CAPÍTULO 9

Progressões

Sequências numéricas

A tabela seguinte relaciona o número de funcionários de uma empresa nos seus dez primeiros anos de existência:

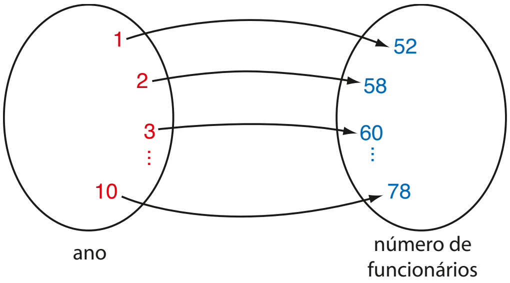
Ano	Número de funcionários
1	52
2	58
3	60
4	61
5	67
6	65
7	69
8	72
9	76
10	78

IMAGEBROKER RM/NORB/DIOMEDIA

Observe que a relação entre essas duas variáveis define uma função: a cada ano de existência da empresa corresponde um único número de funcionários.

Note que o domínio dessa função é {1, 2, 3, ..., 10}.

De modo geral, uma função cujo domínio é $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ...\}$ é chamada **sequência numérica infinita**. Se o domínio de **f** é {1, 2, 3, ..., n} em que $n \in \mathbb{N}^*$, temos uma **sequência numérica finita**.



É usual representar uma sequência numérica por meio de seu conjunto imagem, colocando seus elementos entre parênteses.

No exemplo anterior, (52, 58, 60, 61, 67, 65, 69, 72, 76, 78) representa a sequência da quantidade de funcionários da empresa ano a ano.

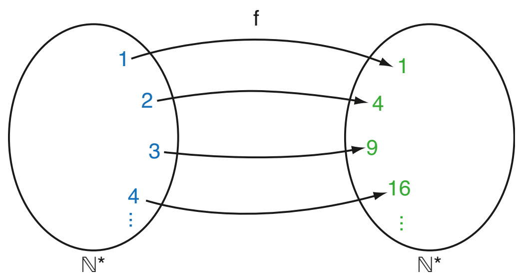
Em geral, sendo $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{a_3}$, ..., $\mathbf{a_n}$, ... números reais, a função $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ tal que $f(1) = a_1$, $f(2) = a_2$, $f(3) = a_3$, ..., $f(n) = a_n$, ... é representada por: $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$.

Observe que o índice **n** indica a posição do elemento na sequência. Assim, o primeiro termo é indicado por $\mathbf{a_1}$, o segundo é indicado por $\mathbf{a_2}$ e assim por diante.

Formação dos elementos de uma sequência

Termo geral

Vamos considerar a função f: $\mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ que associa a cada número natural não nulo o seu quadrado:



Podemos representá-la por: (1, 4, 9, 16, 25, ...), em que:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 = 1^2 \\ a_2 &= 4 = 2^2 \\ a_3 &= 9 = 3^2 \\ a_4 &= 16 = 4^2 \\ &\vdots \quad \vdots \\ a_n &= n^2 \end{aligned}$$

A expressão $a_n = n^2$ é a **lei de formação** ou **termo geral** dessa sequência, pois permite o cálculo de qualquer termo da sequência, por meio da atribuição dos valores possíveis para **n** (n = 1, 2, 3, ...).

PENSE NISTO:

Em seu caderno, escreva o termo geral que represente a sequência dos números pares positivos (2, 4, 6, 8, ...).

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

1 Encontre os cinco primeiros termos da sequência cujo termo geral é $a_n = 1{,}5n + 8$; $n \in \mathbb{N}^*$.

Solução:

Para conhecer os termos dessa sequência, é preciso atribuir sucessivamente valores para **n** (n = 1, 2, 3, 4, 5):

$$\begin{aligned} n = 1 &\Rightarrow a_1 = 1{,}5 \cdot 1 + 8 = 9{,}5 \\ n = 2 &\Rightarrow a_2 = 1{,}5 \cdot 2 + 8 = 11 \\ n = 3 &\Rightarrow a_3 = 1{,}5 \cdot 3 + 8 = 12{,}5 \\ n = 4 &\Rightarrow a_4 = 1{,}5 \cdot 4 + 8 = 14 \\ n = 5 &\Rightarrow a_5 = 1{,}5 \cdot 5 + 8 = 15{,}5 \end{aligned}$$

2 A lei de formação dos elementos de uma sequência é $a_n = 3n - 16$, $n \in \mathbb{N}^*$. O número 113 pertence a essa sequência?

Solução:

Se quisermos saber se o número 113 pertence à sequência, devemos substituir $\mathbf{a_n}$ por 113 e verificar se a equação obtida tem solução em $\mathbb{N}^*$:

$$113 = 3n - 16 \Rightarrow 3n = 129 \Rightarrow n = 43 \in \mathbb{N}^*$$

Concluímos, então, que o número 113 pertence à sequência e ocupa a 43ª posição.

Lei de recorrência

Muitas vezes conhecemos o primeiro termo de uma sequência e uma lei que permite calcular cada termo $\mathbf{a_n}$ a partir de seus anteriores: $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1$.

Quando isso ocorre, dizemos que a sequência é determinada por uma **lei de recorrência**.

EXEMPLO 1

Vamos construir a sequência definida pela relação de recorrência:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 2 \cdot a_n, \text{ para } n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 1 \end{cases}$$

A segunda sentença indica como obter $\mathbf{a}_2$ a partir de $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_3$ a partir de $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_4$ a partir de $\mathbf{a}_3$ etc. Para isso, é preciso atribuir valores a **n**:

$$n = 1 \Rightarrow a_2 = 2 \cdot a_1 = 2 \cdot 1 = 2$$
$$n = 2 \Rightarrow a_3 = 2 \cdot a_2 = 2 \cdot 2 = 4$$
$$n = 3 \Rightarrow a_4 = 2 \cdot a_3 = 2 \cdot 4 = 8$$
$$n = 4 \Rightarrow a_5 = 2 \cdot a_4 = 2 \cdot 8 = 16$$

Assim, a sequência procurada é (1, 2, 4, 8, 16, ...).

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

1 Seja a sequência definida por $a_n = -3 + 5n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Determine:

a) $\mathbf{a}_2$ **b)** $\mathbf{a}_4$ **c)** $\mathbf{a}_{11}$

2 Escreva os quatro primeiros termos da sequência definida por $a_n = 2 \cdot 3^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

3 Para cada função definida a seguir, represente a sequência associada:

a) f: $\mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$ que associa a cada número natural não nulo o triplo de seu sucessor.

b) g: $\mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $g(x) = x^2 - 2x + 4$.

4 O termo geral de uma sequência é $a_n = 143 - 4n$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Qual é a soma de seus 3 primeiros termos?

b) Os números 71, −345 e −195 pertencem à sequência? Em caso afirmativo, determine suas posições.

5 Construa a sequência definida pela relação:

$$\begin{cases} a_1 = -5 \\ a_{n+1} = 2 \cdot a_n + 3,\ n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

6 Determine o sexto termo da sequência definida pela lei de recorrência:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = 3 \cdot a_n,\ n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

7 Seja f: $\mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $f(n) = n^3 + n^2 + 1$. Ao representar a sequência associada a **f**, um estudante apresentou a seguinte resolução:

(3, 13, [redacted], 81, 151, [redacted], ...)

Por algum motivo, dois números da sequência acima saíram borrados. Determine-os, reescrevendo a sequência.

8 Os termos gerais de duas sequências ($\mathbf{a}_n$) e ($\mathbf{b}_n$) são, respectivamente, $a_n = -193 + 3n$ e $b_n = 220 - 4n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$.

a) Escreva os cinco primeiros termos de ($\mathbf{a}_n$) e de ($\mathbf{b}_n$).

b) Qual é o primeiro termo positivo de ($\mathbf{a}_n$)? Que posição ele ocupa na sequência?

c) Qual é o primeiro termo negativo de ($\mathbf{b}_n$)? Que posição ele ocupa na sequência?

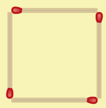
d) As duas sequências apresentam algum termo em comum? Em caso afirmativo, determine-o.

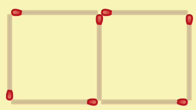
Progressões aritméticas

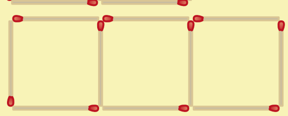
TROQUE IDEIAS

Observação de regularidades

As figuras seguintes mostram a construção de quadrados justapostos usando palitos.

1ª figura: 

2ª figura: 

3ª figura: 

a) Mantendo o padrão apresentado, desenhe, em seu caderno, a 4ª, 5ª e 6ª figuras.

b) Construa a sequência correspondente à quantidade de palitos usados na construção de cada figura. Qual é a regularidade que você observa?

c) Obtenha o termo geral dessa sequência.

d) Quantos palitos são usados na construção da 25ª figura?

e) Qual é a posição da figura feita com 493 palitos?

