potência de base dez e expoente inteiro. Observe alguns exemplos:

- $62\,000\,000 = 6{,}2 \cdot 10\,000\,000 = 6{,}2 \cdot 10^7$
- $0{,}0000035 = \dfrac{3{,}5}{1\,000\,000} = \dfrac{3{,}5}{10^6} = 3{,}5 \cdot 10^{-6}$
- $15\,670\,000\,000 = 1{,}567 \cdot 10^{10}$
- $0{,}0008 = \dfrac{8}{10\,000} = \dfrac{8}{10^4} = 8 \cdot 10^{-4}$

A vantagem de escrever um número em notação científica é a rapidez no reconhecimento da ordem de grandeza desses números.

- Faça o que se pede:

a) Escreva os números presentes nos exemplos I, II, III, IV e V em notação científica.

b) Efetue as seguintes operações, escrevendo o resultado em notação científica:

i) $0{,}0000005 \cdot 42\,000\,000$

ii) $0{,}000000006 : 0{,}00015$

iii) $1\,300\,000\,000 \cdot 50\,000\,000\,000$

iv) $4\,500\,000 : 0{,}0009$

c) A distância média aproximada de Vênus ao Sol é de $1{,}082 \cdot 10^{11}$ m e a distância média aproximada da Terra ao Sol é de $149{,}6 \cdot 10^6$ km.

i) Qual planeta se encontra mais próximo do Sol?

ii) Qual é a diferença entre a maior e a menor distância em quilômetros? Escreva a resposta em notação científica.

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

A Terra e a Lua vistas de um satélite orbitando a 35 000 km de altura.

Fontes de pesquisa: *Atlas geográfico escolar*. 6ª ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2012.; *Parâmetros físicos e astronômicos*. Disponível em: <astro.if.ufrgs.br/dados.htm>. Acesso em: 4 mar. 2016.

Raiz n-ésima (enésima) aritmética

Dados um número real não negativo **a** e um número natural **n**, $n \geqslant 1$, chama-se **raiz enésima aritmética de a** o número real e não negativo **b** tal que $b^n = a$.

O símbolo $\sqrt[n]{a}$, chamado **radical**, indica a raiz enésima aritmética de **a**. Nele, **a** é chamado **radicando**, e **n**, **índice**.

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b \geqslant 0 \text{ e } b^n = a$$

Vejamos alguns exemplos:

- $\sqrt[2]{16} = \sqrt{16} = 4$, pois $4^2 = 16$
- $\sqrt[6]{0} = 0$, pois $0^6 = 0$
- $\sqrt[3]{27} = 3$, pois $3^3 = 27$
- $\sqrt[4]{16} = 2$, pois $2^4 = 16$

Da definição, decorre que para todo $a > 0$ e $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

Propriedades

Sendo **a** e **b** reais não negativos, **m** inteiro e **n** e **p** naturais não nulos, valem as seguintes propriedades:

I) $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$

II) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

III) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $(b \neq 0)$

IV) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

V) $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[p \cdot n]{a}$

A título de curiosidade, vamos apresentar a demonstração da segunda propriedade.

Seja $x = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} > 0$.

Temos: $x^n = \left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n \Rightarrow$

$\Rightarrow x^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{b}\right)^n \Rightarrow$

$\Rightarrow x^n = a \cdot b \xRightarrow{x > 0}$

$\xRightarrow{x > 0} x = \sqrt[n]{a \cdot b}$

Assim, $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$.

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

1 Simplifique:

a) $\sqrt{72} + 4\sqrt{8}$

b) $\left(2\sqrt{2}\right)^4$

Solução:

a) $\sqrt{72} + 4\sqrt{8} = \sqrt{3^2 \cdot 2^2 \cdot 2} + 4\sqrt{2^2 \cdot 2} = 2 \cdot 3\sqrt{2} + 4 \cdot 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2} + 8\sqrt{2} = 14\sqrt{2}$

b) $\left(2\sqrt{2}\right)^4 = 2^4 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^4 = 2^4 \cdot \sqrt{2^4} = 2^4 \cdot 2^2 = 2^6 = 64$

2 Racionalize o denominador das expressões:

a) $\dfrac{4}{\sqrt{2}}$

b) $\dfrac{4}{\sqrt{3}-1}$

PENSE NISTO:

No item *b* foi usado um produto notável. Identifique-o.

Solução:

Os denominadores nos itens *a* e *b* são números irracionais. Devemos obter uma expressão equivalente com denominador racional. Façamos:

a) $\dfrac{4}{\sqrt{2}} = \dfrac{4}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

b) $\dfrac{4}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{4}{\sqrt{3}-1} \cdot \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \dfrac{4\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}\right)^2 - 1^2} = \dfrac{4\left(\sqrt{3}+1\right)}{2} = 2\left(\sqrt{3}+1\right)$

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

8 Calcule:

a) $\sqrt{169}$

b) $\sqrt[3]{512}$

c) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{16}}$

d) $\sqrt{0{,}25}$

e) $\sqrt[3]{0{,}125}$

f) $\sqrt[5]{100\,000}$

g) $\sqrt[3]{1+\sqrt{49}}$

9 Simplifique os radicais seguintes:

a) $\sqrt{18}$

b) $\sqrt{54}$

c) $\sqrt[3]{54}$

d) $\sqrt{288}$

e) $\sqrt[4]{240}$

f) $\sqrt[3]{10^{12}}$

10 Efetue:

a) $\sqrt{32} + \sqrt{50}$

b) $\sqrt{200} - 3\sqrt{72} + \sqrt{12}$

c) $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{2}$

d) $\sqrt{1200} - 2\sqrt{48} + 3\sqrt{27}$

11 Racionalize o denominador das expressões seguintes:

a) $\dfrac{3}{\sqrt{6}}$

b) $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

c) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$

d) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{3}}$

e) $\dfrac{2}{\sqrt{2}+1}$

f) $\dfrac{\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$

g) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$

12 Efetue:

a) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{24}$

b) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{8}$

c) $\sqrt{48} : \sqrt{2}$

d) $\left(\sqrt{2}\right)^{16}$

e) $\left(3\sqrt{2}\right)^2$

f) $\sqrt{\sqrt{2^8}}$

g) $\left(\sqrt{7}+\sqrt{2}\right)^2$

h) $\left(3-\sqrt{2}\right)^2$

i) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2}$

Potência de expoente racional

Para dar significado às potências de expoente racional (como, por exemplo, $3^{\frac{1}{2}}$, $4^{\frac{3}{2}}$, $2^{\frac{1}{3}}$, ...) devemos lembrar que sua definição deve garantir a validade das propriedades operatórias já estudadas neste capítulo.

Observe os exemplos:

- $3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 3^1 = 3$; assim, $\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 3$, ou seja, $3^{\frac{1}{2}}$ é a raiz quadrada aritmética de 3, isto é, $\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$.
- $2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = 2^1 = 2$; assim, $\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 2$, ou seja, $2^{\frac{1}{3}}$ é a raiz cúbica aritmética de 2, isto é, $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$.

