CAPÍTULO 8

Função logarítmica

Introdução

Situação 1

Você sabia que uma pessoa com audição normal é capaz de ouvir uma grande faixa de sons de intensidades bem diversas?

Existe um valor mínimo de intensidade de som, abaixo do qual não se ouve som algum: é o limiar de audibilidade, cujo valor é, em W/m^2, igual a 10^{-12}; há também um valor de intensidade a partir do qual há dor: 1 W/m^2. W é o símbolo de watt, unidade de potência.

Manipular e comparar valores nessa faixa numérica, de $10^{-12} = 0{,}000\,000\,000\,001$ até 1,0 (além da faixa de sons cujas intensidades superam o limiar de dor), não é tarefa fácil nem prática. A saída encontrada pela Ciência é a utilização de uma **escala logarítmica**, cuja estrutura e vantagens vamos conhecer neste capítulo.

Situação 2

Suponhamos que um caminhão zero-quilômetro custe hoje R$ 120 000,00 e sofra uma desvalorização de 10% por ano de uso.

Depois de quanto tempo de uso o valor do veículo será igual a R$ 60 000,00?

A cada ano que passa o valor do caminhão fica sendo 90% do que era um ano atrás. Então, seu valor evolui da seguinte forma:

- após 1 ano de uso:
  90% de 120 000 reais, ou seja, 108 000 reais
- após 2 anos de uso:
  90% de 108 000 reais, ou seja, 97 200 reais
- após 3 anos de uso:
  90% de 97 200 reais, ou seja, 87 480 reais
  e assim por diante.

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

No Brasil, o transporte rodoviário é um dos principais meios de distribuição de cargas.

O valor do veículo em reais evolui, ano a ano, de acordo com a sequência:

$$120\,000; \quad (0{,}9)\cdot 120\,000; \quad (0{,}9)^2\cdot 120\,000; \quad (0{,}9)^3\cdot 120\,000; \quad ...; \quad (0{,}9)^x\cdot 120\,000$$

em que **x** indica o número de anos de uso.

Para responder à pergunta feita, devemos resolver a equação $(0{,}9)^x \cdot 120\,000 = 60\,000$, ou seja, $(0{,}9)^x = 0{,}5$, que é uma equação exponencial.

No entanto, não é possível reduzir as potências a uma mesma base. Para resolver essa equação usaremos logaritmos.

Esses problemas, além de outros, mostram a importância de se estudar a função logarítmica e os logaritmos.

No decorrer deste capítulo, vamos conhecer a solução desses problemas.

Logaritmos

Sendo **a** e **b** números reais e positivos, com $a \neq 1$, chama-se **logaritmo de b na base a** o expoente **x** ao qual se deve elevar a base **a** de modo que a potência a^x seja igual a **b**.

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

Dizemos que:

- **a** é a **base** do logaritmo;
- **b** é o **logaritmando**;
- **x** é o **logaritmo**.

Vejamos alguns exemplos de logaritmos:

- $\log_2 8 = 3$, pois $2^3 = 8$
- $\log_3 9 = 2$, pois $3^2 = 9$
- $\log_2 \frac{1}{4} = -2$, pois $2^{-2} = \frac{1}{4}$
- $\log_5 5 = 1$, pois $5^1 = 5$
- $\log_4 1 = 0$, pois $4^0 = 1$
- $\log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}$, pois $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$
- $\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$, pois $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$
- $\log_{0,5} 0,25 = 2$, pois $(0,5)^2 = 0,25$

Nesses exemplos, o cálculo do logaritmo poderia ser feito mentalmente. Porém, há casos em que isso não é tão simples, como mostra o exemplo seguinte:

EXEMPLO 1

Vamos calcular, por meio da definição:

a) $\log_{\sqrt[3]{9}} 3$

Façamos $\log_{\sqrt[3]{9}} 3 = x$. Temos:

$$(\sqrt[3]{9})^x = 3 \Rightarrow (\sqrt[3]{3^2})^x = 3 \Rightarrow \sqrt[3]{3^{2x}} = 3 \Rightarrow 3^{\frac{2x}{3}} = 3 \Rightarrow \frac{2x}{3} = 1 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

b) $\log_{16} 0,25$

Façamos $\log_{16} 0,25 = y$. Temos:

$$16^y = 0,25 \Rightarrow (2^4)^y = \frac{1}{4} \Rightarrow 2^{4y} = 2^{-2} \Rightarrow 4y = -2 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$$

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

1 Qual é o número real **x** em $\log_x 4 = -2$?

Solução:

O número procurado **x** deve ser tal que $0 < x$ e $x \neq 1$.

Aplicando a definição, temos:

$$x^{-2} = 4 \Rightarrow \frac{1}{x^2} = 4 \Rightarrow 4x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \xRightarrow{x > 0} x = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

Convenção importante

Convencionou-se que, ao escrevermos o logaritmo de um número com a base omitida, estamos nos referindo ao logaritmo desse número em base 10, isto é:

$$\log x = \log_{10} x$$

Assim, por exemplo, $\log 10\,000 = 4$ (pois $10^4 = 10\,000$); $\log \frac{1}{1\,000} = -3 \left(\text{pois } 10^{-3} = \frac{1}{1\,000}\right)$.

Os logaritmos em base 10 são conhecidos como **logaritmos decimais**.

OBSERVAÇÃO

As restrições para **a** ($0 < a$ e $a \neq 1$) e para **b** ($b > 0$) indicadas na definição garantem a existência e a unicidade de $\log_a b$.

Consequências

Sejam **a**, **b** e **c** números reais com $0 < a$ e $a \neq 1$, $b > 0$ e $c > 0$.

Decorrem da definição de logaritmo as seguintes propriedades:

- O logaritmo de 1 em qualquer base **a** é igual a 0.

$$\boxed{\log_a 1 = 0}, \text{ pois } a^0 = 1$$

- O logaritmo da base, qualquer que seja ela, é igual a 1.

$$\boxed{\log_a a = 1}, \text{ pois } a^1 = a$$

- A potência de base **a** e expoente $\log_a b$ é igual a **b**.

$$\boxed{a^{\log_a b} = b}$$

Para justificar essa propriedade, podemos fazer: $\log_a b = c \Rightarrow a^c = b$. Daí, $a^{\log_a b} = a^c = b$.

Outra forma de justificar é lembrar que o logaritmo de **b** na base **a** é o expoente que se deve dar à base **a** a fim de que a potência obtida seja igual a **b**.

Assim, por exemplo, temos que:

$$2^{\log_2 3} = 3;\ 5^{\log_5 4} = 4 \text{ etc.}$$

- Se dois logaritmos em uma mesma base são iguais, então os logaritmandos também são iguais.

  Reciprocamente, se dois números reais positivos são iguais, seus logaritmos em uma mesma base também são iguais.

$$\boxed{\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c}$$

Para justificar a primeira afirmação, temos: $\log_a b = \log_a c \underset{\text{def.}}{\Rightarrow} a^{\log_a c} = b$ e, pela propriedade anterior, segue que $c = b$.

Para justificar a recíproca, temos que $b = c$ e queremos mostrar que $\log_a b = \log_a c$.

Sejam $\log_a b = x$ e $\log_a c = y$.

Temos: $a^x = b$ e $a^y = c$. Como $b = c$, segue que $a^x = a^y \Rightarrow x = y$, ou melhor, $\log_a b = \log_a c$.

PENSE NISTO:

- O que aconteceria se a base do logaritmo fosse igual a 1 e o logaritmando fosse diferente de 1? Experimente calcular $\log_1 5$ ou $\log_1 4$.
- O que aconteceria se o logaritmando fosse um número negativo? Confira tentando calcular $\log_2 (-4)$.
- E se tivéssemos base e logaritmando iguais a 1? Que problema teríamos ao calcular $\log_1 1$?

EXEMPLO 2

Vamos calcular o número real **x** tal que $\log_5 (2x + 1) = \log_5 (x + 3)$.

Inicialmente, é importante lembrar que os logaritmos acima estão definidos se $2x + 1 > 0$ e $x + 3 > 0$, ou seja, $x > -\frac{1}{2}$ (1) e $x > -3$ (2). Fazendo (1) $\cap$ (2), obtemos: $x > -\frac{1}{2}$ (*).