Progressão aritmética (P.A.) é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual à soma do termo anterior com uma constante. Essa constante é chamada **razão da P.A.** e é indicada por **r**.

EXEMPLO 2

a) $(-6, -1, 4, 9, 14, ...)$ é uma P.A. de razão $r = 5$.

b) $(2; 2{,}3; 2{,}6; 2{,}9; ...)$ é uma P.A. de razão $r = 0{,}3$.

c) $(150, 140, 130, 120, ...)$ é uma P.A. de razão $r = -10$.

d) $\left(\sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3}, ...\right)$ é uma P.A. de razão $r = 1$.

e) $\left(0, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -1, ...\right)$ é uma P.A. de razão $r = -\frac{1}{3}$.

f) $(7, 7, 7, 7, ...)$ é uma P.A. de razão $r = 0$.

PENSE NISTO:

Como podemos definir uma P.A. cujo primeiro termo é $\mathbf{a_1}$ e a razão é **r**, usando uma lei de recorrência?

OBSERVAÇÃO

Nos itens do exemplo anterior, note que a razão da P.A. pode ser obtida calculando-se a diferença entre um termo qualquer, a partir do segundo, e o termo que o antecede, isto é:

$$r = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = ... = a_n - a_{n-1}$$

Classificação

De acordo com a razão, podemos classificar as progressões aritméticas da seguinte forma:

- Se $r > 0$, cada termo é maior que o anterior, isto é, $a_n > a_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Dizemos, então, que a P.A. é **crescente** (veja os itens *a*, *b* e *d* do exemplo 2).
- Se $r < 0$, cada termo é menor que o anterior, isto é, $a_n < a_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Dizemos, então, que a P.A. é **decrescente** (veja os itens *c* e *e* do exemplo 2).
- Se $r = 0$, todos os termos da P.A. são iguais. Dizemos, então, que ela é **constante** (veja o item *f* do exemplo 2).

Termo geral da P.A.

Vamos agora encontrar uma expressão que nos permita obter um termo qualquer da P.A., conhecendo apenas o 1º termo e a razão.

Seja uma P.A. $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ de razão **r**. Temos:

$$a_2 - a_1 = r \Rightarrow \boxed{a_2 = a_1 + r}$$

$$a_3 - a_2 = r \Rightarrow a_3 = a_2 + r \Rightarrow \boxed{a_3 = a_1 + 2r}$$

$$a_4 - a_3 = r \Rightarrow a_4 = a_3 + r \Rightarrow \boxed{a_4 = a_1 + 3r}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

De modo geral, o termo $\mathbf{a_n}$, que ocupa a n-ésima posição na sequência, é dado por:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r}$$

Essa expressão, conhecida como **fórmula do termo geral da P.A.**, permite-nos expressar qualquer termo da P.A. em função de $\mathbf{a_1}$ e **r**. Assim, por exemplo, podemos escrever:

- $a_4 = a_1 + 3r$
- $a_{12} = a_1 + 11r$
- $a_{32} = a_1 + 31r$

PENSE NISTO:

Como podemos expressar o 10º termo de uma P.A. em função apenas do 7º termo e da razão?

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

3 Calcule o 20º termo da P.A. (26, 31, 36, 41, 46, ...).

Solução:

Sabemos que: $a_1 = 26$ e $r = 31 - 26 = 5$

Utilizando a expressão do termo geral, podemos escrever: $a_{20} = a_1 + 19r \Rightarrow a_{20} = 26 + 19 \cdot 5 \Rightarrow$
$\Rightarrow a_{20} = 121$

4 Determine a P.A. cujo sétimo termo vale 1 e cujo décimo termo vale 16.

Solução:

Temos: $\begin{cases} a_7 = 1 \Rightarrow a_1 + 6r = 1 \\ a_{10} = 16 \Rightarrow a_1 + 9r = 16 \end{cases}$

Subtraindo a 2ª equação da 1ª, temos:

$-3r = -15 \Rightarrow r = 5$

Substituindo esse valor em qualquer uma das equações, obtém-se: $a_1 = -29$

A P.A. é, portanto, $(-29, -24, -19, -14, \ldots)$

5 Determine $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$ de modo que a sequência $(x + 5, 4x - 1, x^2 - 1)$ seja uma P.A.

Solução:

Como $r = a_2 - a_1 = a_3 - a_2$, podemos escrever:

$(4x - 1) - (x + 5) = (x^2 - 1) - (4x - 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x - 6 = x^2 - 4x \Rightarrow x^2 - 7x + 6 = 0$

As raízes dessa equação são: $x = 1$ ou $x = 6$.

Podemos verificar que, para $x = 1$, a P.A. é (6, 3, 0) e, para $x = 6$, a P.A. é (11, 23, 35).

6 Determine quantos múltiplos de 3 há entre 100 e 500.

Solução:

A sequência dos múltiplos de 3 (0, 3, 6, 9, ...) é uma P.A. de razão 3, mas o que nos interessa é estudar essa sequência entre 100 e 500.

Para isso, temos:

- o primeiro múltiplo de 3 maior que 100 é $a_1 = 102$;
- o último múltiplo de 3 pertencente ao intervalo dado é 498, que indicaremos por $\mathbf{a_n}$, pois não conhecemos sua posição na sequência. Assim, $a_n = 498$.

Retomando o problema, queremos determinar o número de termos (**n**) da P.A. (102, 105, ..., 498).

Pelo termo geral da P.A., temos:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow 498 = 102 + (n - 1) \cdot 3 \Rightarrow n = 133$$

Portanto, há 133 múltiplos de 3 entre 100 e 500.

OBSERVAÇÃO

A análise restrita unicamente aos primeiros termos de uma sequência pode, algumas vezes, levar a conclusões precipitadas.

Por exemplo, ao analisarmos a sequência (−1, 3, 7, ...) poderíamos concluir que se trata de uma P.A. de razão 4, cujo termo geral é $a_n = -1 + (n - 1) \cdot 4 = 4n - 5$; $n \in \mathbb{N}^*$; a P.A. é (−1, 3, 7, 11, 15, 19, ...).

Mas essa sequência também pode ser descrita por outra lei geral, a saber $b_n = n^3 - 6n^2 + 15n - 11$; $n \in \mathbb{N}^*$.

De fato, $b_1 = -1$, $b_2 = 3$ e $b_3 = 7$ (faça as verificações).

Mas $b_4 = 4^3 - 6 \cdot 4^2 + 15 \cdot 4 - 11 = 17$; $b_5 = 5^3 - 6 \cdot 5^2 + 15 \cdot 5 - 11 = 39$;

$b_6 = 6^3 - 6 \cdot 6^2 + 15 \cdot 6 - 11 = 79$ etc. e a sequência é (−1, 3, 7, 17, 39, 79, ...), que não é uma P.A.

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

9 Quais das sequências seguintes representam progressões aritméticas?

a) (21, 25, 29, 33, 37, ...)

b) (0, −7, 7, −14, 14, ...)

c) (−8, 0, 8, 16, 24, 32, ...)

d) $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2, ...\right)$

e) (−30, −36, −41, −45, ...)

f) $\left(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, ...\right)$

10 Determine a razão de cada uma das progressões aritméticas seguintes, classificando-as em crescente, decrescente ou constante.

a) (38, 35, 32, 29, 26, ...)

b) (−40, −34, −28, −22, −16, ...)

c) $\left(\frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}, ...\right)$

d) (90, 80, 70, 60, 50, ...)

e) $\left(\frac{1}{3}, 1, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, 3, ...\right)$

f) $\left(\sqrt{3} - 2, \sqrt{3} - 1, \sqrt{3}, \sqrt{3} + 1, ...\right)$

11 Dada a P.A. (28, 36, 44, 52, ...), determine seu:

a) oitavo termo;

b) décimo nono termo.

12 Em uma P.A. de razão 9, o 10º termo vale 98.

a) Qual é seu 2º termo?

b) Qual é seu termo geral?

13 Preparando-se para uma competição, um atleta corre sempre 400 metros a mais que a distância percorrida no dia anterior. Sabe-se que no 6º dia ele correu 3,2 km. Qual é a distância percorrida pelo atleta no 2º dia?

14 Faça o que se pede:

a) Escreva a P.A. em que o 4º termo vale 24 e o 9º termo vale 79.

b) Considerando a sequência formada pelos termos de ordem par (2º, 4º, 6º, ...) da P.A. do item *a*, determine seu 20º termo.

15 Escreva a P.A. em que $a_1 + a_3 + a_4 = 0$ e $a_6 = 40$.

16 Qual é a razão da P.A. dada pelo termo geral $a_n = 310 - 8n$, $n \in \mathbb{N}^*$?

17 Sabendo que cada sequência a seguir é uma P.A., determine o valor de **x**.

a) $(3x - 5, 3x + 1, 25)$

b) $(-6 - x, x + 2, 4x)$

c) $(x + 3, x^2, 6x + 1)$

18 Uma empresa de TV por assinatura planejou sua expansão no biênio 2016-2017 estabelecendo a meta de conseguir, a cada mês, 450 contratos a mais que o número de contratos comercializados no mês anterior. Supondo que isso realmente tenha ocorrido e sabendo que no último bimestre de 2016 o número total de contratos fechados foi de 12 000, determine a quantidade de contratos comercializados em:

a) março de 2016;

b) abril de 2017;

c) dezembro de 2017.