Os exemplos anteriores ilustram a seguinte definição:

Para $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $n \in \mathbb{N}^*$, temos $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

Acompanhe agora os cálculos seguintes:

- $8^{\frac{3}{2}} \cdot 8^{\frac{3}{2}} = 8^{\frac{3}{2} + \frac{3}{2}} = 8^{2 \cdot \frac{3}{2}} = 8^3$

  Assim, $\left(8^{\frac{3}{2}}\right)^2 = 8^3$ e, portanto, a raiz quadrada aritmética de 8^3 é igual a $8^{\frac{3}{2}}$, ou seja, $\sqrt{8^3} = 8^{\frac{3}{2}}$.

- $4^{\frac{2}{3}} \cdot 4^{\frac{2}{3}} \cdot 4^{\frac{2}{3}} = 4^{\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}} = 4^{3 \cdot \frac{2}{3}} = 4^2$

  Assim, $\left(4^{\frac{2}{3}}\right)^3 = 4^2$ e, portanto, a raiz cúbica aritmética de 4^2 é igual a $4^{\frac{2}{3}}$, ou seja, $\sqrt[3]{4^2} = 4^{\frac{2}{3}}$.

Essas considerações ilustram a seguinte definição:

Dados um número real positivo **a**, um número inteiro **m** e um número natural **n** ($n \geqslant 1$), chama-se **potência de base a** e **expoente** $\mathbf{\frac{m}{n}}$ a raiz enésima (n-ésima) aritmética de a^m.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Definição especial:

Sendo $\frac{m}{n} > 0$, define-se: $0^{\frac{m}{n}} = 0$.

Exemplos:

- $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$
- $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$
- $1^{\frac{7}{5}} = \sqrt[5]{1^7} = 1$
- $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$
- $64^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{64^{-1}} = \sqrt[3]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{4}$
- $2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
- $0^{\frac{11}{3}} = 0$
- $100^{-\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{100^{-1}} = \sqrt{\frac{1}{100}} = \frac{1}{10}$

Propriedades

Sendo **a** e **b** reais positivos e $\frac{p}{q}$ e $\frac{r}{s}$ racionais, valem as seguintes propriedades:

I) $a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q} + \frac{r}{s}}$

II) $a^{\frac{p}{q}} : a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q} - \frac{r}{s}}$

III) $(a \cdot b)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}} \cdot b^{\frac{p}{q}}$

IV) $(a : b)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}} : b^{\frac{p}{q}}$

V) $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s}}$

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

3 Calcule o valor de $y = 27^{\frac{2}{3}} - 16^{\frac{3}{4}}$.

Solução:

Podemos resolver de duas formas:

a) Escrevendo as potências na forma de raízes: $y = \sqrt[3]{27^2} - \sqrt[4]{16^3} = \sqrt[3]{729} - \sqrt[4]{4096} = 9 - 8 = 1$

b) Usando as propriedades das potências: $y = (3^3)^{\frac{2}{3}} - (2^4)^{\frac{3}{4}} = 3^2 - 2^3 = 9 - 8 = 1$

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

13 Calcule o valor de:

a) $27^{\frac{1}{3}}$

b) $256^{\frac{1}{2}}$

c) $32^{\frac{1}{5}}$

d) $64^{\frac{1}{3}}$

e) $576^{\frac{1}{2}}$

f) $0{,}25^{\frac{1}{2}}$

g) $\left(\frac{27}{1\,000}\right)^{\frac{1}{3}}$

h) $\left(\frac{1}{81}\right)^{0{,}25}$

i) $0{,}5^{0{,}5}$

14 Calcule o valor de:

a) $8^{\frac{2}{3}}$

b) $144^{-\frac{1}{2}}$

c) $(0{,}2)^{\frac{1}{2}}$

d) $16^{\frac{5}{2}}$

e) $27^{\frac{2}{3}}$

f) $0{,}09^{-\frac{1}{2}}$

g) $16^{\frac{3}{4}}$

h) $8^{-\frac{1}{2}}$

i) $0{,}001^{-\frac{2}{3}}$

15 Qual é o valor de a^b, sendo $a = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ e $b = \dfrac{2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} - 2^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}}$?

16 A área da superfície corporal (ASC) de uma pessoa, em metros quadrados, pode ser estimada pela fórmula de Mosteller:

$$ASC = \left(\frac{h \cdot m}{3\,600}\right)^{\frac{1}{2}}$$

em que **h** é a altura da pessoa em centímetros e **m** é a massa da pessoa em quilogramas.

a) Calcule a área da superfície corporal de um indivíduo de 1,69 m e 75 kg. Use $\sqrt{3} \simeq 1{,}7$.

b) Juvenal tem ASC igual a 2 m² e massa 80 kg. Qual é a altura de Juvenal?

c) Considere dois amigos, Rui e Eli, ambos com 81 kg de massa. A altura de Rui é 21% maior do que a altura de Eli. A ASC de Rui é x% maior do que a ASC de Eli. Qual é o valor de **x**?

Potência de expoente irracional

Vamos agora dar significado às potências do tipo a^x, em que $a \in \mathbb{R}_+^*$, e o expoente **x** é um número irracional. Por exemplo: $2^{\sqrt{2}}$, $2^{\sqrt{5}}$, $10^{\sqrt{3}}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{7}}$, $4^{-\sqrt{5}}$, ...

Seja a potência $2^{\sqrt{2}}$.

Como $\sqrt{2}$ é irracional, vamos considerar aproximações racionais para esse número por falta e por excesso e, com auxílio de uma calculadora científica, obter o valor das potências de expoentes racionais:

$$\sqrt{2} \simeq 1{,}41421356...$$

Por falta	Por excesso
$2^1 = 2$	$2^2 = 4$
$2^{1,4} \simeq 2{,}639$	$2^{1,5} = 2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \simeq 2{,}828$
$2^{1,41} \simeq 2{,}657$	$2^{1,42} \simeq 2{,}676$
$2^{1,414} \simeq 2{,}6647$	$2^{1,415} \simeq 2{,}6666$
$2^{1,4142} \simeq 2{,}6651$	$2^{1,4143} \simeq 2{,}6653$
⋮	⋮

Note que, à medida que os expoentes se aproximam de $\sqrt{2}$ por valores racionais, tanto por falta quanto por excesso, os valores das potências tendem a um mesmo valor, definido por $2^{\sqrt{2}}$, que é aproximadamente igual a 2,665.

Potência de expoente real

Seja $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

Já estudamos os diferentes tipos de potências a^x com **x** racional ou irracional.

Em qualquer caso, $a^x > 0$, isto é, toda potência de base real positiva e expoente real é um número positivo.

Para essas potências, continuam válidas todas as propriedades apresentadas nos itens anteriores deste capítulo.

Função exponencial

Chama-se **função exponencial** qualquer função **f** de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+^*$ dada por uma lei da forma $f(x) = a^x$, em que **a** é um número real dado, $a > 0$ e $a \neq 1$.

São exemplos de funções exponenciais: $y = 10^x$; $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$; $y = 2^x$; $y = \left(\frac{5}{6}\right)^x$ etc.

Observe que, na definição acima, há restrições em relação à base **a**.