Da igualdade $\log_5 (2x + 1) = \log_5 (x + 3)$ segue que:

$$2x + 1 = x + 3 \Rightarrow x = 2 \text{ (este valor satisfaz (*))}$$

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

2 Qual é o valor de $9^{\log_3 5}$?

Solução:

Como $9 = 3^2$, podemos escrever $(3^2)^{\log_3 5}$ e, trocando a posição dos expoentes, temos:

$$(3^{\log_3 5})^2 = 5^2 = 25$$

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

1 Usando a definição, calcule o valor dos seguintes logaritmos (procure fazer mentalmente):

a) $\log_2 16$

b) $\log_4 16$

c) $\log_3 81$

d) $\log_5 125$

e) $\log 100\,000$

f) $\log_8 64$

g) $\log_2 32$

h) $\log_6 216$

2 Use a definição para calcular:

a) $\log_2 \frac{1}{4}$

b) $\log_3 \sqrt{3}$

c) $\log_8 16$

d) $\log_4 128$

e) $\log_{36} \sqrt{6}$

f) $\log 0,01$

g) $\log_9 \frac{1}{27}$

h) $\log_{0,2} \sqrt[3]{25}$

i) $\log_{1,25} 0,64$

j) $\log_{\frac{5}{3}} 0,6$

3 Coloque em ordem crescente os seguintes números reais:

$A = \log_{25} 0,2$ $\quad$ $C = \log_{0,25} \sqrt{8}$

$B = \log_7 \frac{1}{49}$ $\quad$ $D = \log 0,1$

4 Qual é o valor de cada uma das expressões seguintes?

a) $\log_5 5 + \log_3 1 - \log 10$

b) $\log_{\frac{1}{4}} 4 + \log_4 \frac{1}{4}$

c) $\log 1\,000 + \log 100 + \log 10 + \log 1$

d) $3^{\log_3 2} + 2^{\log_2 3}$

e) $\log_8 (\log_3 9)$

f) $\log_9 (\log_4 64) + \log_4 (\log_3 81)$

5 Sabendo que $\log a = 2$ e $\log b = -1$, calcule o valor de:

a) $\log_b a$

b) $\log_a b$

c) $\log_a b^2$

d) $\log (a \cdot b)$

e) $\log \left(\frac{a}{b}\right)$

f) $\log_{\sqrt{b}} a$

6 Obtenha, em cada caso, o valor real de **x**:

a) $\log_5 x = \log_5 16$

b) $\log_3 (4x - 1) = \log_3 x$

c) $\log x^2 = \log x$

d) $\log_x(2x - 3) = \log_x(-4x + 8)$

7 Determine o número real **x** tal que:

a) $\log_3 x = 4$

b) $\log_{\frac{1}{2}} x = -2$

c) $\log_x 2 = 1$

d) $\log_x 0,25 = -1$

e) $\log_x 1 = 0$

f) $\log_3(2x - 1) = 2$

8 Em cada caso, calcule o valor de $\log_5 x$, sendo:

a) $x = \frac{1}{25}$

b) $x = \sqrt[7]{5}$

c) $x = 5^{12}$

d) $x = \frac{1}{\sqrt[9]{625}}$

e) $x = 0,2$

9 Determine **m**, com $m \in \mathbb{R}$, a fim de que a equação $x^2 + 4x + \log_2 m = 0$, na incógnita **x**, admita uma raiz real dupla. Qual é essa raiz?

10 Calcule:

a) $4^{3 + \log_4 2}$

b) $5^{1 - \log_5 4}$

c) $8^{\log_2 7}$

d) $81^{\log_3 2}$

e) $5^{\log_{25} 7}$

UM POUCO DE HISTÓRIA

A invenção dos logaritmos

Credita-se ao escocês John Napier (1550-1617) a descoberta dos logaritmos, embora outros matemáticos da época, como o suíço Jobst Bürgi (1552-1632) e o inglês Henry Briggs (1561-1630), também tenham dado importantes contribuições.

A invenção dos logaritmos causou grande impacto nos meios científicos da época, pois eles representavam um poderoso instrumento de cálculo numérico que impulsionaria o desenvolvimento do comércio, da navegação e da Astronomia. Até então, multiplicações e divisões com números muito grandes eram feitas com auxílio de relações trigonométricas.

Basicamente, a ideia de Napier foi associar os termos da sequência (b; b^2; b^3; b^4; b^5; ...; b^n) aos termos de outra sequência (1, 2, 3, 4, 5, ..., n), de forma que o produto de dois termos quaisquer da primeira sequência ($b^x \cdot b^y = b^{x+y}$) estivesse associado à soma $x + y$ dos termos da segunda sequência.

Veja um exemplo:


MIRIFICI
Logarithmorum
Canonis deſcriptio,
Ejuſque uſus, in utraque
Trigonometria; ut etiam in
omni Logiſtica Mathematica,
Ampliſſimi, Facillimi, &
expeditiſſimi explicatio.
Authore ac Inventore,
IOANNE NEPERO,
Barone Merchiſtonii,
&c. Scoto.
EDINBVRGI,
Ex officina ANDREÆ HART
Bibliopolæ, CIƆ. DC. XIV.

UNKNOWN - NAPIER, MARK (1834), WILLIAM BLACKWOOD

Frontispício da obra de John Napier sobre logaritmos datada de 1614.

1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16394	32788

Para calcular 512 · 64, note que:

- o termo 512 de 2 corresponde ao termo 9 de 1;
- o termo 64 de 2 corresponde ao termo 6 de 1;
- assim, a multiplicação 512 · 64 corresponde à soma de 9 + 6 = 15 em 1, cujo correspondente em 2 é 32 788, que é o resultado procurado.

Em linguagem atual, os elementos da 1ª linha da tabela correspondem ao logaritmo em base 2 dos respectivos elementos da 2ª linha da tabela.

Em seu trabalho *Uma descrição da maravilhosa regra dos logaritmos,* datado de 1614, Napier considerou outra sequência de modo que seus termos eram muito próximos uns dos outros.

Ao ter contato com essa obra, Briggs sugeriu a Napier uma pequena mudança: uso de potências de 10. Era o surgimento dos logaritmos decimais, como conhecemos até hoje.

Durante um bom tempo os logaritmos prestaram-se à finalidade para a qual foram inventados: facilitar cálculos envolvendo números muito grandes (veja observação na página 155). Com o desenvolvimento tecnológico e o surgimento de calculadoras eletrônicas, computadores etc., essa finalidade perdeu a importância.

No entanto, a função logarítmica (que estudaremos neste capítulo) e a sua inversa, a função exponencial, podem representar diversos fenômenos físicos, biológicos e econômicos (alguns exemplos serão aqui apresentados) e, deste modo, jamais perderão sua importância.

Fonte de pesquisa: BOYER, Carl B. *História da Matemática*. 3ª ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2010.

Sistemas de logaritmos

O conjunto formado por todos os logaritmos dos números reais positivos em uma base **a** ($0 < a$ e $a \neq 1$) é chamado **sistema de logaritmos de base a**. Por exemplo, o conjunto formado por todos os logaritmos de base 2 dos números reais positivos é o sistema de logaritmos de base 2.

Existem dois sistemas de logaritmos que são os mais utilizados em Matemática:

- O **sistema de logaritmos decimais**, de base 10, desenvolvido por Henry Briggs, a partir dos trabalhos de Napier. Briggs foi também quem publicou a primeira tábua dos logaritmos de 1 a 1 000, em 1617. Como vimos, indicamos com $\mathbf{log_{10}\ x}$, ou simplesmente **log x**, o **logaritmo decimal de x**.
- O **sistema de logaritmos neperianos**, de base **e**. O nome neperiano deriva de Napier. Os trabalhos de Napier envolviam, de forma não explícita, o que hoje conhecemos como número **e**. Com o desenvolvimento do cálculo infinitesimal, um século depois reconheceu-se a importância desse número. Representamos o logaritmo neperiano de **x** com $\mathbf{log_e\ x}$ ou $\boldsymbol{\ell n\ x}$. Assim, por exemplo, $\ell n\ 3 = \log_e 3$; $\ell n\ e^4 = \log_e e^4 = 4$ etc.
  É comum referir-se ao logaritmo neperiano de **x** como o **logaritmo natural de x** ($x > 0$).

As calculadoras científicas possuem as teclas LOG e LN e fornecem, de modo simples, os valores dos logaritmos decimais e neperianos de um número real positivo.

Vejamos:

- Para saber o valor de log 2 e de ℓn 2, pressionamos:

LOG → 2 LN → 2

Obtemos, respectivamente, os valores aproximados:

0.301029995 e 0.693147181

- Para saber o valor de log 15 e de ℓn 15, basta pressionar:

LOG → 1 5 LN → 1 5

Obtemos, respectivamente, os valores aproximados:

1.176091259 e 2.708050201

Dependendo do modelo da calculadora, a sequência de operações pode variar, ou seja, primeiro "entramos" com o número e em seguida com a tecla do logaritmo.

EXERCÍCIO

FAÇA NO CADERNO

11 Calcule, sem o uso da calculadora, o valor de:

a) $\ell n\ e$
b) $\ell n\ 1$
c) $\log 0{,}1$
d) $\log 10^8$
e) $\ell n\left(\frac{1}{e}\right)$
f) $e^{\ell n\ 3}$
g) $10^{\log 8}$
h) $e^{2\ \ell n\ 5}$
i) $e^{2 + \ell n\ 2}$
j) $\log 10^{-3} + \log 10^{-2} + \log 10^{-1} + \log 1$

Propriedades operatórias

Vamos agora estudar três propriedades operatórias envolvendo logaritmos.