19 Considere a sequência dos números naturais que, divididos por 7, deixam resto igual a 4.

a) Qual é o termo geral dessa sequência?

b) Qual é o 50º termo dessa sequência?

20 Com relação à P.A. (131, 138, 145, ..., 565):

a) obtenha seu termo geral;

b) determine seu número de termos.

21 Quantos números ímpares existem entre 72 e 468?

22 Quantos números inteiros **x**, com $23 \leqslant x \leqslant 432$, não são múltiplos de 3?

23 A soma de três números que compõem uma P.A. é 72 e o produto dos termos extremos é 560. Qual é a P.A.? Sugestão: Às vezes, é interessante representar 3 termos desconhecidos de uma P.A. por $x - r$, x, $x + r$, em que **r** é a razão da P.A.

24 Em um triângulo, a medida do maior ângulo interno é 105°. Determine as medidas de seus ângulos internos, sabendo que elas estão em P.A.

25 As medidas dos lados de um triângulo retângulo são numericamente iguais aos termos de uma P.A. de razão 4. Qual é a medida da hipotenusa?

26 Seja $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $f(x) = -2 + 3x$.

a) Represente o conjunto imagem de **f**.

b) Faça a representação gráfica dessa função.

27 Mostre que a sequência (log 80, log 20, log 5) é uma P.A. Qual é a razão dessa P.A.?

28 Dado um quadrado $\mathbf{Q_1}$ de lado $\ell = 1$ cm, considere a sequência de quadrados $(Q_1, Q_2, Q_3, ...)$, em que o lado de cada quadrado é 2 cm maior que o lado do quadrado anterior.

Determine:

a) o perímetro de $\mathbf{Q_{20}}$;

b) a área de $\mathbf{Q_{31}}$;

c) a diagonal de $\mathbf{Q_{10}}$.

29 Em uma maratona, os organizadores decidiram, devido ao forte calor, colocar mesas de apoio com garrafas de água para os corredores, a cada 800 metros, a partir do quilômetro 5 da prova, onde foi instalada a primeira mesa.

a) Sabendo que a maratona é uma prova com 42,195 km de extensão, determine o número total de mesas de apoio que foram colocadas pela organização da prova.

b) Quantos metros um atleta precisa percorrer da última mesa de apoio até a linha de chegada?

c) Um atleta sentiu-se mal no quilômetro 30 e decidiu abandonar a prova. Ele lembrava que havia pouco tempo que ele cruzara uma mesa de apoio. Qual era a opção mais curta: voltar a essa última mesa ou andar até a próxima?

30 Os números que expressam as medidas do perímetro, diagonal e a área de um quadrado, nesta ordem, podem ser os termos de uma P.A.? Em caso afirmativo, quanto mede o lado desse quadrado?

31 A Copa do Mundo de Futebol é um evento que ocorre de quatro em quatro anos. A 1ª Copa foi realizada em 1930, no Uruguai. De lá para cá, apenas nos anos de 1942 e 1946 a Copa não foi realizada, devido à 2ª Guerra Mundial.

a) A Copa de 2014 foi realizada no Brasil. Qual é a ordem desse evento na sequência de anos em que foi realizada?

b) Considerando que os próximos eventos ocorram seguindo o mesmo padrão e que não existam imprevistos que impeçam a realização desse evento, responda: haverá Copa em 2100? E em 2150?

Soma dos n primeiros termos de uma P.A.

Muitas foram as contribuições do alemão Carl F. Gauss (1777-1855) à ciência e, em particular, à Matemática. Sua incrível vocação para a Matemática se manifestou desde cedo, perto dos dez anos de idade. Conta-se que Gauss surpreendeu seu professor ao responder, em pouquíssimo tempo, o valor da soma (1 + 2 + 3 + ... + 99 + 100)

Que ideia Gauss teria tido?

Provavelmente, ele notou que na P.A. (1, 2, 3, ..., 98, 99, 100) vale a seguinte propriedade:

$$\begin{cases} a_1 + a_{100} = 1 + 100 = 101 \\ a_2 + a_{99} = 2 + 99 = 101 \\ a_3 + a_{98} = 3 + 98 = 101 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{50} + a_{51} = 50 + 51 = 101 \end{cases}$$

Assim, Gauss teria agrupado as 100 parcelas da soma em 50 pares de números cuja soma é 101, obtendo como resultado $50 \cdot 101 = 5050$.

Um raciocínio equivalente ao usado por ele consiste em escrever, de "trás para frente", a soma $S = 1 + 2 + 3 + ... + 99 + 100$ (1)

$$S = 100 + 99 + 98 + ... + 3 + 2 + 1 \quad (2)$$

Adicionando (1) e (2), de acordo com o esquema a seguir, temos:

$$\begin{array}{rcccccccccccccc} (1) & S & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & 98 & + & 99 & + & 100 \\ + & & & & & & & & & & & & & & & \\ (2) & S & = & 100 & + & 99 & + & 98 & + & \dots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\ \hline & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & 2 \cdot S & = & \multicolumn{13}{c}{\underbrace{101 + 101 + 101 + \dots + 101 + 101 + 101}_{\text{cem parcelas}}} \end{array}$$

Assim, $2 \cdot S = 100 \cdot 101$

$$S = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050$$

Observe que 100 corresponde ao número de termos da P.A., e 101 é a soma dos termos extremos dessa P.A. ($a_1 + a_{100} = 1 + 100 = 101$).

Vamos agora generalizar esse raciocínio para uma P.A. qualquer, mostrando a seguinte propriedade:

> A soma dos **n** primeiros termos da P.A. ($a_1, a_2, ..., a_n, ...$) é dada por:
>
> $$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

De fato, como a sequência ($a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$) é uma P.A. de razão **r**, podemos escrevê-la na forma:

$$(a_1, \underbrace{a_1 + r}_{a_2}, \underbrace{a_1 + 2r}_{a_3}, ..., \underbrace{a_n - 2r}_{a_{n-2}}, \underbrace{a_n - r}_{a_{n-1}}, a_n)$$

Vamos calcular a soma dos **n** primeiros termos dessa P.A., que indicaremos por $\mathbf{S_n}$. Repetindo o raciocínio anterior, temos:

$$
\begin{array}{lcl}
① \ S_n & = & a_1 + (a_1 + \cancel{r}) + (a_1 + \cancel{2}r) + \dots + (a_n - \cancel{2}r) + (a_n - \cancel{r}) + a_n \\
+ & & \\
② \ S_n & = & a_n + (a_n - \cancel{r}) + (a_n - \cancel{2}r) + \dots + (a_1 + \cancel{2}r) + (a_1 + \cancel{r}) + a_1 \\
\hline
2 \cdot S_n & = & \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)}_{\mathbf{n}\ \text{parcelas}}
\end{array}
$$

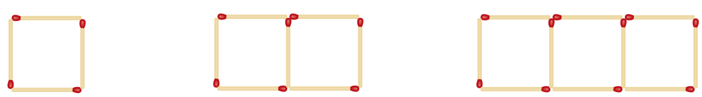
$$2 \cdot S_n = (a_1 + a_n) \cdot n \Rightarrow \boxed{S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}}$$

PENSE NISTO:

Note que, em uma P.A. finita, a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos termos extremos.

EXEMPLO 3

Considerando a atividade desenvolvida na seção *Troque ideias* na página 174, vamos determinar a quantidade total de palitos usada para se construir as 20 primeiras figuras:



1ª figura 2ª figura 3ª figura

Temos a P.A. (4, 7, 10, 13, ...). Seu 20º termo é $a_{20} = a_1 + 19r \Rightarrow$
$\Rightarrow a_{20} = 4 + 19 \cdot 3 = 61$

Assim, é preciso determinar $S_{20} = \dfrac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2} = \dfrac{(4 + 61) \cdot 20}{2} = 650$

Precisamos, então, de 650 palitos.

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

7 Qual é o valor de $(-61) + (-54) + (-47) + \dots + 296 + 303$?

Solução:

A sequência $(-61, -54, -47, \dots, 296, 303)$ é uma P.A. de razão 7, da qual conhecemos seu primeiro termo, $a_1 = -61$, e seu último termo, que é $a_n = 303$.

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow 303 = -61 + (n - 1) \cdot 7 \Rightarrow n = 53$$

Assim, a P.A. possui 53 termos. Daí, a soma pedida é:

$$\frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} = \frac{(-61 + 303) \cdot 53}{2} = 6413$$

8 Em relação à sequência dos números naturais ímpares, calcule:

a) a soma dos 50 primeiros termos;

b) a soma dos **n** primeiros termos.