De fato:

- Se $a < 0$, nem sempre o número a^x é real, como, por exemplo, $(-3)^{\frac{1}{2}} \notin \mathbb{R}$.
- Se $a = 0$, temos:

$$\begin{cases} \text{se } x > 0,\ y = 0^x = 0 \text{ (função constante)} \\ \text{se } x < 0, \text{ não se define } 0^x \text{ (por exemplo, } 0^{-3}) \\ \text{se } x = 0, \text{ não se define } 0^0 \end{cases}$$

- Se $a = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$, a função dada por $y = 1^x = 1$ é constante.

Gráfico

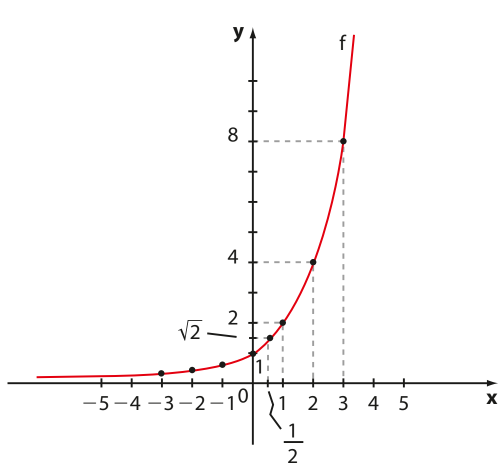
Vamos construir os gráficos de algumas funções exponenciais e, em seguida, observar algumas propriedades.

EXEMPLO 2

Vejamos como construir o gráfico da função **f**, cuja lei é $y = 2^x$.

Vamos usar o método de localizar alguns pontos do gráfico e ligá-los por meio de uma curva.

x	y
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
$\frac{1}{2}$	$\sqrt{2} \simeq 1{,}41$
1	2
2	4
3	8

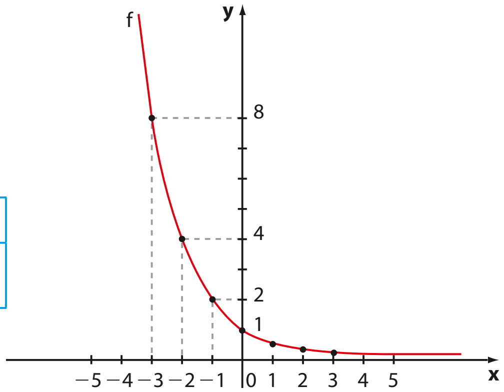


Observe que $\forall x \in \mathbb{R}$, $2^x > 0$ e, deste modo, $Im = \mathbb{R}_+^*$.

EXEMPLO 3

Vamos construir o gráfico da função **f**, cuja lei é $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$



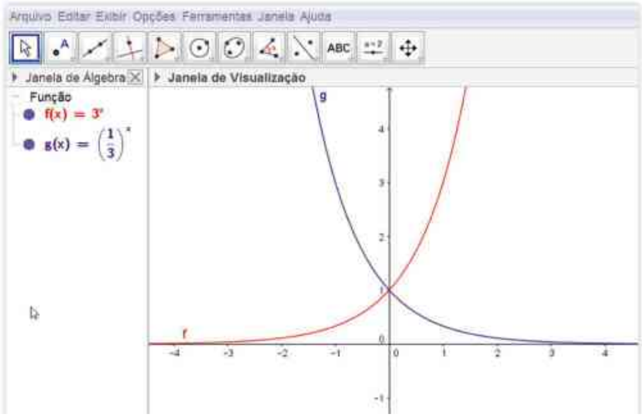
Observe que $Im = \mathbb{R}^*_+$.

EXEMPLO 4

Observe ao lado os gráficos das funções **f** e **g** definidos por $f(x) = 3^x$ e $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, traçados com o GeoGebra.

Note que, tanto para a função **f** como para a função **g**, tem-se $Im = \mathbb{R}^*_+$.

As curvas obtidas nos exemplos anteriores são chamadas **curvas exponenciais**.



GEOGEBRA

O número e

Um importante número irracional em Matemática é o número e = 2,718281828459... . Para introduzi-lo, vamos considerar a expressão $(1 + x)^{\frac{1}{x}}$, definida em $\mathbb{R}^*$, e estudar os valores que ela assume quando **x** se aproxima de zero:

x	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001
$\mathbf{(1 + x)^{\frac{1}{x}}}$	$\simeq$ 2,594	$\simeq$ 2,705	$\simeq$ 2,717	$\simeq$ 2,7182	$\simeq$ 2,7183

Na tabela, podemos notar que, à medida que **x** se aproxima de zero, os valores de $(1 + x)^{\frac{1}{x}}$ ficam mais próximos do número e $\simeq$ 2,7183.

Considerando valores negativos de **x** cada vez mais próximos de zero (por exemplo, x = −0,1; x = −0,01; x = −0,001 etc.), a expressão também fica cada vez mais próxima de e $\simeq$ 2,7183. Calcule você mesmo com o auxílio de uma calculadora científica.

Dizemos então que o limite de $(1 + x)^{\frac{1}{x}}$, quando **x** tende a zero, é igual ao número **e**. Representamos esse fato por $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$.

PENSE NISTO:

Como você pode determinar a abscissa do ponto de interseção das duas curvas do exemplo 4 sem construir o gráfico de cada uma delas?

A descoberta do número **e** é atribuída a John Napier, em seu trabalho de invenção dos logaritmos, datado de 1614 (veja a seção *Um pouco de História* no capítulo seguinte). Nele, Napier introduziu, de forma não explícita, o que hoje conhecemos como número **e**. Um século depois, com o desenvolvimento do cálculo infinitesimal, o número **e** teve sua importância reconhecida. O símbolo **e** foi introduzido por Euler, em 1739.

Muitas calculadoras científicas possuem a tecla e^x colocada, em geral, como segunda função (veja a tecla 2ndF na imagem seguinte; em alguns modelos, a segunda função da tecla é acionada por meio da tecla Shift).

Neste modelo, o cálculo de e^x é feito através da segunda função da tecla ln (o significado de ℓn será apresentado no capítulo seguinte).

Deste modo, em geral, não é necessário substituir **e** por alguma aproximação racional, bastando "entrar com" o expoente **x** para se conhecer o resultado da potência e^x.


FERNANDO FAVORETTO/CRIAR IMAGEM

Você pode usar uma calculadora financeira ou científica para calcular o valor de e^x.

Veja:

- Para calcular e^2, pressionamos:

2 → 2ndF → e^x → 7.389056

Obtemos o valor aproximado 7,389056.

- Para calcular e^{10}, pressionamos:

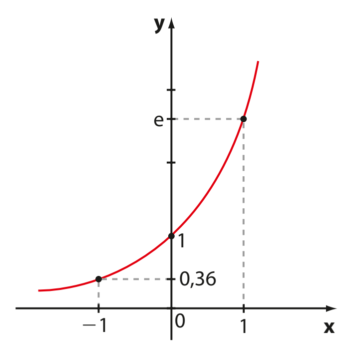
1 0 → 2ndF → e^x → 22026.46579

Obtemos o valor aproximado 22 026,46579.

Em alguns modelos de calculadora, a sequência das "operações" pode ser invertida. Veja o cálculo de e^{10}:

2ndF → e^x → 1 0 → 22026.46579

A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ definida por $f(x) = e^x$ é a função exponencial de base **e**, cujo gráfico é dado ao lado.