Logaritmo do produto

Em qualquer base, o logaritmo do produto de dois números reais e positivos é igual à soma dos logaritmos de cada um deles, isto é, se $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ e $c > 0$, então:

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

Demonstração:

Fazendo $\log_a b = x$, $\log_a c = y$ e $\log_a (b \cdot c) = z$, temos:

$$\left.\begin{array}{l} \log_a b = x \Rightarrow a^x = b \\ \log_a c = y \Rightarrow a^y = c \\ \log_a (b \cdot c) = z \Rightarrow a^z = b \cdot c \end{array}\right\} \Rightarrow a^z = a^x \cdot a^y = a^{x+y} \Rightarrow z = x + y$$

Logo, $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$.

Acompanhe alguns exemplos:

- $\log_3 (27 \cdot 9) = \log_3 243 = 5$

  Aplicando a propriedade do logaritmo de um produto, temos:

  $\log_3 27 + \log_3 9 = 3 + 2 = 5$
- $\log_2 6 = \log_2 (2 \cdot 3) = \log_2 2 + \log_2 3 = 1 + \log_2 3$
- $\log_4 30 = \log_4 (2 \cdot 15) = \log_4 2 + \log_4 15 = \log_4 2 + \log_4 (5 \cdot 3) = \log_4 2 + \log_4 5 + \log_4 3$

Logaritmo do quociente

Em qualquer base, o logaritmo do quociente de dois números reais positivos é igual à diferença entre o logaritmo do numerador e o logaritmo do denominador, isto é, se $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ e $c > 0$, então:

$$\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

Demonstração:

Fazendo $\log_a b = x$, $\log_a c = y$ e $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = z$, temos:

$$\left.\begin{array}{l} \log_a b = x \Rightarrow a^x = b \\ \log_a c = y \Rightarrow a^y = c \\ \log_a \left(\frac{b}{c}\right) = z \Rightarrow a^z = \frac{b}{c} \end{array}\right\} \Rightarrow a^z = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \Rightarrow z = x - y$$

isto é, $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$.

Observe alguns exemplos:

- $\log_2 \left(\frac{32}{4}\right) = \log_2 8 = 3$

  Aplicando a propriedade do logaritmo do quociente, temos:

  $\log_2 32 - \log_2 4 = 5 - 2 = 3$

- $\log_3 \left(\frac{7}{2}\right) = \log_3 7 - \log_3 2$
- $\log \left(\frac{3}{100}\right) = \log 3 - \log 100 = \log 3 - 2$

Logaritmo da potência

Em qualquer base, o logaritmo de uma potência de base real e positiva é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base da potência, isto é, se $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ e $r \in \mathbb{R}$, então:

$$\log_a b^r = r \cdot \log_a b$$

Demonstração:

Fazendo $\log_a b = x$ e $\log_a b^r = y$, temos:

$$\left.\begin{array}{l} \log_a b = x \Rightarrow a^x = b \\ \log_a b^r = y \Rightarrow a^y = b^r \end{array}\right\} \Rightarrow a^y = (a^x)^r = a^{rx} \Rightarrow y = rx, \text{ isto é, } \log_a b^r = r \cdot \log_a b$$

Vejamos alguns exemplos:

- $\log_2 8^2 = \log_2 64 = 6$

  Aplicando a propriedade do logaritmo de uma potência, temos:

  $\log_2 8^2 = 2 \cdot \log_2 8 = 2 \cdot 3 = 6$
- $\log_5 27 = \log_5 3^3 = 3 \cdot \log_5 3$
- $\log_{10} \sqrt{2} = \log_{10} 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \log_{10} 2$
- $\log_2 \frac{1}{27} = \log_2 3^{-3} = -3 \cdot \log_2 3$

OBSERVAÇÃO

Atualmente, dispomos de calculadora científica para calcular o valor de uma expressão numérica que envolva várias operações (multiplicação, divisão, potenciação e radiciação), como:

$$x = \frac{(11{,}2)^5 \cdot \sqrt[7]{2{,}07}}{(1{,}103)^{11}}$$

Assim, em poucos segundos, descobrimos o valor de **x**. No passado, sem os recursos tecnológicos de que dispomos hoje, o cálculo dessa expressão era feito com auxílio das tabelas de logaritmos e das propriedades operatórias, em que as multiplicações transformam-se em adições, as divisões em subtrações, e as potenciações em multiplicações. Exemplo:

$$x = \frac{(11{,}2)^5 \cdot \sqrt[7]{2{,}07}}{(1{,}103)^{11}} \Rightarrow \log x = \log \frac{(11{,}2)^5 \cdot \sqrt[7]{2{,}07}}{(1{,}103)^{11}} =$$

$$= \log \left[(11{,}2)^5 \cdot \sqrt[7]{2{,}07}\right] - \log (1{,}103)^{11} =$$

$$= \log (11{,}2)^5 + \log \sqrt[7]{2{,}07} - \log (1{,}103)^{11} =$$

$$= 5 \cdot \log 11{,}2 + \frac{1}{7} \cdot \log 2{,}07 - 11 \cdot \log 1{,}103$$

As antigas tabelas de logaritmos forneciam os valores de log 11,2, log 2,07 e log 1,103; em seguida, calculava-se o valor de log x e, pela mesma tabela, chegava-se ao valor de **x**.

Como esse tipo de cálculo está ultrapassado nos dias de hoje, não apresentaremos as tabelas de logaritmos nesta obra.

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

3 Calcule o valor de $\log_b (x^2 \cdot y)$ e de $\log_b \left(\frac{x^4}{\sqrt[3]{y}}\right)$, sabendo que $\log_b x = 3$ e $\log_b y = -4$ ($x > 0$, $y > 0$, $b > 0$ e $b \neq 1$).

Solução:

Aplicando as propriedades operatórias, escrevemos:

- $\log_b (x^2 \cdot y) = \log_b x^2 + \log_b y = 2 \cdot \log_b x + \log_b y = 2 \cdot 3 + (-4) = 2$

- $\log_b \left(\frac{x^4}{\sqrt[3]{y}}\right) = \log_b x^4 - \log_b \sqrt[3]{y} = 4 \cdot \log_b x - \log_b y^{\frac{1}{3}} = 4 \cdot \log_b x - \frac{1}{3} \cdot \log_b y = 4 \cdot 3 - \frac{1}{3} \cdot (-4) =$

  $= 12 + \frac{4}{3} = \frac{40}{3}$

4 Qual é a expressão **E** cujo desenvolvimento logarítmico na base 10 é $\log E = 1 + \log a + 2 \log b - \log c$, com **a**, **b** e **c** números reais positivos?

Solução:

Temos:

$$\log E = \underbrace{\overbrace{\log 10}^{1} + \log a + \log b^2} - \log c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log E = \log (10 \cdot a \cdot b^2) - \log c \Rightarrow \log E = \log \left(\frac{10ab^2}{c}\right) \Rightarrow E = \frac{10ab^2}{c}$$

5 Considerando $\log 2 \simeq 0{,}3$, qual é o valor de $\log \sqrt[5]{64}$?

Solução:

Temos:

$$\log \sqrt[5]{64} = \log 64^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5} \cdot \log 64 = \frac{1}{5} \cdot \log 2^6 = \frac{6}{5} \cdot \log 2 \simeq \frac{6 \cdot 0{,}3}{5} \simeq 0{,}36$$

PENSE NISTO:

$\log 2 \simeq 0{,}3$ equivale a dizer que $10^{0{,}3} \simeq 2$. Como você explica, sem usar a calculadora, que $10^{0{,}3} \simeq 2$?

6 Qual é o valor real de **x** que satisfaz a equação $\log_2 (x - 2) + \log_2 x = 3$?

Solução:

Inicialmente, é preciso estabelecer a condição de existência dos logaritmos envolvidos. Devemos ter:

$$(x - 2 > 0) \text{ e } (x > 0) \Rightarrow x > 2$$

Assim, a equação só tem solução se $x > 2$.