Solução:

A sequência é (1, 3, 5, 7, ...), com $r = 2$.

a) $a_{50} = a_1 + 49r \Rightarrow a_{50} = 1 + 49 \cdot 2 \Rightarrow a_{50} = 99$

Assim:

$$S_{50} = \frac{(a_1 + a_{50}) \cdot 50}{2} \Rightarrow S_{50} = \frac{(1 + 99) \cdot 50}{2} \Rightarrow S_{50} = 2500$$

b) $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow a_n = 1 + (n - 1) \cdot 2 \Rightarrow a_n = -1 + 2n$

Daí:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \Rightarrow S_n = \frac{(1 - 1 + 2n) \cdot n}{2} \Rightarrow S_n = n^2$$

Podemos verificar a resposta encontrada no item *b* atribuindo valores para **n** ($n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$):

- $n = 1$: a sequência é (1), e a soma é $S_1 = 1 = 1^2$
- $n = 2$: a sequência é (1, 3), e a soma é $S_2 = 1 + 3 = 4 = 2^2$
- $n = 3$: a sequência é (1, 3, 5), e a soma é $S_3 = 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$
- $n = 4$: a sequência é (1, 3, 5, 7), e a soma é $S_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$

⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

32 Calcule a soma dos quinze primeiros termos da P.A. (−45, −41, −37, −33, ...).

33 Calcule a soma dos vinte primeiros termos da P.A. (0,15; 0,40; 0,65; 0,9; ...).

34 Para a compra de uma TV pode-se optar por um dos planos seguintes:

- plano alfa: entrada de R$ 400,00 e mais 13 prestações mensais crescentes, sendo a primeira de R$ 35,00, a segunda de R$ 50,00, a terceira de R$ 65,00 e assim por diante;
- plano beta: 15 prestações mensais iguais de R$ 130,00 cada uma.

a) Em qual dos planos o desembolso total é maior?

b) Qual deveria ser o valor da entrada do plano alfa para que, mantidas as demais condições, os desembolsos totais fossem iguais?

35 Suponha que, em certo mês (com 30 dias), o número de queixas diárias registradas em um órgão de defesa do consumidor aumente segundo uma P.A.

Sabendo que nos dez primeiros dias houve 245 reclamações, e nos dez dias seguintes houve mais 745 reclamações, represente a sequência do número de queixas naquele mês.

36 A soma dos **n** primeiros termos de uma P.A. é dada por $S_n = 18n - 3n^2$, sendo $n \in \mathbb{N}^*$. Determine:

a) o 1º termo da P.A. **b)** a razão da P.A. **c)** o 10º termo da P.A.

37 Uma criança organizou suas 1 378 figurinhas, colocando 3 na primeira fileira, 7 na segunda fileira, 11 na terceira fileira, 15 na quarta e assim por diante, até esgotá-las. Quantas fileiras a criança conseguiu formar?

38 Utilizando-se um fio de comprimento **L** é possível construir uma sequência de 16 quadrados em que a medida do lado de cada quadrado, a partir do segundo, é 2 cm maior que a medida do lado do quadrado anterior. Sabendo que para a construção do sétimo quadrado são necessários 68 cm, determine o valor de **L**.

39 No esquema seguinte, os números naturais não nulos aparecem dispostos em blocos de três linhas e três colunas, conforme indicado abaixo: $\mathbf{B_1}$, $\mathbf{B_2}$, $\mathbf{B_3}$, ...

	B_1	B_2	B_3	B_4	
1ª linha →	1 2 3	10 11 12	19 20 21	28 29 30	...
2ª linha →	4 5 6	13 14 15	22 23 24	31 32 33	...
3ª linha →	7 8 9	16 17 18	25 26 27	34 35 36	...
	1ª coluna 2ª coluna 3ª coluna				

a) Em que linha e coluna encontra-se o elemento 787? A qual bloco ele pertence?

b) Determine o elemento que está na 3ª linha e 1ª coluna do bloco $\mathbf{B_{100}}$.

c) Determine o elemento que está na 2ª linha e 3ª coluna do bloco $\mathbf{B_{500}}$.

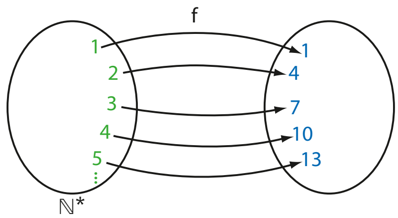
d) Qual é a soma de todos os elementos que se encontram na 2ª linha e 2ª coluna dos 500 primeiros blocos?

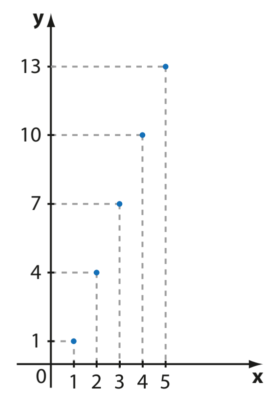
e) Qual é a soma de todos os elementos escritos nos 200 primeiros blocos?

Progressão aritmética e função afim

Vamos estabelecer uma importante conexão entre P.A. e função afim.

Já vimos que a P.A. (1, 4, 7, 10, 13, 16, ...) é uma função **f** de domínio em $\mathbb{N}^*$, como mostra o diagrama abaixo:





No gráfico ao lado, podemos observar parte do conjunto dos pontos que representam **f**.

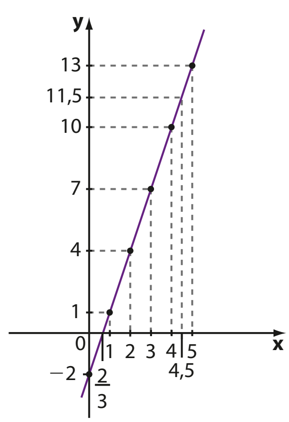
Lembre que, embora os pontos estejam alinhados, não traçamos uma reta, pois **f** está definida apenas para valores naturais positivos.

O termo geral dessa P.A. é:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow a_n = 1 + (n - 1) \cdot 3 \Rightarrow a_n = -2 + 3n$$

Podemos, desse modo, associar **f** à função dada por $y = -2 + 3x$, restrita aos valores naturais não nulos que a variável **x** assume.

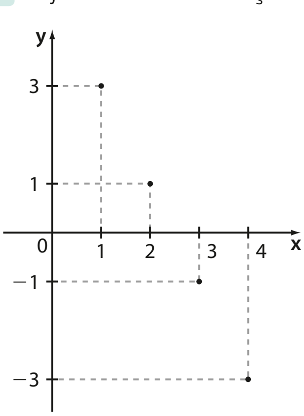
Observe abaixo o gráfico da função afim dada por $y = -2 + 3x$, com domínio $\mathbb{R}$, e compare com o gráfico ao lado:



EXERCÍCIO

FAÇA NO CADERNO

40 Seja f: $\mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ a função cujo gráfico está abaixo representado.



a) Determine a lei de **f**.

b) Qual é a progressão aritmética associada à função **f**? Obtenha seu termo geral.

Progressões geométricas

TROQUE IDEIAS

A propagação de uma notícia

Você já imaginou a velocidade com que uma notícia, corrente, foto, vídeo ou boato podem ser multiplicados pelas redes sociais?

Suponha que, em certo dia, dois amigos criaram um blogue sobre saúde e bem-estar, com dicas, receitas de comidas saudáveis, relatos de experiências pessoais etc.

No dia seguinte, cada um desses amigos convidou três novos amigos para visitar o blogue. Cada um desses três novos amigos convidou, no outro dia, três outros amigos para visitar o blogue e assim sucessivamente.

Faça o que se pede a seguir.

Suponha que esse padrão seja mantido e que ninguém seja convidado a visitar o blogue por mais de um amigo.

a) Começando pelo dia em que o blogue foi criado, escreva a sequência que representa o número diário de visitantes do blogue.

b) Responda: qual é a regularidade que você observa nessa sequência?

c) Obtenha um termo geral dessa sequência.

d) Responda: em quantos dias (considere o dia 1 o dia da criação do blogue) o número de visitas diárias ao blogue terá superado 1 milhão? Use uma calculadora.

Progressão geométrica (P.G.) é a sequência em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao produto do termo anterior por uma constante real. Essa constante é chamada **razão da P.G.** e é indicada por **q**.

EXEMPLO 4

a) $(4, 12, 36, 108, \ldots)$ é uma P.G. de razão $q = 3$.

b) $(-3, -15, -75, -375, \ldots)$ é uma P.G. de razão $q = 5$.

c) $\left(2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\right)$ é uma P.G. de razão $q = \frac{1}{2}$.

d) $(2, -8, 32, -128, 512, \ldots)$ é uma P.G. de razão $q = -4$.

e) $(-1\,000, -100, -10, -1, \ldots)$ é uma P.G. de razão $q = \frac{1}{10} = 0{,}1$.

f) $(-4, -4, -4, -4, \ldots)$ é uma P.G. de razão $q = 1$.

g) $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \ldots\right)$ é uma P.G. de razão $q = -1$.

h) $(\sqrt{3}, 0, 0, 0, \ldots)$ é uma P.G. de razão $q = 0$.