Propriedades

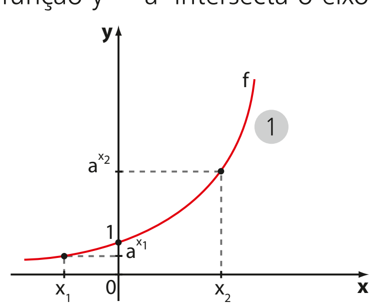
- Na função exponencial cuja lei é $y = a^x$, temos:

$$x = 0 \Rightarrow y = a^0 = 1$$

ou seja, o par ordenado (0, 1) satisfaz a lei $y = a^x$ para todo **a** (com $a > 0$ e $a \neq 1$). Isso quer dizer que o gráfico da função $y = a^x$ intersecta o eixo Oy no ponto de ordenada 1.

- Se $a > 1$, a função definida por $f(x) = a^x$ é crescente e seu gráfico está representado ao lado.

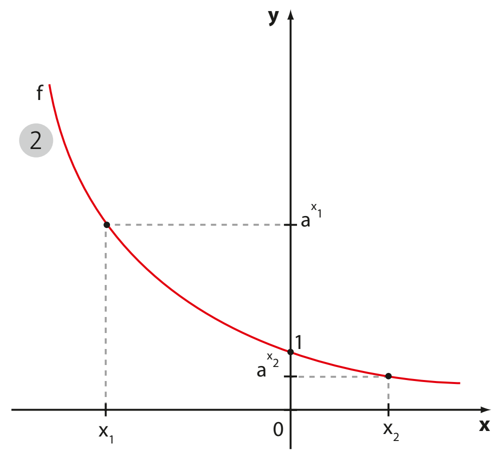
Dados $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$ reais, temos:
$x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$



São crescentes, por exemplo, as funções definidas por: $y = 2^x$; $y = 3^x$; $y = e^x$; $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$; $y = 10^x$ etc.

- Se $0 < a < 1$, a função definida por $f(x) = a^x$ é decrescente e seu gráfico está representado abaixo:

Dados $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$ reais, temos:
$x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$



São decrescentes, por exemplo, as funções definidas por: $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$; $y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$; $y = 0{,}2^x$ etc.

- Para todo $a > 0$ e $a \neq 1$, temos:

  $a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$, quaisquer que sejam os números reais $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$.

- Já vimos que para todo $a > 0$ e todo $\mathbf{x}$ real, temos $a^x > 0$; portanto, o gráfico da função definida por $y = a^x$ está sempre acima do eixo Ox.

  Se $a > 1$, então a^x aproxima-se de zero quando $\mathbf{x}$ assume valores negativos cada vez menores, como em 1.

  Se $0 < a < 1$, então a^x aproxima-se de zero quando $\mathbf{x}$ assume valores positivos cada vez maiores, como em 2.

  Tudo isso pode ser resumido dizendo-se que o conjunto imagem da função exponencial dada por $y = a^x$ é:

$$\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\} = \mathbb{R}_+^*$$

OBSERVAÇÃO

Existem outras funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ cujas leis apresentam a variável $\mathbf{x}$ no expoente de alguma potência (com base positiva e diferente de 1), como:

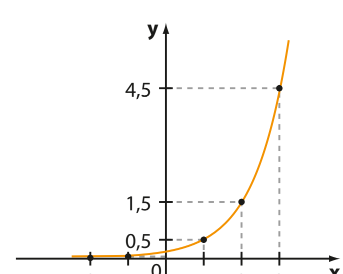
$$y = 3 \cdot 2^x; \qquad y = \frac{1}{4} \cdot 10^x; \qquad y = 2^{x-1} + 3; \qquad y = \left(\frac{1}{5}\right)^x - 2; \qquad y = 1{,}012^x \cdot 191$$

Essas funções têm como gráficos curvas exponenciais semelhantes às apresentadas nos exemplos anteriores e também serão tratadas como funções exponenciais.

Vamos construir, como exemplo, o gráfico de $y = \frac{1}{6} \cdot 3^x$.

Observe que a função é crescente, seu conjunto imagem é $\mathbb{R}_+^*$ e seu gráfico é análogo ao gráfico de $y = a^x$, quando $a > 1$.

x	y
−3	≃ 0,006
−2	≃ 0,019
−1	0,0555...
0	0,166...
1	0,5
2	1,5
3	4,5



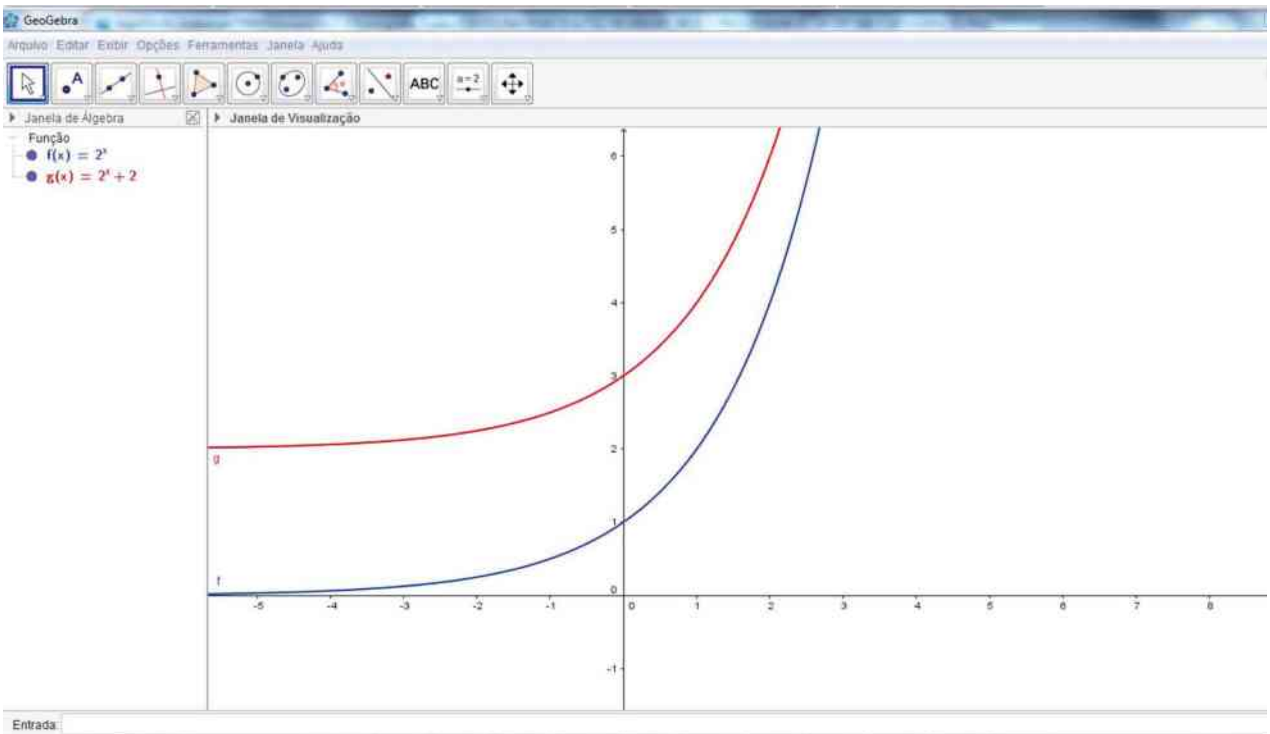
Gráficos com translação

Sejam **f** e **g** funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 2^x$ e $g(x) = 2^x + 2$ respectivamente.