Supondo $x > 2$, vamos usar as propriedades operatórias:

$$\log_2 (x - 2) + \log_2 x = 3 \Rightarrow \log_2 [(x - 2) \cdot x] = 3 \Rightarrow \log_2 (x^2 - 2x) = 3 \underset{\text{def.}}{\Rightarrow} 2^3 = x^2 - 2x \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ (não serve, pois devemos ter } x > 2) \text{ ou } x = 4 \text{ (serve)}$$

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

12 Sejam **x**, **y**, **b** reais positivos, $b \neq 1$. Sabendo que $\log_b x = -2$ e $\log_b y = 3$, calcule o valor dos seguintes logaritmos:

a) $\log_b (x \cdot y)$

b) $\log_b \left(\frac{x}{y}\right)$

c) $\log_b (x^3 \cdot y^2)$

d) $\log_b \left(\frac{y^2}{\sqrt{x}}\right)$

e) $\log_b \left(\frac{x \cdot \sqrt{y}}{b}\right)$

f) $\log_b \sqrt{\sqrt{x} \cdot y^3}$

13 Desenvolva, aplicando as propriedades operatórias dos logaritmos (suponha **a**, **b** e **c** reais positivos):

a) $\log_5 \left(\frac{5a}{bc}\right)$

b) $\log \left(\frac{b^2}{10a}\right)$

c) $\log_3 \left(\frac{ab^2}{c}\right)$

d) $\log_2 \left(\frac{8a}{b^3c^2}\right)$

e) $\log_2 \sqrt{8a^2b^3}$

14 Sabendo que $\log 2 = a$ e $\log 3 = b$, calcule, em função de **a** e **b**:

a) $\log 6$

b) $\log 1{,}5$

c) $\log 5$

d) $\log 30$

e) $\log \frac{1}{4}$

f) $\log 72$

g) $\log 0{,}3$

h) $\log \sqrt[3]{1{,}8}$

i) $\log 0{,}024$

j) $\log 0{,}75$

k) $\log 20\,000$

15 Sejam **a**, **b** e **c** reais positivos. Em cada caso, obtenha a expressão cujo desenvolvimento logarítmico, na respectiva base, é dado por:

a) $\log a + \log b + \log c$

b) $3 \log_2 a + 2 \log_2 c - \log_2 b$

c) $\log_3 a - \log_3 b - 2$

d) $\frac{1}{2} \cdot \log a - \log b$

16 Qual é o valor de:

a) $\log_{15} 3 + \log_{15} 5$?

b) $\log_3 72 - \log_3 12 - \log_3 2$?

c) $\frac{1}{3} \cdot \log_{15} 8 + 2 \cdot \log_{15} 2 + \log_{15} 5 - \log_{15} 9000$?

17 Calcule o valor de **x** usando, em cada caso, as propriedades operatórias:

a) $\log x = \log 5 + \log 4 + \log 3$

b) $2 \cdot \log x = \log 3 + \log 4$

c) $\log \left(\frac{1}{x}\right) = \log \left(\frac{1}{3}\right) + \log 9$

d) $\frac{1}{2} \cdot \log_3 x = 2 \cdot \log_3 10 - \log_3 4$

18 Considerando os valores $\log 2 \simeq 0{,}3$ e $\log 3 \simeq 0{,}48$, calcule:

a) $\log 3\,000$

b) $\log 0{,}002$

c) $\log \sqrt{3}$

d) $\log 20$

e) $\log 0{,}06$

f) $\log 48$

g) $\log 125$

19 Considerando que $\log_2 5 \simeq 2{,}32$, obtenha os valores de:

a) $\log_2 10$

b) $\log_2 500$

c) $\log_2 1\,600$

d) $\log_2 \sqrt[3]{0{,}2}$

e) $\log_2 \left(\frac{64}{125}\right)$

20 Classifique as afirmações seguintes em verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**):

a) $\log 26 = \log 20 + \log 6$

b) $\log 5 + \log 8 + \log 2{,}5 = 2$

c) $\log_2 4^{18} = 36$

d) $\log_3 \sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}} > 0{,}25$

e) $\log_5 35 - \log_5 7 = 1$

f) $\log_3 (\sqrt{2} + 1) + \log_3 (\sqrt{2} - 1) = 0$

21 (UFPR) Para determinar a rapidez com que se esquece de uma informação, foi efetuado um teste em que listas de palavras eram lidas a um grupo de pessoas e, num momento posterior, verificava-se quantas dessas palavras eram lembradas. Uma análise mostrou que, de maneira aproximada, o percentual **S** de palavras lembradas, em função do tempo **t**, em minutos, após o teste ter sido aplicado, era dado pela expressão:

$$S = -18 \cdot \log (t + 1) + 86$$

a) Após 9 minutos, que percentual da informação inicial era lembrado?

b) Depois de quanto tempo o percentual **S** alcançou 50%?

22 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações:

a) $2 \cdot \log_7 (x + 3) = \log_7 (x^2 + 45)$

b) $\log (4x - 1) - \log (x + 2) = \log x$

c) $3 \cdot \log_5 2 + \log_5 (x - 1) = 0$

d) $2 \cdot \log x = \log (2x - 3) + \log (x + 2)$

e) $\log x + \log x^2 + \log x^3 = -6$

23 Resolva, em $\mathbb{R}$, os seguintes sistemas de equações:

a) $\begin{cases} x + y = 10 \\ \log_4 x + \log_4 y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4^{x - y} = 8 \\ \log_2 x - \log_2 y = 2 \end{cases}$

Mudança de base

Há situações em que nos defrontamos com um logaritmo em certa base e temos de convertê-lo a outra base.

Por exemplo, quando aplicamos as propriedades operatórias, os logaritmos devem estar todos na mesma base. E, se não estiverem, é preciso escrever todos os logaritmos em uma mesma base.

Outro exemplo é quando, dispondo de uma calculadora científica, desejamos obter o valor de um logaritmo cuja base não seja decimal (base 10) nem neperiana (base **e**), por exemplo, $\log_2 5$. As calculadoras trazem, em geral, apenas as teclas LOG e LN, isto é, elas não fornecem diretamente o valor do logaritmo que não esteja nessas bases. Assim, é preciso conhecer a relação que $\log_2 5$ tem com o logaritmo decimal ($\log_{10} 5$) ou com o logaritmo neperiano ($\ell n\,5$), a fim de que possamos obter seu valor, como veremos a seguir.

Propriedade

Suponha **a**, **b** e **c** números reais positivos, com **a** e **b** diferentes de 1. Temos:

$$\boxed{\log_a c = \frac{\log_b c}{\log_b a}}$$

Demonstração:

Sejam $x = \log_a c$; $y = \log_b c$; e $z = \log_b a$.

Aplicando a definição de logaritmo, temos:

$$\begin{cases} x = \log_a c \Rightarrow a^x = c & (1) \\ y = \log_b c \Rightarrow b^y = c & (2) \\ z = \log_b a \Rightarrow b^z = a & (3) \end{cases}$$

Substituindo (3) e (2) em (1), temos:

$$(b^z)^x = b^y \Rightarrow b^{z \cdot x} = b^y \Rightarrow z \cdot x = y \underset{\substack{z \neq 0 \\ \text{(pois } a \neq 1)}}{\Longrightarrow} x = \frac{y}{z}$$

isto é, $\log_a c = \dfrac{\log_b c}{\log_b a}$.

Vejamos agora como é possível obter o valor de $\log_2 5$ usando a calculadora. Podemos transformar $\log_2 5$ para base 10 ou para base **e**:

- base 10: $\log_2 5 = \dfrac{\log_{10} 5}{\log_{10} 2} \simeq \dfrac{0{,}699}{0{,}3010} \simeq 2{,}32$
- base **e**: $\log_2 5 = \dfrac{\log_e 5}{\log_e 2} = \dfrac{\ell n\, 5}{\ell n\, 2} \simeq \dfrac{1{,}609}{0{,}693} \simeq 2{,}32$

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

7 Calcule o valor de $\log_{100} 72$, considerando os valores: $\log 2 \simeq 0{,}3$ e $\log 3 \simeq 0{,}48$.

Solução:

Utilizemos a fórmula da mudança de base, para expressar $\log_{100} 72$ em base 10.

Temos:

$$\log_{100} 72 = \frac{\log 72}{\log 100} = \frac{\log (2^3 \cdot 3^2)}{2} = \frac{\log 2^3 + \log 3^2}{2} = \frac{3 \cdot \log 2 + 2 \cdot \log 3}{2} = \frac{0{,}9 + 0{,}96}{2} = 0{,}93$$

Aplicação importante

Sejam **a** e **b** reais positivos e diferentes de 1. Temos que:

$$\log_b a \cdot \log_a b = 1 \quad \text{ou} \quad \log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

Demonstração:

Basta escrever $\log_b a$ na base **a**, de acordo com a propriedade da mudança de base:

$$\log_b a = \frac{\log_a a}{\log_a b} = \frac{1}{\log_a b}\text{, ou seja, } \log_b a \cdot \log_a b = 1$$

Note que, como $b \neq 1$, o denominador $\log_a b$ é diferente de zero.