PENSE NISTO:

Por que dizemos que a razão da P.G. $(0, 0, 0, \ldots)$ é indeterminada?

OBSERVAÇÃO

Nos itens do exemplo anterior, é possível notar que, se a P.G. não possui termos nulos, sua razão corresponde ao quociente entre um termo qualquer (a partir do segundo) e o termo antecedente, isto é:

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \ldots = \frac{a_{p+1}}{a_p}$$

Classificação

Há cinco categorias de P.G. Vejamos quais são, retomando os itens do exemplo 4.

1. **Crescente:** cada termo é maior que o termo antecedente. Isso ocorre quando:
   - $a_1 > 0$ e $q > 0$, como no item *a*; ou
   - $a_1 < 0$ e $0 < q < 1$, como no item *e*.
2. **Decrescente:** cada termo é menor que o termo antecedente. Isso ocorre quando:
   - $a_1 > 0$ e $0 < q < 1$, como no item *c*; ou
   - $a_1 < 0$ e $q > 1$, como no item *b*.
3. **Constante:** cada termo é igual ao termo antecedente. Isso ocorre quando:
   - $q = 1$, como no item *f*; ou
   - $a_1 = 0$ e **q** é qualquer número real, como em (0, 0, 0, ...).
4. **Alternada ou oscilante:** os termos são alternadamente positivos e negativos. Isso ocorre quando $q < 0$, como nos itens *d* e *g*.
5. **Estacionária:** é uma P.G. constante a partir do segundo termo. Isso ocorre quando $a_1 \neq 0$ e $q = 0$, como no item *h*.

PENSE NISTO:

Como podemos definir uma P.G. cujo primeiro termo é $\mathbf{a_1}$ e a razão é **q**, usando uma lei de recorrência?

Termo geral da P.G.

Vamos agora encontrar uma expressão que nos permita obter um termo qualquer da P.G. conhecendo apenas o 1º termo ($\mathbf{a_1}$) e a razão (**q**).

Seja $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ uma P.G.

De acordo com a definição de P.G., podemos escrever:

$$\boxed{a_2 = a_1 \cdot q}$$

$$a_3 = a_2 \cdot q \Rightarrow \boxed{a_3 = a_1 \cdot q^2}$$

$$a_4 = a_3 \cdot q \Rightarrow \boxed{a_4 = a_1 \cdot q^3}$$

$$a_5 = a_4 \cdot q \Rightarrow \boxed{a_5 = a_1 \cdot q^4}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

De modo geral, o termo $\mathbf{a_n}$, que ocupa a n-ésima posição na sequência, é dado por:

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$$

Essa expressão, conhecida como **fórmula do termo geral da P.G.**, permite-nos conhecer qualquer termo da P.G. em função do 1º termo ($\mathbf{a_1}$) e da razão (**q**).

Assim, temos:

- $a_6 = a_1 \cdot q^5$
- $a_{11} = a_1 \cdot q^{10}$
- $a_{29} = a_1 \cdot q^{28}$

e assim por diante.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

9 Determine o 10º termo da P.G. $\left(\frac{1}{3}, 1, 3, 9, ...\right)$.

Solução:

Sabemos que $a_1 = \frac{1}{3}$ e $q = 3$.

Assim, pela expressão do termo geral, podemos escrever:

$a_{10} = a_1 \cdot q^9 \Rightarrow a_{10} = \frac{1}{3} \cdot 3^9 = 3^8 = 6\,561$

10 Em uma P.G., o quarto e o sétimo termos são, respectivamente, 32 e 2 048. Qual é seu primeiro termo?

Solução:

Temos: $\begin{cases} a_4 = 32 \\ a_7 = 2\,048 \end{cases}$

Usando a expressão do termo geral, podemos escrever: $\begin{cases} a_1 \cdot q^3 = 32 & (1) \\ a_1 \cdot q^6 = 2\,048 & (2) \end{cases}$

Dividindo, membro a membro, (1) por (2), obtemos:

$\frac{\cancel{a_1} \cdot q^3}{\cancel{a_1} \cdot q^6} = \frac{32}{2\,048} \Rightarrow \frac{1}{q^3} = \frac{1}{64} \Rightarrow q^3 = 64 \Rightarrow q = 4$

Substituindo em (1), segue que:

$$a_1 \cdot 4^3 = 32 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{2}$$

PENSE NISTO:

Como podemos expressar o 7º termo de uma P.G. em função do 4º termo e da razão?

11 Determine $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$ a fim de que a sequência $(5x + 1, x + 1, x - 2)$ seja uma P.G.

Solução:

$\frac{x + 1}{5x + 1} = \frac{x - 2}{x + 1} \Rightarrow (x + 1)^2 = (x - 2) \cdot (5x + 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x^2 - 11x - 3 = 0$

As raízes dessa equação são $x_1 = 3$ ou $x_2 = -\frac{1}{4}$.

Verificando, para $x = 3$, a P.G. é $(16, 4, 1)$ e, para $x = -\frac{1}{4}$, a P.G. é $\left(-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{9}{4}\right)$.

12 Em uma P.A. não constante, o 1º termo é 10; sabe-se que o 3º, o 5º e o 8º termos dessa P.A. são, sucessivamente, os três primeiros termos de uma P.G. Quais são os termos dessa P.G.?

Solução:

Usando a fórmula do termo geral da P.A., em que $a_1 = 10$, temos:

$a_3 = 10 + 2r$; $a_5 = 10 + 4r$ e $a_8 = 10 + 7r$

Da hipótese, (a_3, a_5, a_8) é P.G., isto é, $(10 + 2r, 10 + 4r, 10 + 7r)$ é P.G.

Devemos ter:

$\frac{10 + 4r}{10 + 2r} = \frac{10 + 7r}{10 + 4r} \Rightarrow$

$\Rightarrow (10 + 4r)^2 = (10 + 7r) \cdot (10 + 2r) \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{100} + 80r + 16r^2 = \cancel{100} + 90r + 14r^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2r^2 - 10r = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} r = 0 \text{ (não convém, pois a P.A. é não constante)} \\ \text{ou} \\ r = 5 \end{cases}$

Os três primeiros termos da P.G. são: $10 + 2 \cdot 5$, $10 + 4 \cdot 5$, $10 + 7 \cdot 5$. Então, a P.G. é $(20, 30, 45, ...)$. Observe que a razão dessa P.G. é 1,5.

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

41 Identifique as sequências que representam progressões geométricas:

a) $(3, 12, 48, 192, ...)$
b) $(-3, 6, -12, 24, -48, ...)$
c) $(5, 15, 75, 375, ...)$
d) $(\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, ...)$
e) $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}, -\frac{1}{24}, ...\right)$
f) $(\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}, 4\sqrt{3}, ...)$

42 Calcule a razão de cada uma das seguintes progressões geométricas:

a) $(1, 2, 4, 8, 16, ...)$
b) $(10^{40}, 10^{42}, 10^{44}, 10^{46}, ...)$
c) $(-2, 6, -18, 54, ...)$
d) $(5, -5, 5, -5, 5, ...)$
e) $(80, 40, 20, 10, 5, ...)$
f) $(10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, ...)$

43 Qual é o 8º termo da P.G. $(-1, 4, -16, 64, ...)$?

44 Qual é o 6º termo da P.G. $(-240, -120, -60, ...)$?

45 Em uma P.G. crescente, o 3º termo vale -80, e o 7º termo, -5. Qual é seu 1º termo?

46 O número de consultas a um *site* de comércio eletrônico aumenta semanalmente (desde a data em que o portal ficou acessível), segundo uma P.G. de razão 3. Sabendo que na 6ª semana foram registradas 1 458 visitas, determine o número de visitas ao *site* registrado na 3ª semana.

47 Em uma colônia de bactérias, o número de elementos dobra a cada hora. Sabendo que, na 5ª hora de observação, o número de bactérias era igual a 4^{19}, determine:

a) o número de bactérias na colônia na 1ª hora de observação;

b) o número de bactérias esperado para a 10ª hora de observação.

48 Em uma reunião de condomínio, os moradores analisaram os valores das taxas mensais de obras cobradas em alguns meses de 2016:

março: R$ 120,00	maio: R$ 172,80
abril: R$ 144,00	junho: R$ 207,36

Um dos moradores percebeu que havia uma regularidade nesses valores.

a) Classifique a sequência de valores cobrados, determinando sua razão.

b) Sabe-se que o padrão na cobrança teve início em janeiro de 2016 e se estendeu até janeiro de 2017. Determine a diferença entre os valores cobrados em janeiro desses 2 anos, arredondando, em todos os cálculos para valores inteiros. Use $1{,}2^{12} \simeq 8{,}9$.