O gráfico de **g** pode ser obtido a partir do gráfico de **f** "deslocando-o" duas unidades para cima. Observe os dois gráficos construídos no mesmo plano cartesiano com o GeoGebra:

PENSE NISTO:

Essas duas curvas podem se intersectar?



Observe que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $2^x > 0 \Rightarrow 2^x + 2 > 0 + 2$, isto é, $g(x) > 2$. Desse modo, o conjunto imagem da função **g** é $Im =]2, +\infty[$.

Veja, no gráfico acima, que a curva correspondente à função **g** está contida na região em que $y > 2$.

De modo geral, o gráfico de $y = a^x + k$, sendo $0 < a \neq 1$ e **k** uma constante real, pode ser obtido a partir do gráfico de $y = a^x$, deslocando-o **k** unidades para cima ou $|k|$ unidades para baixo, conforme **k** seja positivo ou negativo, respectivamente.

PENSE NISTO:

Determine, em seu caderno, o conjunto imagem da função real $y = 2^x - 2$ sem construir o seu gráfico.

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

17 Construa os gráficos das funções exponenciais definidas pelas leis seguintes, destacando seu conjunto imagem:

a) $f(x) = 4^x$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

c) $f(x) = \frac{1}{4} \cdot 2^x$

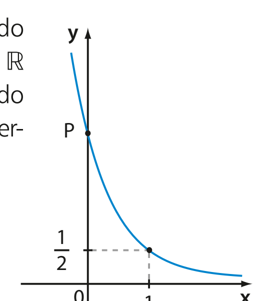
d) $f(x) = 3 \cdot 2^{-x}$

18 Na figura está representado o gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = m \cdot 6^{-x}$, sendo **m** uma constante real. Determine:

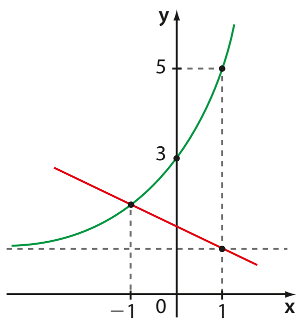
a) o valor de **m**;

b) $f(-1)$;

c) a ordenada de **P**.



19 No sistema de coordenadas seguinte estão representados os gráficos de duas funções, **f** e **g**. A lei que define **f** é $f(x) = a + b \cdot 2^x$ (**a** e **b** são constantes reais positivas) e **g** é uma função afim.



a) Determine os valores de **a** e **b**.
b) Determine o conjunto imagem de **f**.
c) Obtenha a lei que define a função **g**.
d) Determine as raízes de **f** e de **g**.

20 Faça o gráfico de cada uma das funções definidas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ pelas leis seguintes, destacando a raiz (se houver) e o respectivo conjunto imagem:

a) $f(x) = 2^x - 2$
b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$
c) $f(x) = -4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$
d) $f(x) = 3^x + 3$

21 Em um laboratório, constatou-se que uma colônia de certo tipo de bactéria triplicava a cada meia hora. No instante em que começaram as observações, o número de bactérias na amostra era estimado em dez mil.

a) Represente, em uma tabela, a população de bactérias (em milhares) nos seguintes instantes (a partir do início da contagem): 0,5 hora, 1 hora, 1,5 hora, 2 horas, 3 horas e 5 horas.
b) Obtenha a lei que relaciona o número (**n**) de milhares de bactérias, em função do tempo (**t**), em horas.

22 Grande parte dos brasileiros guarda suas reservas financeiras na caderneta de poupança. O rendimento líquido anual da caderneta de poupança gira em torno de 6%. Isso significa que, a cada ano, o saldo dessa poupança cresce 6% em relação ao saldo do ano anterior.

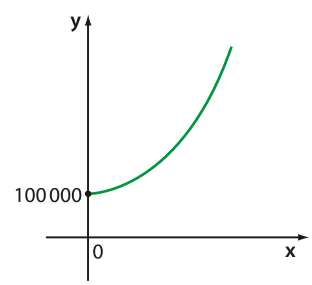
a) Álvaro aplicou hoje R$ 2 000,00 na poupança. Faça uma tabela para representar, ano a ano, o saldo dessa poupança nos próximos cinco anos.
b) Qual é a lei da função que relaciona o saldo (**s**), em reais, da poupança de Álvaro e o número de anos (**x**) transcorridos a partir de hoje ($x = 0$)?
c) É possível que em 10 anos o saldo dessa poupança dobre? Use $1{,}06^{10} \simeq 1{,}8$.

23 Uma moto foi adquirida por R$ 12 000,00. Seu proprietário leu, em uma revista especializada, que a cada ano a moto perde 10% do valor que tinha no ano anterior. Suponha que isso realmente aconteça.

a) Represente, em uma tabela, o valor da moto depois de 1, 2, 3 e 4 anos da data de sua aquisição.
b) Qual o valor da moto após 7 anos da aquisição?
c) Determine a lei que relaciona o valor (**v**) da moto, em reais, em função do tempo (**t**), expresso em anos.

24 Os municípios **A** e **B** têm, hoje, praticamente o mesmo número de habitantes, estimado em 100 mil pessoas. Estudos demográficos indicam que o município **A** deva crescer à razão de 25 000 habitantes por ano e o município **B**, à taxa de 20% ao ano. Mantidas essas condições, classifique em seu caderno como verdadeira (**V**) ou falsa (**F**) as afirmações seguintes, corrigindo as falsas:

a) Em dois anos, a população do município **B** será de 140 mil habitantes.
b) Em três anos, a população do município **A** será de mais de 180 mil habitantes.
c) Em quatro anos, o município **A** será mais populoso que o município **B**.
d) A lei da função que expressa a população (**y**) do município **A** daqui a **x** anos é $y = 25\,000\,x$.
e) O esboço do gráfico da função que expressa a população (**y**) do município **B** daqui a **x** anos é dado a seguir:



25 Em uma indústria alimentícia, verificou-se que, após **t** semanas de experiência e treinamento, um funcionário consegue empacotar **p** unidades de um determinado produto, a cada hora de trabalho. A lei que relaciona **p** e **t** é: $p(t) = 55 - 30 \cdot e^{-0,2t}$ (leia o texto da seção *Aplicações*, página 142).

a) Quantas unidades desse produto o funcionário consegue empacotar sem experiência alguma?
b) Qual é o acréscimo na produção, por hora, que o funcionário experimenta da 1ª para a 2ª semana de experiência? Use $e^{0,2} \simeq 1{,}2$.
c) Qual é o limite máximo teórico de unidades que um funcionário pode empacotar, por hora?

Aplicações

Mundo do trabalho e as curvas de aprendizagem

Em vários ramos da atividade humana relacionada ao mundo do trabalho, é possível verificar que, à medida que um trabalhador executa uma tarefa contínua e repetitivamente, sua eficiência de produção aumenta e o tempo de execução se reduz.

As **curvas de aprendizagem** são gráficos de funções que relacionam a eficiência de um trabalhador de acordo com seu tempo de experiência na execução de uma determinada tarefa.