Assim, por exemplo, $\log_3 2 \cdot \log_2 3 = 1$; $\log_4 5 = \dfrac{1}{\log_5 4}$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

8 Mostre que $\log_{49} 25 = \log_7 5$.

Solução:

Vamos escrever $\log_{49} 25$ na base 7:

$$\log_{49} 25 = \frac{\log_7 25}{\log_7 49} = \frac{\log_7 5^2}{2} = \frac{2 \cdot \log_7 5}{2} = \log_7 5$$

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

24 Escreva na base 2 os seguintes logaritmos:

a) $\log_5 3$
b) $\log 5$
c) $\log_3 4$
d) $\ell n\ 3$

25 Considerando $\log 2 \simeq 0,3$, $\log 3 \simeq 0,48$ e $\log 5 \simeq 0,7$, calcule o valor de:

a) $\log_3 2$
b) $\log_5 3$
c) $\log_2 5$
d) $\log_3 100$
e) $\log_4 18$
f) $\log_{36} 0,5$

26 Sejam **x** e **y** reais positivos e diferentes de 1. Se $\log_y x = 2$, calcule:

a) $\log_x y$
b) $\log_{x^3} y^2$
c) $\log_{\frac{1}{x}} \dfrac{1}{y}$
d) $\log_{y^2} x$

27 Sabendo que $\log_{12} 5 = a$, calcule, em função de **a**, o valor dos seguintes logaritmos:

a) $\log_5 12$
b) $\log_{25} 12$
c) $\log_5 60$
d) $\log_{125} 144$

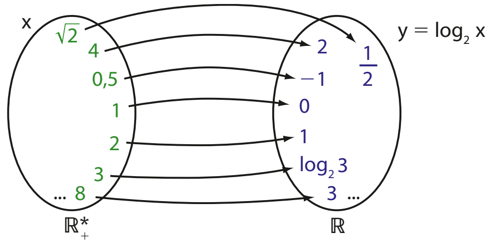
28 Qual é o valor de:

a) $y = \log_7 3 \cdot \log_3 7 \cdot \log_{11} 5 \cdot \log_5 11$?
b) $z = \log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5$?
c) $w = \log_3 5 \cdot \log_4 27 \cdot \log_{25} \sqrt{2}$?
d) $t = 5^{\log_5 4 \cdot \log_4 7 \cdot \log_7 11}$?

Função logarítmica

Dado um número real **a** ($0 < a$ e $a \neq 1$), chama-se **função logarítmica de base a** a função **f** de $\mathbb{R}_+^*$ em $\mathbb{R}$ dada pela lei $f(x) = \log_a x$.

Essa função associa cada número real positivo ao seu logaritmo na base **a**.
Um exemplo de função logarítmica é a função **f** definida por $f(x) = \log_2 x$.



São logarítmicas também as funções dadas pelas leis: $y = \log_3 x$; $y = \log_{10} x$; $y = \log_e x$ (ou $\ell n\, x$); $y = \log_{\frac{1}{4}} x$ etc.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

9 Determine o domínio $D \subset \mathbb{R}$ da função **f** definida por $f(x) = \log_{(x-1)} (3 - x)$.

Solução:

Devemos ter $3 - x > 0$, $x - 1 > 0$ e $x - 1 \neq 1$.

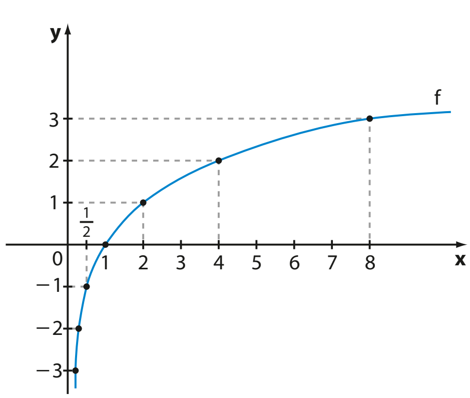
$$3 - x > 0 \Rightarrow x < 3 \quad 1$$
$$x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1 \quad 2$$
$$x - 1 \neq 1 \Rightarrow x \neq 2 \quad 3$$

Fazendo a interseção de 1, 2 e 3, resulta $1 < x < 2$ ou $2 < x < 3$.
Então, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2 \text{ ou } 2 < x < 3\}$.

Gráfico da função logarítmica

Vamos construir o gráfico da função **f**, com domínio $\mathbb{R}_+^*$, definida por $y = \log_2 x$. Para isso, podemos construir uma tabela dando valores a **x** e calculando os correspondentes valores de **y**.

x	$y = \log_2 x$
$\frac{1}{8}$	-3
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2
8	3



PENSE NISTO:

Se tivéssemos construído a tabela com valores de **x** iguais a 3, 5 e 10, por exemplo, quais seriam os valores de $y = \log_2 x$? Utilize uma calculadora e registre os resultados no caderno.

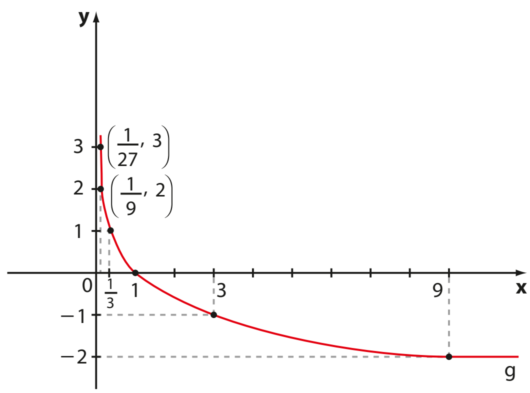
Note que os valores atribuídos a **x** são potências de base 2; desse modo, $y = \log_2 x$ é um número inteiro facilmente calculado.

Observe que:

- o gráfico de **f** está inteiramente contido nos 1º e 4º quadrantes, pois **f** está definida apenas para $x > 0$.
- o conjunto imagem de **f** é $\mathbb{R}$. De fato, todo número real **y** é imagem de algum **x**: por exemplo, $y = 200$ é imagem de $x = 2^{200}$; $y = -200$ é imagem de $x = 2^{-200}$ etc. Em geral, o número real $\mathbf{y_0}$ é imagem do número real positivo $x = 2^{y_0}$.

Consideremos agora a função **g** dada por $y = \log_{\frac{1}{3}} x$, definida para todo **x** real, $x > 0$. Vamos construir seu gráfico por meio da tabela a seguir:

x	$y = \log_{\frac{1}{3}} x$
$\frac{1}{27}$	3
$\frac{1}{9}$	2
$\frac{1}{3}$	1
1	0
3	-1
9	-2



Observe que o conjunto imagem de **g** é $\mathbb{R}$.

Função exponencial e função logarítmica

Vamos estabelecer uma importante relação entre os gráficos das funções exponencial e logarítmica.

Consideremos as funções **f** e **g**, dadas por $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \log_2 x$.

Se um par ordenado (a, b) está na tabela de **f**, temos que $b = 2^a$; isso é equivalente a dizer que $\log_2 b = a$ e, desse modo, o par ordenado (b, a) está na tabela de **g**.

Acompanhe as tabelas seguintes:

x	$f(x) = 2^x$
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8

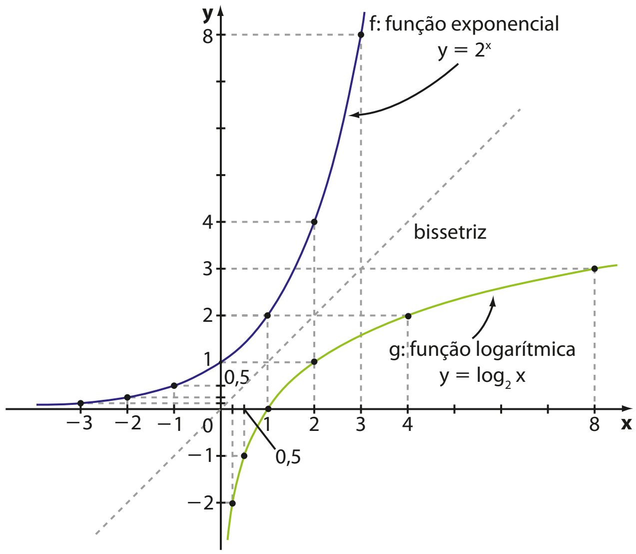
x	$g(x) = \log_2 x$
$\frac{1}{8}$	-3
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2
8	3

Quando construímos os gráficos de **f** e **g** no mesmo sistema de coordenadas, notamos que eles são simétricos em relação à reta correspondente à função linear dada por y = x. Essa reta é conhecida como **bissetriz dos quadrantes ímpares**.

Observe que o gráfico de **f** corresponde ao gráfico de **g** "rebatido" em relação à bissetriz (e vice-versa).

PENSE NISTO:

Por que a reta de equação y = x é chamada bissetriz dos quadrantes ímpares?



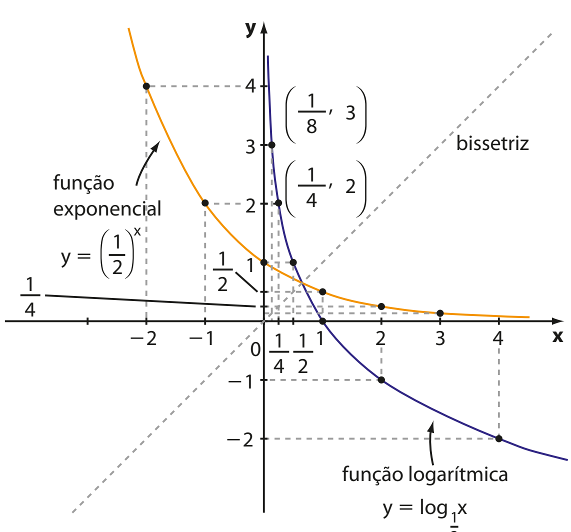
EXEMPLO 3

Vejamos como construir o gráfico da função dada por $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ definida para todo número real positivo, isto é, x > 0.