49 Em cada item a seguir, a sequência é uma P.G. Determine o valor de **x**:

a) $(4, x, 9)$

b) $(x^2 - 4, 2x + 4, 6)$

c) $(-2, x + 1, -4x + 2)$

d) $\left(\frac{1}{2}, \log_{0,25} x, 8\right)$

50 As idades da senhora Beatriz, de sua filha e de sua neta formam, nessa ordem, uma P.G. de razão $\frac{2}{3}$. Determine as três idades, sabendo que a neta tem cinquenta anos a menos que a avó.

51 Subtraindo-se um mesmo número de cada um dos termos da sequência (2, 5, 6), ela se transforma em uma P.G.

a) Que número é esse?

b) Qual é a razão da P.G.?

52 Uma dívida deverá ser paga em sete parcelas, de modo que elas constituam termos de uma P.G. Sabe-se que os valores da 3ª e 6ª parcelas são, respectivamente, R$ 144,00 e R$ 486,00. Determine:

a) o valor da 1ª parcela;

b) o valor da última parcela.

53 Para cada P.G. seguinte, encontre o número de termos:

a) $(2^{31}, 2^{35}, 2^{39}, ..., 2^{111})$

b) $\left(-\frac{1}{120}, \frac{1}{60}, -\frac{1}{30}, ..., \frac{64}{15}\right)$

54 Os números que expressam as medidas do lado, o perímetro e a área de um quadrado podem estar, nessa ordem, em P.G.? Em caso afirmativo, qual deve ser a medida do lado do quadrado?

55 Em uma P.G. de 3 termos positivos, o produto dos termos extremos vale 625, e a soma dos dois últimos termos é igual a 30. Qual é o 1º termo?

56 Escreva três números em P.G. cujo produto seja 216 e a soma dos dois primeiros termos seja 9.

57 A sequência $(13, 4x + 1, 21)$ é uma P.A. e a sequência $\left(\frac{x}{8}, y, 32\right)$ é uma P.G. Quais são os valores de **x** e **y**?

58 A sequência (8, 2, a, b, ...) é uma P.G. e a sequência $\left(b, \frac{3}{16}, c, ...\right)$ é uma P.A.

a) Qual é o valor de **c**?

b) O número **a** pertence à P.A.? Em caso afirmativo, qual é a sua posição nessa sequência?

59 Sejam **f** e **g** duas funções definidas de $\mathbb{N}^*$ em $\mathbb{N}^*$ dadas pelos termos gerais $a_n = 3n + 4$ e $b_n = 2^{a_n}$, respectivamente. Verifique se **f** é uma P.A. e **g** é uma P.G., e, em caso afirmativo, determine suas respectivas razões.

60 Em uma P.A. crescente, cujo primeiro termo vale 2, o 2º, o 5º e o 14º termos formam, nessa ordem, uma P.G. Obtenha a razão dessa P.G.

61 Qual é a condição sobre os números reais **a**, **b** e **c** de modo que a sequência (a, b, c) seja, simultaneamente, uma P.A. e uma P.G.?

Soma dos n primeiros termos de uma P.G.

Seja $(a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ uma P.G.

Queremos encontrar uma expressão para a soma de seus **n** primeiros termos, a saber:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n \quad (1)$$

Multiplicando por **q** (com $q \neq 0$) os dois membros da igualdade anterior e lembrando a formação dos elementos de uma P.G., segue que:

$$q \cdot S_n = q(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n) =$$
$$= \underbrace{a_1 \cdot q}_{a_2} + \underbrace{a_2 \cdot q}_{a_3} + \underbrace{a_3 \cdot q}_{a_4} + ... + \underbrace{a_{n-1} \cdot q}_{a_n} + a_n \cdot q$$

$$q \cdot S_n = a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_n + a_n \cdot q \quad (2)$$

Subtraindo (1) de (2) obtemos:

$$q \cdot S_n - S_n = (\cancel{a_2} + \cancel{a_3} + ... + \cancel{a_{n-1}} + \cancel{a_n} + a_n \cdot q) - (a_1 + \cancel{a_2} + \cancel{a_3} + ... + \cancel{a_{n-1}} + \cancel{a_n})$$

$$S_n \cdot (q - 1) = a_n \cdot q - a_1$$

Como $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, temos:

$$S_n \cdot (q - 1) = a_1 q^{n-1} \cdot q - a_1, \text{ isto é,}$$

$$S_n \cdot (q - 1) = a_1 q^n - a_1 \xRightarrow{q \neq 1} \boxed{S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}}$$

Observe que, se $q = 1$, a fórmula deduzida não pode ser aplicada, pois anula o denominador. Nesse caso, todos os termos da P.G. são iguais e, para calcular a soma de seus **n** primeiros termos, basta fazer:

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \underbrace{a_1 + a_1 + ... + a_1}_{\textbf{n} \text{ parcelas}} \Rightarrow S_n = n \cdot a_1$$

PENSE NISTO:

Considerando a situação descrita na seção *Troque ideias* da página 182, determine o número total de visitantes do blogue nos dez primeiros dias. Considere como dia 1 o dia da criação do blogue, de modo que a P.G. que representa o número diário de visitantes é: (2, 6, 18, 54, ...).

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

13 Um indivíduo pediu a um amigo um empréstimo e combinou de pagá-lo em oito prestações, sendo a primeira de R$ 60,00, a segunda de R$ 90,00, a terceira de R$ 135,00, e assim por diante, mantendo o mesmo padrão.

Qual é o valor total a ser pago?

Solução:

A sequência de valores das prestações (60; 90; 135; 202,50; ...) é uma P.G. de razão $q = \frac{90}{60} = 1,5$.

O valor total a ser pago corresponde à soma dos oito primeiros termos dessa P.G., a saber:

$$S_8 = \frac{a_1 \cdot (q^8 - 1)}{q - 1} = \frac{60 \cdot (1,5^8 - 1)}{1,5 - 1}$$

Com uma calculadora, obtemos o valor aproximado de $1,5^8 \simeq 25,63$ e $S_8 = \frac{60 \cdot 24,63}{0,5} = 2\,955,6$.

O valor total pago é R$ 2 955,60.

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

62 Calcule a soma dos seis primeiros termos da P.G. $(-2, 4, -8, ...)$.

63 Calcule a soma dos oito primeiros termos da P.G. (320, 160, 80, ...).

64 A tabela seguinte informa a projeção do número de livros vendidos em uma livraria nos primeiros anos de atividade:

Ano	Número de livros
1	50 000
2	60 000
3	72 000
4	86 400

Se for mantido esse padrão, qual será o total de livros vendidos nessa livraria nos seus dez primeiros anos de atividade? Considere $1{,}2^5 \simeq 2{,}5$.

65 No financiamento de uma moto, ficou combinado que o proprietário faria o pagamento em vinte prestações mensais que formam uma P.G. de razão 1,02.

Sabendo que o valor da quarta prestação era de R$ 318,00, determine o valor total pago pela moto.

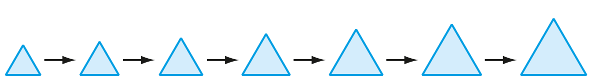
Considere: $1{,}02^3 \simeq 1{,}06$ e $1{,}02^{20} \simeq 1{,}5$.

66 Seja a sequência definida pelo termo geral $a_n = \frac{3^n}{6}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Calcule a soma de seus três primeiros termos.

b) Quantos termos devemos somar na sequência, a partir do primeiro, a fim de obter soma igual a 14 762?

67 Na sequência abaixo, todos os triângulos são equiláteros e o perímetro de determinado triângulo, a partir do 2º, é $\frac{5}{4}$ do perímetro do triângulo anterior:



Sabendo que o lado do 2º triângulo mede 1 m, determine:

a) a medida do perímetro do 1º triângulo;

b) a medida do lado do 4º triângulo;

c) o número inteiro mínimo de metros necessários para a construção da sequência acima. Considere $1{,}25^7 \simeq 4{,}8$.

68 Certo dia, em uma pequena cidade, 5 pessoas ficam sabendo que um casal do colégio começou a namorar. No dia seguinte, cada uma delas contou essa notícia para outras duas pessoas. Cada uma dessas pessoas repassou, no dia seguinte, essa notícia para outras duas pessoas e assim sucessivamente. Passados oito dias, quantas pessoas já estarão sabendo da notícia? Admita que ninguém fique sabendo da notícia por mais de uma pessoa.

Soma dos termos de uma P.G. infinita

Seja ($\mathbf{a}_n$) uma sequência dada pelo termo geral: $a_n = \left(\frac{1}{10}\right)^n$, para $n \in \mathbb{N}^*$. Vamos atribuir valores para **n** ($n = 1, 2, 3, ...$) para caracterizar essa sequência:

$$n = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

$$n = 2 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{100} = 0{,}01$$

$$n = 3 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{1\,000} = 0{,}001$$

$$n = 4 \Rightarrow a_4 = \frac{1}{10\,000} = 0{,}0001$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$n = 10 \Rightarrow a_{10} = \frac{1}{10^{10}} = 0{,}0000000001$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

Trata-se da P.G. (0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; ...) de razão $q = \frac{1}{10}$. É fácil perceber que, à medida que o valor do expoente **n** aumenta, o valor do termo $\mathbf{a}_n$ fica cada vez mais próximo de zero.