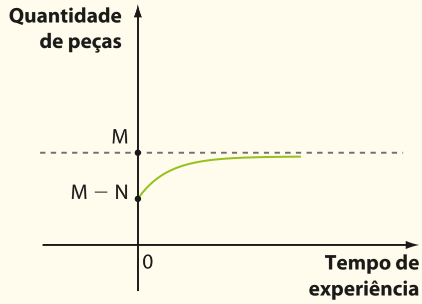
Gerentes e diretores de várias indústrias e empresas utilizam as curvas de aprendizagem para estimar custos futuros e níveis de produção, além de programar tarefas produtivas, reduzindo perdas decorrentes da inabilidade do trabalhador verificada nos primeiros ciclos de produção.

Existem vários modelos matemáticos que podem representar essa dependência. Um deles é o modelo exponencial $f(t) = M - N \cdot e^{-k \cdot t}$, em que:

- $f(t)$ é a **eficiência do trabalhador** (vamos supor aqui que essa eficiência seja mensurada pela quantidade de peças ou materiais que ele produz);
- **t** é o tempo de experiência que ele possui na tarefa ($t \geqslant 0$), expresso em uma certa unidade de medida (dia, mês, semana etc.);
- **M**, **N** e **k** são constantes positivas que dependem da natureza da atividade envolvida;
- **e** é o número irracional, apresentado na página 137.

Observe que:

1) $f(0) = M - N \cdot e^0 = M - N$, que representa a quantidade de peças que o trabalhador é capaz de produzir sem experiência alguma.
2) Quando **t** é suficientemente grande, o termo e^{-kt} fica muito próximo de zero e $f(t)$ assume valores cada vez mais próximos de **M** (limite teórico máximo da produção).
3) O gráfico dessa função exponencial é:



Os custos e a produtividade de uma empresa estão relacionados à eficiência do trabalhador.

Note que, nesse modelo, a partir de certo tempo de experiência, a produtividade do trabalhador praticamente não se altera, tendendo à estabilização.

Fonte de pesquisa:

MORETTIN, Pedro A.; HAZZAN, Samuel; BUSSAB, Wilton. *Cálculo:* funções de uma e várias variáveis. São Paulo: Saraiva, 2003.

Equação exponencial

Uma equação exponencial é aquela que apresenta a incógnita no expoente de pelo menos uma de suas potências.

São exponenciais, por exemplo, as equações $4^x = 8$, $\left(\frac{1}{9}\right)^x = 81$ e $9^x - 3^x = 72$.

Um método usado para resolver equações exponenciais consiste em reduzir ambos os membros da equação à potência de mesma base **a** (com $0 < a$ e $a \neq 1$) e, daí, aplicar a propriedade:

$$a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$$

Quando isso é possível, a equação exponencial pode ser facilmente resolvida.

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

4 Resolva as seguintes equações em $\mathbb{R}$:

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 81$

b) $\left(\sqrt{2}\right)^x = 64$

c) $0{,}5^{-2x-1} \cdot 4^{3x+1} = 8^{x-1}$

Solução:

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 81 \Rightarrow (3^{-1})^x = 3^4 \Rightarrow 3^{-x} = 3^4 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = -4 \Rightarrow S = \{-4\}$

b) $\left(\sqrt{2}\right)^x = 64 \Rightarrow \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^x = 2^6 \Rightarrow \frac{x}{2} = 6 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 12 \Rightarrow S = \{12\}$

c) $0{,}5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = 2^{-1}$

$(2^{-1})^{-2x-1} \cdot (2^2)^{3x+1} = (2^3)^{x-1}$; é preciso usar propriedades das potências:

$2^{2x+1} \cdot 2^{6x+2} = 2^{3x-3} \Rightarrow 2^{(2x+1)+(6x+2)} = 2^{3x-3} \Rightarrow$
$\Rightarrow 2^{8x+3} = 2^{3x-3} \Rightarrow$
$\Rightarrow 8x + 3 = 3x - 3 \Rightarrow x = -\frac{6}{5} \Rightarrow S = \left\{-\frac{6}{5}\right\}$

5 Resolva, em $\mathbb{R}$, a seguinte equação exponencial: $3^{x+1} - 3^x - 3^{x-1} = 45$

Solução:

Vamos usar as propriedades das potências. Podemos fazer: $3^x \cdot 3^1 - 3^x - \frac{3^x}{3} = 45$.

Colocando 3^x em evidência, temos:

$3^x \cdot \left(3 - 1 - \frac{1}{3}\right) = 45 \Rightarrow 3^x \cdot \frac{5}{3} = 45 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3^x = 27 = 3^3 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow S = \{3\}$

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

26 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações exponenciais:

a) $3^x = 81$

b) $2^x = 256$

c) $7^x = 7$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{32}\right)$

e) $5^{x+2} = 125$

f) $10^{3x} = 100\,000$

g) $\left(\frac{1}{5}\right)^x = \left(\frac{1}{625}\right)$

h) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2$

i) $0{,}1^x = 0{,}01$

j) $3^x = -3$

k) $0{,}4^x = 0$

27 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações exponenciais:

a) $8^x = 16$

b) $27^x = 9$

c) $4^x = 32$

d) $25^x = 625$

e) $9^{x+1} = \sqrt[3]{3}$

f) $4^x = \frac{1}{2}$

g) $0{,}2^{x+1} = \sqrt{125}$

h) $\left(\frac{1}{4}\right)^x = \frac{1}{8}$

28 Com a seca, estima-se que o nível de água (em metros) em um reservatório, daqui a **t** meses, seja $n(t) = 7{,}6 \cdot 4^{-0{,}2t}$. Qual é o tempo necessário para que o nível de água se reduza à oitava parte do nível atual?

29 Analistas do mercado imobiliário de um município estimam que o valor (**v**), em reais, de um apartamento nesse município seja dado pela lei $v(t) = 250\,000 \cdot (1{,}05)^t$, sendo **t** o número de anos ($t = 0, 1, 2, ...$) contados a partir da data de entrega do apartamento.

a) Qual o valor desse imóvel na data de entrega?

b) Qual é a valorização, em reais, desse apartamento, um ano após a entrega?

c) Qual será o valor desse imóvel 6 anos após a entrega? Use $1{,}05^3 \simeq 1{,}15$.

d) Depois de quantos anos da data da entrega o apartamento estará valendo 1,525 milhão de reais? Use as aproximações da tabela seguinte.

t	35	36	37	38	40
$\mathbf{1{,}05^t}$	5,5	5,8	6,1	6,4	7,0

30 A lei que representa uma estimativa do número de pessoas (**N**) que serão infectadas por uma virose, em uma grande região metropolitana, no período de oito dias é $N(t) = a \cdot 2^{bt}$, em que N(t) é o número de infectados **t** dias após a divulgação dessa previsão e **a** e **b** são constantes reais positivas. Considerando que, no dia em que foi anunciada tal previsão, 3 000 pessoas já haviam sido diagnosticadas com a virose e que dois dias depois o número já aumentara para 24 000 pessoas, determine:

a) os valores de **a** e **b**;

b) o número de infectados pela virose 16 horas após a divulgação da previsão;

c) o número de infectados pela virose após 4 dias;

d) o menor número inteiro de dias transcorridos até que a quantidade de infectados pela virose atinja 3 milhões. Use $10^3 \simeq 2^{10}$.