Vamos lembrar como é o gráfico da função exponencial de base $\frac{1}{2}$ e, por simetria, obter o gráfico da função logarítmica de base $\frac{1}{2}$.

x	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
−3	8
−2	4
−1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$

x	$y = \log_{\frac{1}{2}} x$
8	−3
4	−2
2	−1
1	0
$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{4}$	2
$\frac{1}{8}$	3

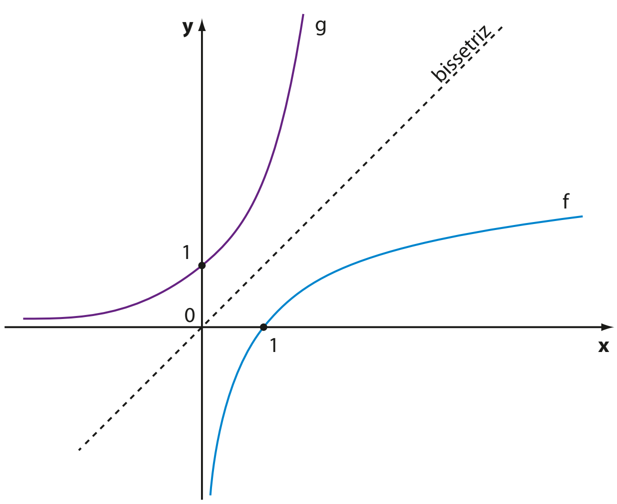


Propriedades do gráfico da função logarítmica

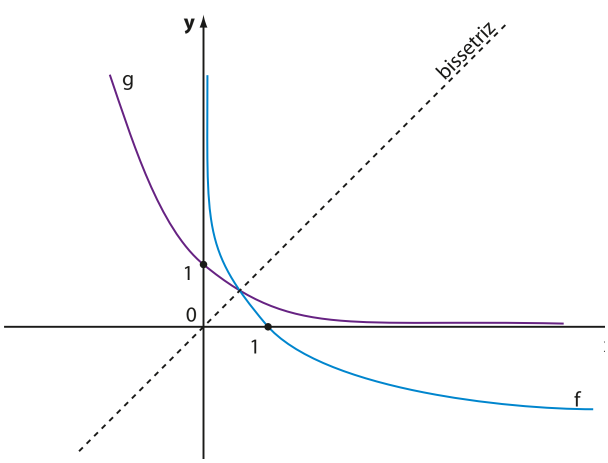
De modo geral, o gráfico de uma função **f** definida por $f(x) = \log_a x$ tem as seguintes características:

- Localiza-se à direita do eixo Oy, isto é, seus pontos pertencem ao 1º e ao 4º quadrantes, pois o domínio de **f** é $\mathbb{R}_+^*$.
- Corta o eixo Ox no ponto da abscissa 1, ou seja, no ponto (1, 0), pois, se $x = 1$, $y = \log_a 1 = 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $0 < a$ e $a \neq 1$.
- É simétrico do gráfico da função exponencial **g** (de mesma base) definida por $y = a^x$ em relação à reta bissetriz do 1º e 3º quadrantes.
- Toma o aspecto de um dos gráficos abaixo:

$a > 1$



$0 < a < 1$



Leis de **f** e **g**: $f(x) = \log_a x$ e $g(x) = a^x$.

- O conjunto imagem de **f** é $\mathbb{R}$, pois todo número real **y** é imagem do número real positivo $x = a^y$.

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

29 Estabeleça o domínio de cada uma das funções logarítmicas seguintes, definidas por:

a) $y = \log_5 (x - 1)$

b) $y = \log_{\frac{1}{2}} (3x - 2)$

c) $y = \log_4 (x^2 - 9)$

d) $y = \log_5 (x^2 + 3)$

e) $y = \log_{x-1} (-3x + 4)$

30 Seja $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log x$. Classifique como verdadeira (**V**) ou falsa (**F**) as afirmações seguintes, corrigindo as falsas:

a) $f(100) = 2$

b) $f(x^2) = 2 \cdot f(x)$

c) $f(10x) = 10 \cdot f(x)$

d) $f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = 0$

e) A taxa média de variação da função, quando **x** varia de 1 a 10, é dez vezes a taxa de variação da função quando **x** varia de 10 a 100.

31 Construa o gráfico das funções logarítmicas de domínio $\mathbb{R}_+^*$ definidas pelas leis seguintes:

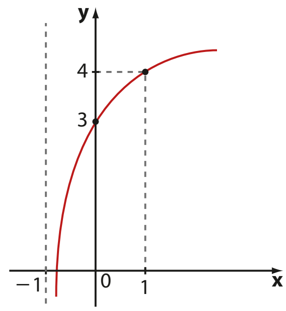
a) $y = \log_3 x$

b) $y = \log_{\frac{1}{4}} x$

c) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$

d) $y = \log_4 x$

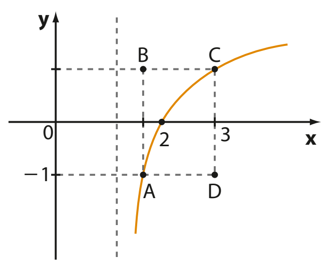
32 O gráfico abaixo representa a função definida pela lei $y = a + \log_b (x + 1)$, sendo **a** e **b** constantes reais.



a) Qual é o domínio de **f**?

b) Quais são os valores de **a** e **b**, respectivamente?

33 O gráfico abaixo representa a função **f**, definida por $f(x) = \log_2 (x + k)$, sendo **k** uma constante real.



a) Qual é o valor de **k**?

b) Qual é a área do retângulo ABCD?

c) Qual é o valor de f(1 001)? Considere $\log 2 \simeq 0,30$.

34 Entre os números seguintes, determine aqueles que são positivos:

a) $\log_{\frac{1}{4}} 3$

b) $\log_5 2$

c) $\log 0,2$

d) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$

e) $\log_{\frac{2}{3}} 7$

f) $\ell n\ 2$

35 A lei seguinte representa uma estimativa sobre o número de funcionários de uma empresa, em função do tempo **t**, em anos (t = 0, 1, 2, ...), de existência da empresa:

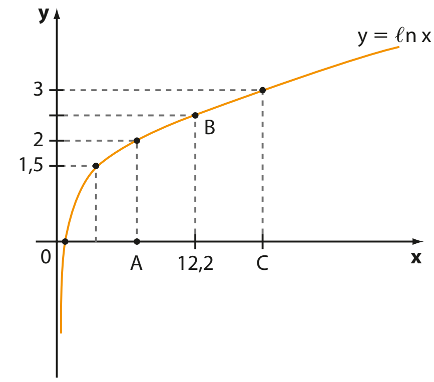
$$f(t) = 400 + 50 \cdot \log_4 (t + 2)$$

a) Quantos funcionários a empresa possuía na sua fundação?

b) Quantos funcionários foram incorporados à empresa do 2º ao 6º ano? (Admita que nenhum funcionário tenha saído.)

c) Calcule a taxa média de variação do número de funcionários da empresa do 6º ao 14º ano.

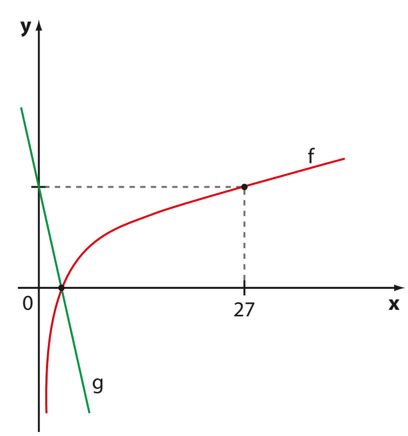
36 O gráfico da função $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, definida por $y = \ell n\ x$, é dado a seguir.



Determine a área do triângulo ABC, usando a tabela seguinte, que contém valores aproximados.

x	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4,0
e^x	1,6	2,7	4,5	7,4	12,2	20,1	33,1	54,6

37 Os gráficos de duas funções **f** e **g** são mostrados a seguir.



Sabendo que $f(x) = \log_9 x$, determine:

a) a lei da função **g**.

b) os valores reais de **x** para os quais $f(x) > g(x)$.

c) o valor de $f(3) - g(3)$.

38 Em cada item, decida qual dos números reais é maior:

a) $\log_{\frac{1}{3}} 4$ e $\log_{\frac{1}{3}} 5$

b) $\log_2 \pi^2$ e $\log_2 9$

c) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2}$ e $\log_{\frac{1}{2}} 2$

Aplicações

Os terremotos e os logaritmos

No dia 25 de abril de 2015, um forte terremoto de 7,8 graus na escala Richter, que durou aproximadamente 1 minuto, devastou o Nepal.

O terremoto deixou um saldo de quase 20 000 vítimas (entre mortos e feridos) e um cenário de guerra pelo país: milhares de pessoas perderam suas casas, monumentos e templos declarados patrimônio da humanidade pela Unesco desmoronaram, água, energia e comida escassearam.