Dizemos, então, que o limite de $a_n = \left(\frac{1}{10}\right)^n$, quando **n** tende ao infinito (isto é, quando **n** se torna "arbitrariamente grande"), vale zero e representamos esse fato da seguinte maneira: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \left(\text{ou } \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n = 0\right)$.

Faça as contas com algumas outras sequências desse tipo, como, por exemplo, $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, $b_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$ ou $c_n = 0{,}75^n$, e verifique se chega à mesma conclusão. Use uma calculadora.

PENSE NISTO:

Por que essa propriedade não vale para sequências do tipo $a_n = 2^n$ ou $b_n = 10^n$ ou $c_n = -(4^n)$?

De modo geral, pode-se mostrar que, se $q \in \mathbb{R}$, com $|q| < 1$, isto é, $-1 < q < 1$, então $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$.

Nosso objetivo é calcular a soma dos infinitos termos de uma P.G. cuja razão **q** é tal que $-1 < q < 1$.

Para isso, precisamos analisar o que ocorre com a soma de seus **n** primeiros termos quando **n** tende ao infinito, isto é, quando **n** se torna "arbitrariamente grande". Temos:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}\right), \text{ com } -1 < q < 1$$

Levando em conta as considerações anteriores, temos que:

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0$$

Assim, segue que:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1 \cdot (0 - 1)}{q - 1} = \frac{-a_1}{q - 1} = \frac{a_1}{1 - q}$$

Na P.G. ($a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$) de razão **q**, com $-1 < q < 1$, temos:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}$$

Dizemos, então, que a soma dos termos da P.G. infinita é igual a $\frac{a_1}{1 - q}$.

EXEMPLO 5

Vamos calcular a soma dos termos da P.G. infinita $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\right)$.

Inicialmente, note que $q = \frac{1}{2}$ e $-1 < \frac{1}{2} < 1$.

Assim: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$

Podemos interpretar geometricamente esse fato.

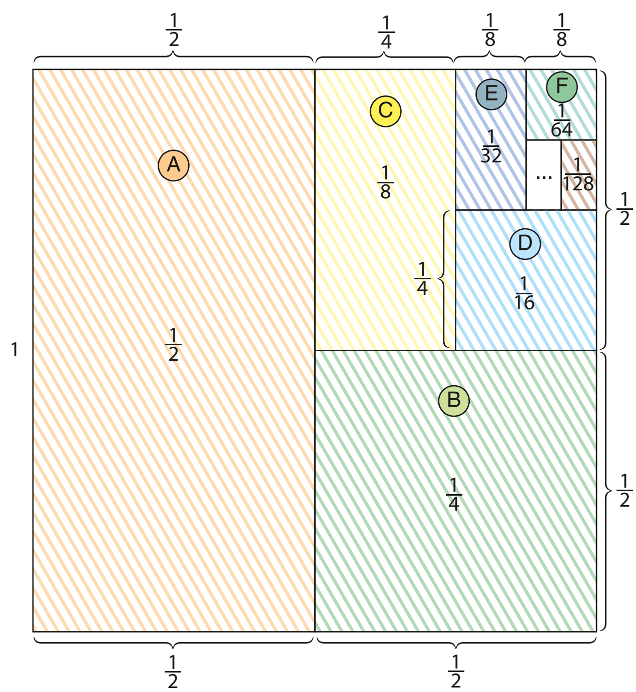
Vamos considerar o seguinte experimento:

Seja um quadrado de lado unitário. Vamos dividi-lo em duas partes iguais, hachurar uma delas e, na outra, repetir o procedimento, isto é, dividir essa parte em duas partes iguais, hachurando uma delas e dividindo a outra em duas partes iguais.

Vamos continuar, em cada etapa, dividindo a parte não hachurada em duas até que não seja mais possível fazê-lo, devido ao tamanho reduzido da parte. A operação pode ser repetida indefinidamente usando, por exemplo, um programa computacional.

A figura ao lado ilustra esse procedimento.

A soma das áreas dos "infinitos" retângulos assim construídos deve ser igual à área do quadrado original, isto é:



$$\underbrace{1 \cdot \frac{1}{2}}_{A} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}_{B} + \underbrace{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}}_{C} + \underbrace{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}}_{D} + \underbrace{\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4}}_{E} + \underbrace{\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8}}_{F} + \ldots = 1$$

ou, melhor:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \ldots = 1$$

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

14 Obtenha a fração geratriz da dízima 0,2222...

Solução:

Seja x = 0,2222... . Podemos escrever **x** na forma:

$$x = 0{,}2 + 0{,}02 + 0{,}002 + 0{,}0002 + \ldots$$

Observe que **x** representa a soma dos termos de uma P.G. infinita, cujo 1º termo é $a_1 = 0{,}2$ e a razão é $q = \frac{0{,}02}{0{,}2} = 0{,}1$.

Assim: $x = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{0{,}2}{1 - 0{,}1} \Rightarrow x = \frac{2}{9}$

15 Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{16} - \frac{x^4}{64} + ... = \frac{4}{3}$

Solução:

O 1º membro da equação representa a soma dos termos da P.G. infinita $\left(x, -\frac{x^2}{4}, \frac{x^3}{16}, -\frac{x^4}{64}, ...\right)$, cujo valor é:

$$\frac{a_1}{1-q} = \frac{x}{1 - \left(-\frac{x}{4}\right)}$$

Daí:

$$\frac{x}{1 + \frac{x}{4}} = \frac{4}{3} \Rightarrow 3x = 4 + x \Rightarrow x = 2$$

Note que, para $x = 2$, temos $q = -\frac{x}{4} = -\frac{1}{2}$ e $-1 < q < 1$.

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

69 Determine o valor de:

a) $20 + 10 + 5 + 2{,}5 + ...$

b) $90 + 9 + \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + ...$

c) $10^{-3} + 10^{-4} + 10^{-5} + ...$

d) $-25 - 5 - 1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{25} - ...$

e) $9 - 3 + 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - ...$

70 Seja a sequência ($\mathbf{a}_n$) dada pelo termo geral $a_n = \frac{9}{2 \cdot 3^n}$, em que $n \in \mathbb{N}^*$.

Qual é o valor de $a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + ...$?

71 Encontre a fração geratriz de cada uma das seguintes dízimas periódicas:

a) 0,444...   **b)** 1,777...   **c)** $0,\overline{27}$ **d)** $2,3\overline{6}$

72 Considere uma sequência infinita de quadrados (Q_1, Q_2, Q_3, ...), em que, a partir de $\mathbf{Q}_2$, a medida do lado de cada quadrado é a décima parte da medida do lado do quadrado anterior. Sabendo que o lado de $\mathbf{Q}_1$ mede 10 cm, determine:

a) a soma dos perímetros de todos os quadrados da sequência;

b) a soma das áreas de todos os quadrados da sequência.

73 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações:

a) $x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{8} + ... = \frac{1}{3}$

b) $(1 + x) + (1 + x)^2 + (1 + x)^3 + ... = 3$

c) $x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{16} + \frac{x^4}{64} + ... = \frac{4}{3}$

d) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} + ... = 0{,}25$

74 Seja um triângulo equilátero de lado 12 cm. Unindo-se os pontos médios dos lados desse triângulo, obtém-se outro triângulo equilátero no centro da figura. Unindo-se os pontos médios dos lados desse último triângulo, constrói-se outro triângulo no centro da figura, e assim indefinidamente.

a) Qual é a soma dos perímetros de todos os triângulos assim construídos?

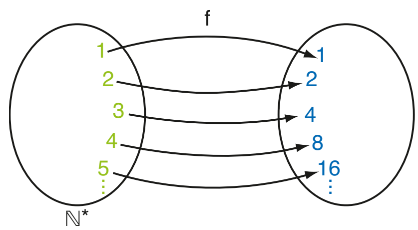
b) Qual é a soma das áreas de todos os triângulos assim construídos?

75 Uma bola é atirada ao chão de uma altura de 200 cm. Ao atingir o solo pela primeira vez, ela sobe até uma altura de 100 cm, cai e atinge o solo pela segunda vez, subindo até uma altura de 50 cm, e assim por diante subindo sempre metade da altura anterior, até perder energia e cessar o movimento. Quantos metros a bola percorre ao todo?