31 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações exponenciais:

a) $10^x \cdot 10^{x+2} = 1\,000$

b) $2^{4x+1} \cdot 8^{-x+3} = \dfrac{1}{16}$

c) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{3x} : 25^{2+x} = 5$

d) $\left(\dfrac{1}{9}\right)^{x^2-1} \cdot 27^{1-x} = 3^{2x+7}$

32 Resolva, em $\mathbb{R}$, as equações seguintes:

a) $2^{x+2} - 3 \cdot 2^{x-1} = 20$

b) $5^{x+3} - 5^{x+2} - 11 \cdot 5^x = 89$

c) $4^{x+1} + 4^{x+2} - 4^{x-1} - 4^{x-2} = 315$

d) $25^x - 23 \cdot 5^x = 50$

33 Resolva os sistemas seguintes:

a) $\begin{cases} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+2y} = 8 \\ \dfrac{1}{3} = 3^{x+y} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \left(\sqrt{7}\right)^x = 49^{y-2x} \\ 2^{y-x} = 1\,024 \end{cases}$

34 As leis seguintes representam as estimativas de valores (em milhares de reais) de dois apartamentos **A** e **B** (adquiridos na mesma data), decorridos **t** anos da data da compra:

apartamento **A**: $v_A = 2^{t+1} + 120$

apartamento **B**: $v_B = 6 \cdot 2^{t-2} + 248$

a) Por quais valores foram adquiridos os apartamentos **A** e **B**, respectivamente?

b) Passados quatro anos da compra, qual deles estará valendo mais?

c) Qual é o tempo necessário (a partir da data de aquisição) para que ambos tenham iguais valores?

35 Na lei $n(t) = 15\,000 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^{t+k}$, em que **k** é uma constante real, n(t) representa a população que um pequeno município terá daqui a **t** anos, contados a partir de hoje. Sabendo que a população atual do município é de 10 000 habitantes, determine:

a) o valor de **k**;

b) a população do município daqui a 3 anos.

36 A lei que permite estimar a depreciação de um equipamento industrial é $v(t) = 5\,000 \cdot 4^{-0{,}02t}$, em que v(t) é o valor (em reais) do equipamento **t** anos após sua aquisição.

a) Por qual valor esse equipamento foi adquirido?

b) Em quanto tempo ele passará a valer metade do valor da aquisição?

c) Faça um esboço do gráfico da função que relaciona **v** e **t**.

DESAFIO

(Unicamp-SP) O processo de resfriamento de um determinado corpo é descrito por: $T(t) = T_A + \alpha \cdot 3^{\beta t}$, onde T(t) é a temperatura do corpo, em graus Celsius, no instante **t**, dado em minutos, $\mathbf{T_A}$ é a temperatura ambiente, suposta constante, e α e β são constantes. O referido corpo foi colocado em um congelador com temperatura de −18 °C. Um termômetro no corpo indicou que ele atingiu 0 °C após 90 minutos e chegou a −16 °C após 270 minutos.

a) Encontre os valores numéricos das constantes α e β.

b) Determine o valor de **t** para o qual a temperatura do corpo no congelador é apenas $\left(\dfrac{2}{3}\right)$ °C superior à temperatura ambiente.

TROQUE IDEIAS

Os medicamentos e a Matemática

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Os antibióticos são utilizados no tratamento de infecções causadas por bactérias. A má utilização desse tipo de medicamento leva ao surgimento de bactérias cada vez mais resistentes, tornando alguns antibióticos ineficazes. Isso implica um ciclo vicioso que já ocasionou o desenvolvimento de mais de 200 tipos diferentes de antibióticos. A fim de inibir a automedicação e o uso indiscriminado, em maio de 2011, a Agência Nacional de Vigilância Sanitária (Anvisa) publicou a resolução que determina que as farmácias devem comercializar antibióticos mediante a retenção da receita médica. Ainda assim, é importante utilizar antibióticos apenas nos casos realmente necessários, seguindo as orientações médicas e respeitando a posologia e a duração do tratamento.

A amoxicilina é um conhecido antibiótico usado no tratamento de diversas infecções não complicadas, receitado por médicos no Brasil. A bula da amoxicilina, como a de todos os medicamentos, contém, entre outros tópicos, a composição, as informações ao paciente, as informações técnicas e a posologia. Nas informações técnicas, é possível ler que a **meia-vida da amoxicilina após a administração do produto é de 1,3 hora**. Mas o que essa informação significa?

A cada período de 1,3 hora ou 1 hora e 18 minutos (para facilitar vamos considerar 1 hora e 20 minutos), a quantidade de amoxicilina no organismo decresce em 50% do valor que tinha no início do período.

- Considere que um adulto ingeriu uma cápsula com 500 mg de amoxicilina e faça o que se pede a seguir.

a) Complete a tabela abaixo, copiando-a em seu caderno.

Quantidade de amoxicilina no organismo (mg)							
Número de meias-vidas	0	1	2	3	4	5	6

b) Faça, em seu caderno, o gráfico da função que relaciona a quantidade de amoxicilina no organismo (em miligramas), e o tempo (em horas) transcorrido após a ingestão.

c) Responda: qual é a lei da função que relaciona a quantidade (**q**) de amoxicilina no organismo e o número (**n**) de meias-vidas?

O tempo de meia-vida é um importante parâmetro para médicos e também para a indústria farmacêutica. O conhecimento da meia-vida dos medicamentos possibilita uma estimativa da velocidade com que o processo ocorre, originando informações importantes para a interpretação dos efeitos terapêuticos, da duração do efeito farmacológico e do regime posológico adequado. A posologia recomendada para uma cápsula de amoxicilina de 500 g, por exemplo, é de 8 em 8 horas.

d) Responda: considerando a quantidade de amoxicilina ingerida em uma cápsula, qual a porcentagem desse fármaco presente no organismo após 8 horas da ingestão? Por que é imprescindível respeitar os horários prescritos pelo médico?

Fontes de pesquisa: Resolução 20/2011. Disponível em: <www.anvisa.gov.br/sngpc/Documentos2012/RDC%2020%202011.pdf>. Acesso em: 4 mar. 2016; Amoxicilina cápsulas. Disponível em: <www.medicinanet.com.br/bula/8006/amoxicilina_capsulas.htm>. Acesso em: 4 mar. 2016.