A comunidade internacional prestou grande ajuda ao Nepal, enviando recursos financeiros, médicos e alimentares até os vilarejos mais remotos e de difícil acesso.

PHILIPPE LOPEZ/AFP

Policial nepalês mantém vigília próximo a um templo desabado na vila Bungamati, na periferia de Katmandu, Himalaia.

A escala Richter foi desenvolvida em 1935 por Charles Richter e Beno Gutenberg, no California Institute of Technology. Trata-se de uma escala logarítmica, sem limites. No entanto, a própria natureza impõe um limite superior a esta escala, já que ela está condicionada ao próprio limite de resistência das rochas na crosta terrestre.

A magnitude (graus) de Richter é uma medida **quantitativa** do "tamanho" de um terremoto. Ela está relacionada com a amplitude das ondas registradas e também com a energia liberada.

A escala Richter e seus efeitos

Magnitude Richter	Efeitos
Menor que 3,5	Geralmente não sentido, mas gravado.
De 3,5 a 5,4	Às vezes sentido, mas raramente causa danos.
De 5,5 a 6,0	No máximo causa pequenos danos a prédios bem construídos, mas pode danificar seriamente casas mal construídas em regiões próximas.
De 6,1 a 6,9	Pode ser destrutivo em áreas em torno de até 100 km do epicentro.
De 7,0 a 7,9	Grande terremoto. Pode causar sérios danos numa grande faixa.
8,0 ou mais	Enorme terremoto. Pode causar graves danos em muitas áreas mesmo que estejam a centenas de quilômetros.

Fonte de pesquisa: *A escala Richter*. Disponível em: <ecalculo.if.usp.br/funcoes/grandezas/exemplos/exemplo5.htm>. Acesso em: 23 mar. 2016.

Amplitude

A amplitude é uma forma de medir a movimentação do solo e está diretamente associada ao tamanho das ondas registradas nos sismógrafos.

A fórmula utilizada é:

$$\boxed{M = \log A - \log A_0}$$

em que **A** é a amplitude máxima medida no sismógrafo a 100 km do epicentro do terremoto, $\mathbf{A_0}$ é a amplitude de referência (log A_0 é constante) e **M** é a magnitude do terremoto.

Desse modo, se quisermos comparar as magnitudes ($\mathbf{M_1}$ e $\mathbf{M_2}$) de dois terremotos em função da amplitude das ondas geradas, podemos fazer:

$$M_1 - M_2 = (\log A_1 - \log A_0) - (\log A_2 - \log A_0)$$

$$M_1 - M_2 = \log A_1 - \log A_2$$

$$\boxed{M_1 - M_2 = \log\left(\frac{A_1}{A_2}\right)}$$

Em particular, se $M_1 - M_2 = 1$ (terremotos que diferem de 1 grau na escala Richter), temos:

$$1 = \log\left(\frac{A_1}{A_2}\right) \Rightarrow 10^1 = \frac{A_1}{A_2} \Rightarrow A_1 = 10 \cdot A_2$$

Desse modo, cada ponto de magnitude equivale a 10 vezes a amplitude do ponto anterior.

Energia

A energia liberada em um abalo sísmico é um fiel indicador do poder destrutivo de um terremoto. A relação entre a magnitude **M** (graus) de Richter e a energia liberada **E** é dada por:

$$M = \frac{2}{3} \cdot \log_{10}\left(\frac{E}{E_0}\right) \qquad *$$

sendo $E_0 = 7 \cdot 10^{-3}$ kWh (quilowatt hora) um valor padrão (constante).

Vamos comparar as energias $\mathbf{E_1}$ e $\mathbf{E_2}$ liberadas em dois terremotos $\mathbf{T_1}$ e $\mathbf{T_2}$ que diferem de 1 grau na escala Richter, a saber, de magnitudes $\mathbf{M_1}$ e $M_2 = M_1 + 1$.

De *, podemos escrever:

$$\log_{10}\left(\frac{E}{E_0}\right) = \frac{3M}{2} \Rightarrow \frac{E}{E_0} = 10^{\frac{3M}{2}} \Rightarrow E = E_0 \cdot 10^{\frac{3M}{2}}$$

Assim, para o terremoto $\mathbf{T_1}$, temos $E_1 = E_0 \cdot 10^{\frac{3M_1}{2}}$; para o terremoto $\mathbf{T_2}$, temos: $E_2 = E_0 \cdot 10^{\frac{3M_2}{2}} = E_0 \cdot 10^{\frac{3 \cdot (M_1 + 1)}{2}} = \underbrace{E_0 \cdot 10^{\frac{3M_1}{2}}}_{E_1} \cdot 10^{\frac{3}{2}} = E_1 \cdot 10^{\frac{3}{2}}$, isto é, $E_2 = E_1 \cdot 10^{\frac{3}{2}}$.

Como $10^{\frac{3}{2}} = \sqrt{10^3} = \sqrt{1\,000} \simeq 31{,}62$, concluímos que a energia liberada no terremoto $\mathbf{T_2}$ é aproximadamente 32 vezes a energia liberada no terremoto $\mathbf{T_1}$.

Assim, cada ponto na escala Richter equivale a aproximadamente 32 vezes a energia do ponto anterior.

Reunindo os conhecimentos construídos referentes à amplitude das ondas e energia liberada, ao compararmos, por exemplo, dois terremotos de 6 e 9 graus na escala Richter, concluímos que:

- a amplitude das ondas no terremoto mais forte é $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1\,000$ vezes a amplitude das ondas do outro;
- a energia liberada no terremoto mais forte é da ordem de $32 \cdot 32 \cdot 32 = 32\,768$ vezes a energia liberada do outro.

Por fim, é importante destacar também que existem medidas **qualitativas** que descrevem os efeitos produzidos pelos terremotos a partir de observações *in loco* dos danos ocasionados nas construções, população e meio ambiente (efeitos macrossísmicos).

Fontes de pesquisa:
Como medir a força de um terremoto. Disponível em: <www.obsis.unb.br/obsis/index.php?option=com_content&view=article&id=56&Itemid=67&lang=pt-br>. Acesso em: 23 mar. 2016.; *A escala Richter*. Disponível em: <ecalculo.if.usp.br/funcoes/grandezas/exemplos/exemplo5.htm>. Acesso em: 4 mar. 2016.

Equações exponenciais

Há equações que não podem ser reduzidas a uma igualdade de potências de mesma base pela simples aplicação das propriedades das potências. A resolução de uma equação desse tipo baseia-se na definição de logaritmo:

$$a^x = b \Rightarrow x = \log_a b$$

com $0 < a$, $a \neq 1$ e $b > 0$.

Veja a equação: $3^x = 5$.

Da definição de logaritmos, escrevemos $\log_3 5 = x$.

Para conhecer esse valor, podemos usar uma calculadora científica, aplicando a propriedade da mudança de base:

$$x = \log_3 5 = \frac{\log 5}{\log 3} \simeq \frac{0{,}6990}{0{,}4771} \simeq 1{,}465$$

Um processo equivalente consiste em "aplicar" logaritmo decimal aos dois membros da igualdade $3^x = 5$, criando uma nova igualdade:

$$\log 3^x = \log 5 \Rightarrow x \cdot \log 3 = \log 5 \Rightarrow x = \frac{\log 5}{\log 3}$$

Qualquer um desses processos pode ser usado para resolver o problema introduzido no início do capítulo sobre a desvalorização anual do caminhão.

Precisamos resolver a equação: $0{,}9^x = 0{,}5$.

Temos:

$$x = \log_{0{,}9} 0{,}5 = \frac{\log 0{,}5}{\log 0{,}9} = \frac{\log\left(\frac{1}{2}\right)}{\log\left(\frac{9}{10}\right)} = \frac{\overbrace{\log 1}^{=0} - \log 2}{\log 9 - \underbrace{\log 10}_{=1}} = \frac{-\log 2}{2 \cdot \log 3 - 1}$$

Usando os valores $\log 2 \simeq 0{,}3010$ e $\log 3 \simeq 0{,}4771$, obtemos:

$$x = \frac{-0{,}301}{2 \cdot 0{,}4771 - 1} = \frac{-0{,}301}{-0{,}0458} \simeq 6{,}57$$

Logo, depois de aproximadamente 6 anos e 7 meses de uso, o caminhão valerá R$ 60 000,00.

É importante estar atento às aproximações usadas para os logaritmos. Se tivéssemos usado aproximações com duas casas decimais (por exemplo, $\log 2 \simeq 0{,}30$ e $\log 3 \simeq 0{,}48$), obteríamos 7,5 anos como resultado, o que daria quase um ano de diferença na resposta.