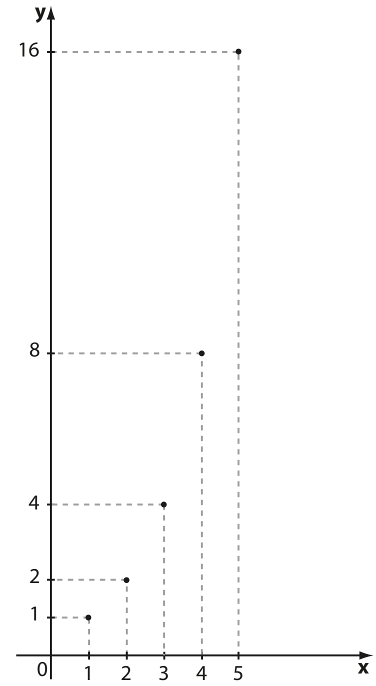
Progressão geométrica e função exponencial

Vamos estabelecer uma interessante conexão entre a P.G. e a função exponencial.

Seja a P.G. (1, 2, 4, 8, 16, 32, ...); já vimos que essa sequência é uma função **f** com domínio em ℕ*, como mostra o diagrama abaixo.



A representação gráfica de **f** é dada ao lado:

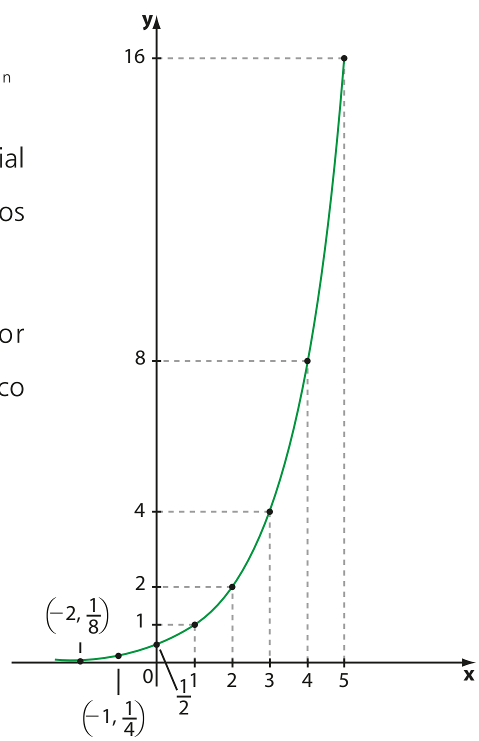


O termo geral dessa P.G. é:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_n = 1 \cdot 2^{n-1} = \frac{2^n}{2^1} \Rightarrow a_n = \frac{1}{2} \cdot 2^n$$

Desse modo, podemos associar **f** à função exponencial dada por $y = \frac{1}{2} \cdot 2^x$, restrita aos valores naturais não nulos que a variável **x** assume.

Veja o gráfico da função exponencial dada por $y = \frac{1}{2} \cdot 2^x$, com domínio em ℝ, e compare com o gráfico anterior.



EXERCÍCIOS

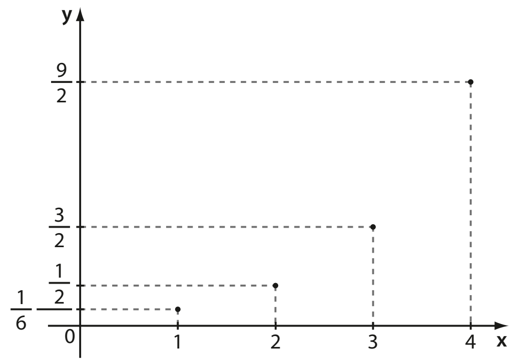
FAÇA NO CADERNO

76 Seja f: $\mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida por $f(x) = 4 \cdot (0,5)^x$.

a) Represente o conjunto imagem de **f**.

b) Esboce o gráfico de **f**.

77 O gráfico abaixo representa a função **f**, de domínio $\mathbb{N}^*$, definida por $y = \frac{1}{6} \cdot 3^{x+k}$, sendo **k** uma constante real.



a) Determine o valor de **k**.

b) Qual é a progressão geométrica associada à função **f**? Obtenha seu termo geral e sua razão.

DESAFIO

Em um congresso havia 600 profissionais da área de saúde. Suponha que, na cerimônia de encerramento, todos os participantes resolveram cumprimentar-se (uma única vez), com um aperto de mão. Quantos apertos de mão foram dados ao todo?

UM POUCO DE **HISTÓRIA**

A sequência de Fibonacci

Uma sequência muito conhecida na Matemática é a sequência de Fibonacci, nome pelo qual ficou conhecido o italiano Leonardo de Pisa (c. 1180-1250). Em 1202, Fibonacci apresentou em seu livro *Liber Abaci* o problema que o consagrou.

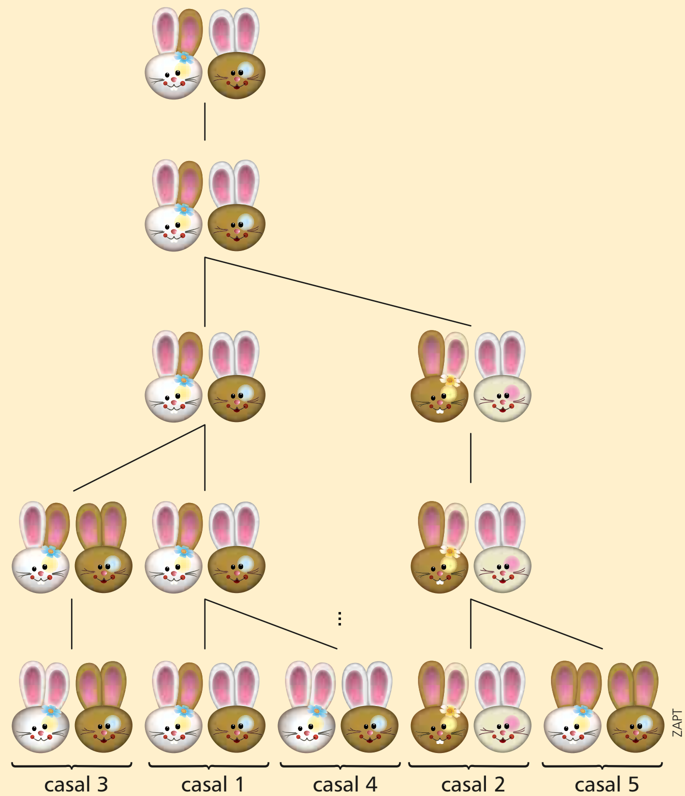
Fibonacci considerou, no período de um ano, um cenário hipotético para a reprodução de coelhos. Veja:

- No início, há apenas um casal que acabou de nascer.
- Os casais atingem a maturidade sexual e se reproduzem ao final de um mês.
- Um mês é o período de gestação dos coelhos.
- Todos os meses, cada casal maduro dá à luz um novo casal.
- Os coelhos nunca morrem.

STEFANO BIANCHETTI/CORBIS/LATINSTOCK/COLEÇÃO PARTICULAR

Retrato de Leonardo Fibonacci. Gravura de Pelle, sem data.

Acompanhe, a seguir, a quantidade de pares de coelhos, ao final de cada mês:



- Início: um único casal.
- Ao final de um mês, o casal acasala. Continuamos com um par.
- Ao final de dois meses, a fêmea dá à luz um novo par. Agora são dois pares.
- Ao final de três meses o "primeiro casal" dá à luz outro par, e o "segundo" casal acasala. São 3 pares.
- Ao final de quatro meses, o "primeiro" casal dá à luz outro par; o "segundo casal" dá à luz pela primeira vez e o terceiro par acasala. São 5 pares.

⋮

e assim por diante...

A sequência de pares de coelhos existentes, ao final de cada mês, evolui segundo os termos da sequência:

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...)$$

Note que, a partir do terceiro, cada termo dessa sequência é igual à soma dos dois termos anteriores. Assim, essa sequência pode ser definida pela lei de recorrência:

$$\begin{cases} f_1 = 1 \\ f_2 = 1 \\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 3 \end{cases}$$

Mais de quinhentos anos mais tarde, o escocês Robert Simson provou a seguinte propriedade dessa sequência: à medida que consideramos cada vez mais termos, o quociente entre um termo qualquer e o termo antecedente aproxima-se de 1,61803398..., que é o número de ouro, apresentado no capítulo 2.

Vejamos alguns exemplos:

$$\frac{f_{10}}{f_9} = \frac{55}{34} \simeq 1{,}6176; \quad \frac{f_{13}}{f_{12}} = \frac{233}{144} \simeq 1{,}61806; \quad \frac{f_{20}}{f_{19}} = \frac{6\,765}{4\,181} \simeq 1{,}6180$$

Outros estudos mostram uma ligação entre os números de Fibonacci e a natureza, como a quantidade de arranjos das folhas de algumas plantas em torno do caule, a organização das sementes na coroa de um girassol etc.

Fontes de pesquisa:

BOYER, Carl B. *História da Matemática*. 3ª ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2010.; *Eu acho que vi um coelhinho*. Unicamp – M3. Disponível em: <m3.ime.unicamp.br/recursos/1044>. Acesso em: 7 mar. 2016.; *O número de ouro e a sequência de Fibonacci.* Disponível em: <www.uff.br/cdme/rza/rza-html/rza-fibonacci-br.html>. Acesso: 7 mar. 2016.