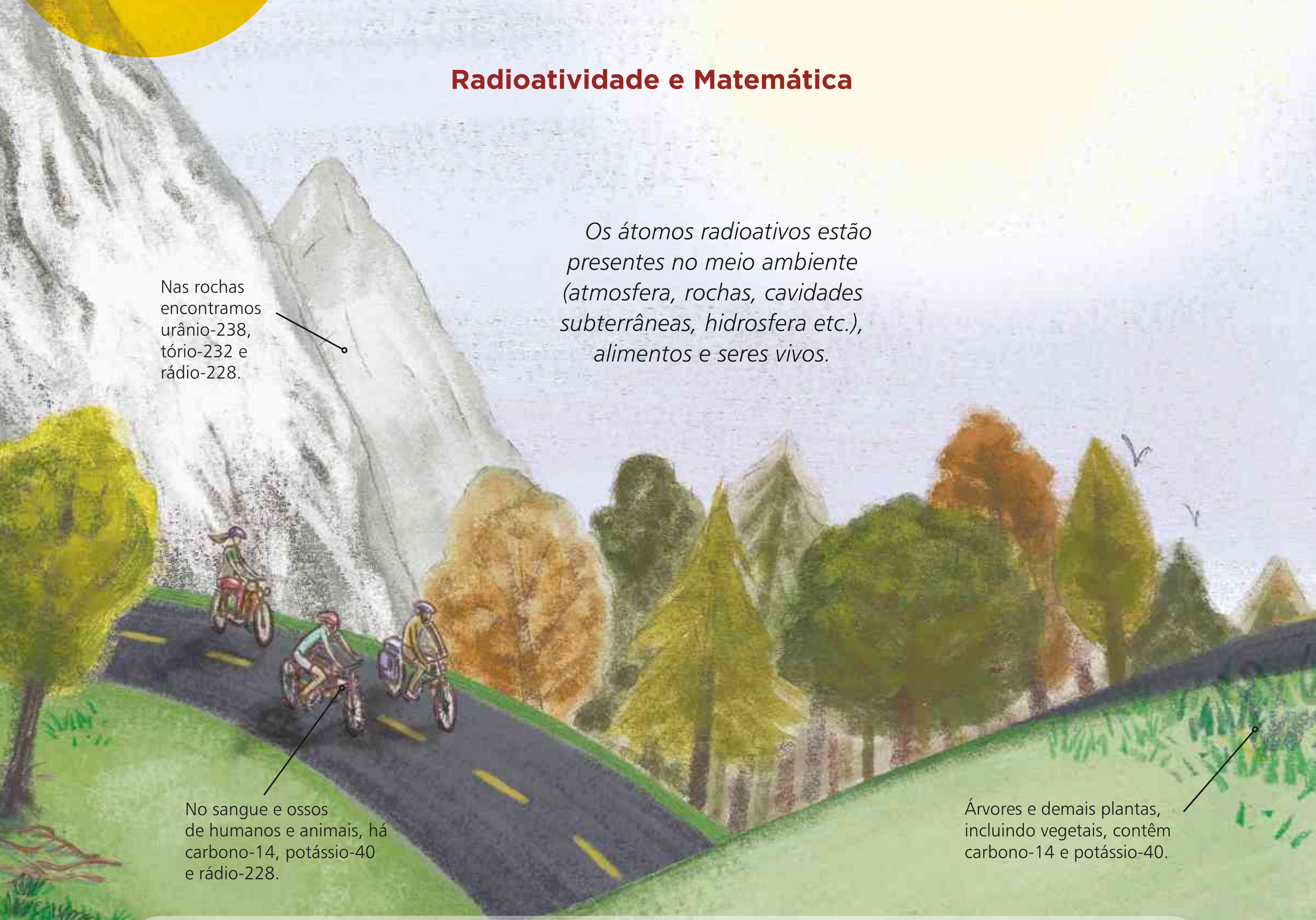
Aplicações

Meia-vida e radioatividade

[SIC] COMUNICAÇÃO

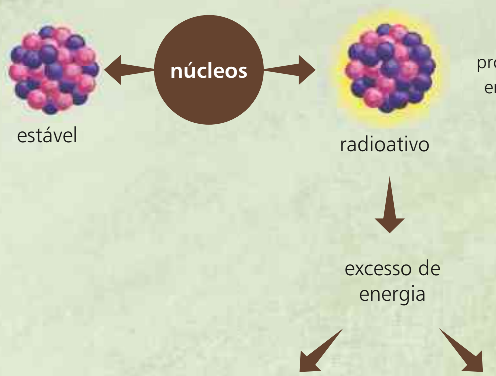
Radioatividade e Matemática

Os átomos radioativos estão presentes no meio ambiente (atmosfera, rochas, cavidades subterrâneas, hidrosfera etc.), alimentos e seres vivos.



Decaimento radioativo

O núcleo de um átomo com excesso de energia tende a se estabilizar emitindo um grupo de partículas (radiação alfa ou beta) ou ondas eletromagnéticas (radiações gama). Em cada emissão de uma das partículas, há variação do número de prótons e nêutrons no núcleo e, deste modo, um elemento químico se transforma em outro. O processo pelo qual se dá a emissão dessas partículas é chamado de **decaimento radioativo**.



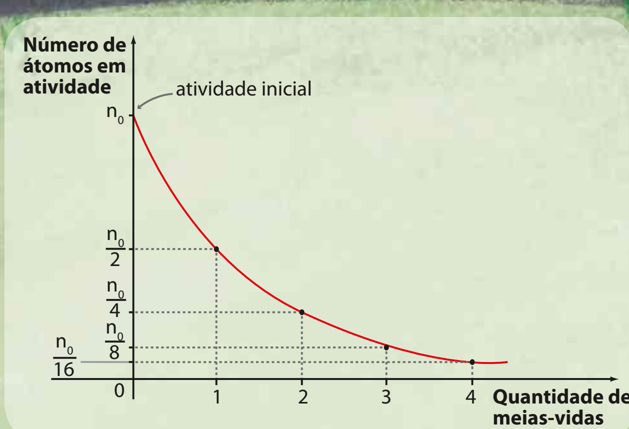
Elementos sem proporção entre si e em cores fantasia.

Meia-vida

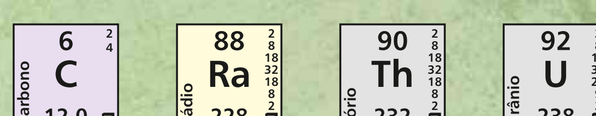
Considerando uma grande quantidade de átomos de um mesmo elemento químico radioativo, espera-se certo número de emissões por unidade de tempo. Essa “taxa de emissões” é a atividade da amostra.

Cada elemento radioativo se transmuta (desintegra) a uma velocidade que lhe é característica. **Meia-vida** é o intervalo de tempo necessário para que a sua atividade radioativa seja reduzida à metade da atividade inicial.

Após o primeiro período de meia-vida, a atividade da amostra se reduz à metade da atividade inicial; passado o segundo período, a atividade se reduz a $\frac{1}{4}$ da atividade inicial e assim por diante, como mostra o gráfico abaixo.



Exemplos de elementos radioativos:



A lei que define essa função exponencial é $n(x) = \frac{n_0}{2^x}$, sendo **x** a quantidade de meias-vidas, $\mathbf{n_0}$ o número de átomos correspondente à atividade inicial e **n(x)** o número de átomos em atividade após **x** meias-vidas.

Exemplo de meia-vida:

O iodo-131 é um elemento químico radiativo, usado na Medicina Nuclear, em exames e tratamentos de tiroide, e tem meia-vida de 8 dias. Isso significa que, em 8 dias, metade dos átomos deixarão de emitir radiação.

Símbolo internacional de alerta para radioatividade.

Fonte de pesquisa: *Energia nuclear e suas aplicações*. Disponível em: <www.cnen.gov.br/images/cnen/documentos/educativo/apostila-educativa-aplicacoes.pdf>. Acesso em: 4 mar. 2016.