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

39 Considerando $\log 2 \simeq 0{,}3$ e $\log 3 \simeq 0{,}48$, resolva as seguintes equações exponenciais:

a) $3^x = 10$
b) $4^x = 3$
c) $2^x = 27$
d) $10^x = 6$
e) $2^x = 5$
f) $3^x = 2$
g) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = \frac{1}{9}$
h) $2^x = 3$

40 Economistas afirmam que a dívida externa de um determinado país crescerá segundo a lei:

$$y = 40 \cdot 1{,}2^x$$

sendo **y** o valor da dívida (em bilhões de dólares) e **x** o número de anos transcorridos após a divulgação dessa previsão. Em quanto tempo a dívida estará estimada em 90 bilhões de dólares? Use $\log 2 \simeq 0{,}3$ e $\log 3 \simeq 0{,}48$.

41 O investimento financeiro mais conhecido do brasileiro é a caderneta de poupança, que rende aproximadamente 6% ao ano. Ao aplicar hoje R$ 2 000,00, um poupador terá, daqui a **n** anos, um valor **v**, em reais, dado por $v(n) = 2000 \cdot 1{,}06^n$.

a) Que valor terá o poupador daqui a 3 anos? E daqui a 6 anos? Use $1{,}06^3 \simeq 1{,}2$.

b) Qual é o tempo mínimo (em anos inteiros) necessário para que o valor dessa poupança seja de R$ 4 000,00? E R$ 6 500,00? Considere $\log 2 \simeq 0{,}3$; $\log 13 \simeq 1{,}14$ e $\log 1{,}06 \simeq 0{,}025$.

42 Dentro de **t** décadas, contadas a partir de hoje, o valor (em reais) de um imóvel será estimado por $v(t) = 600\,000 \cdot 0{,}9^t$.

a) Qual é o valor atual desse imóvel?

b) Qual é a perda (em reais) no valor desse imóvel durante a primeira década?

c) Qual é a desvalorização percentual desse imóvel em uma década?

d) Qual é o tempo mínimo necessário, em anos, para que o valor do imóvel seja de 450 mil reais? Use $\log 2 \simeq 0{,}30$ e $\log 3 \simeq 0{,}48$.

43 Um equipamento industrial foi adquirido por R$ 30 000,00. Seu valor (**v**), em reais, com **x** anos de uso, é dado pela lei $v(x) = p \cdot q^x$, em que **p** e **q** são constantes reais.

Sabendo-se que, com 3 anos de uso, o valor do equipamento será R$ 21 870,00, determine:

a) os valores de **p** e **q**;

b) o tempo aproximado de uso para o qual o equipamento valerá R$ 10 000,00.
Use $\log 3 \simeq 0{,}4771$.

44 A população de certa espécie de mamífero em uma região da Amazônia cresce segundo a lei

$$n(t) = 5\,000 \cdot e^{0{,}02t}$$

em que $n(t)$ é o número de elementos estimado da espécie no ano **t** ($t = 0, 1, 2, \ldots$), contado a partir de hoje ($t = 0$).

Determine o número inteiro mínimo de anos necessários para que a população atinja:

a) 8 000 elementos;

b) 10 000 elementos.

Use $\ell n\, 2 \simeq 0{,}69$ e $\ell n\, 5 \simeq 1{,}6$.

45 (Unicamp-SP) O decaimento radioativo do estrôncio 90 é descrito pela função $P(t) = P_0 \cdot 2^{-bt}$, onde **t** é um instante de tempo, medido em anos, **b** é uma constante real e $\mathbf{P_0}$ é a concentração inicial do estrôncio 90, ou seja, a concentração no instante $t = 0$.

a) Se a concentração de estrôncio 90 cai pela metade em 29 anos, isto é, se a meia-vida do estrôncio 90 é de 29 anos, determine o valor constante de **b**.

b) Dada uma concentração inicial $\mathbf{P_0}$ de estrôncio 90, determine o tempo necessário para que a concentração seja reduzida a 20% de $\mathbf{P_0}$. Considere $\log_2 10 \simeq 3{,}32$.

46 Estima-se que a população de ratos em um município cresça à taxa de 10% ao mês: isto é, a cada mês, o número de ratos aumentou 10% em relação ao número de ratos do mês anterior. Sabendo que a quantidade atual de ratos é da ordem de 400 000, determine o tempo mínimo de meses necessários para que a população de ratos nesse município quadruplique.

Use $\log 2 \simeq 0{,}30$ e $\log 11 \simeq 1{,}04$.

47 (Enem-MEC) Em setembro de 1987, Goiânia foi palco do maior acidente radioativo ocorrido no Brasil, quando uma amostra de césio-137, removida de um aparelho de radioterapia abandonado, foi manipulada inadvertidamente por parte da população. A meia-vida de um material radioativo é o tempo necessário para que a massa desse material se reduza à metade. A meia-vida do césio-137 é 30 anos e a quantidade restante de massa de um material radioativo, após **t** anos, é calculada pela expressão $M(t) = A \cdot (2,\ 7)^{kt}$, onde **A** é a massa incial e **k** é uma constante negativa.

Considere 0,3 como aproximação para $\log_{10} 2$.

Qual o tempo necessário, em anos, para que uma quantidade de massa do césio-137 se reduza a 10% da quantidade inicial?

a) 27 **c)** 50 **e)** 100
b) 36 **d)** 54

DESAFIO

Em uma calculadora científica que fornece o logaritmo do número que estiver aparecendo no visor, pressionando sucessivamente a tecla LOG (logaritmo decimal), a começar pelo número 20 bilhões, após quantas vezes de acionamento dessa tela aparecerá mensagem de erro? Explique.

Se possível, experimente comprovar seu resultado com uma calculadora.

Aplicações

Os sons, a audição humana e a escala logarítmica

Vamos retomar o problema levantado na introdução desse capítulo: como construir uma escala para representar valores que variam numa faixa tão grande, de 10^{-12} (limiar de audibilidade) até 1,00 (limiar de dor – embora níveis abaixo desse valor também possam causar danos e incômodos, dependendo do tempo, de exposição e frequência)?

A Física nos ensina que a intensidade (**I**) de um som é uma grandeza que mede a energia transportada por uma onda sonora na unidade de tempo, por unidade de área da superfície atravessada. No sistema internacional de unidades, ela é medida em W/m². (1 W equivale a 1 joule por segundo.)


FRANCESCO PRANDONI/GETTY IMAGES

O som produzido por amplificadores de um show de rock, a 2 m de distância, está no limiar da audição dolorosa.

Na tabela seguinte, estão relacionadas as intensidades de alguns sons dentro dessa faixa (os valores podem mudar de acordo com o modelo do aparelho):

Algumas fontes sonoras e suas respectivas intensidades

Som	Intensidade (W/m²)
Limiar de audibilidade	$I_0 = 10^{-12}$
Respiração normal	10^{-11}
Biblioteca	10^{-8}
Conversação a 1 m de distância	10^{-6}
Escritório barulhento	10^{-4}
Caminhão pesado a 15 m de distância	10^{-3}
Construção civil a 3 m de distância	10^{-1}
Limiar de dor	1,0

Fonte: *Ondas sonoras*. Disponível em: <www.arquivos.ufs.br/mlalic/UAB_livro/Fisica_C_Aula_04.pdf>. Acesso em: 7 mar. 2016.

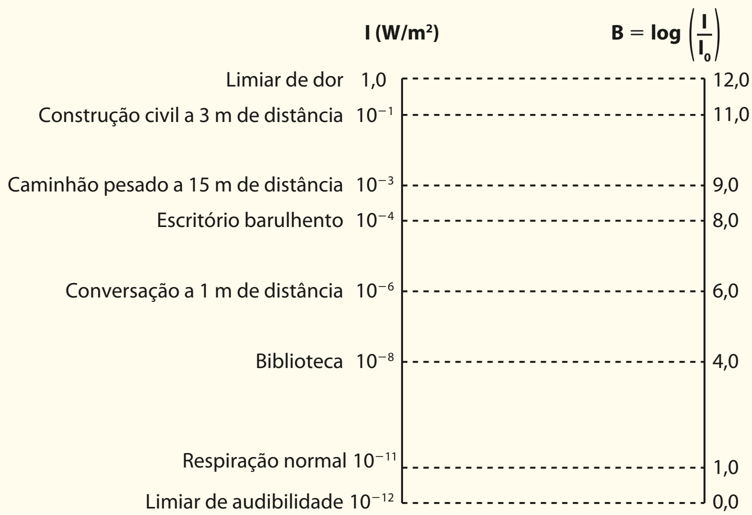
A primeira ideia é determinar, para um som qualquer, a razão entre sua intensidade (**I**) e o limiar de audibilidade (**I_0**). Do valor obtido, calculamos o logaritmo decimal, obtendo-se o chamado bel (B) – homenagem a Alexander Graham Bell (1847-1922), inventor do telefone.

$$B = \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

- Por exemplo, para o limiar de audibilidade, temos $I = I_0$ e o bel correspondente é $\log\left(\frac{I}{I_0}\right) = \log 1 = 0$, que é o novo limiar de audibilidade.
- Para o som de um escritório barulhento, por exemplo, temos $I = 10^{-4} \Rightarrow \log\left(\frac{I}{I_0}\right) = \log\left(\frac{10^{-4}}{10^{-12}}\right) = 8$ bels, o que significa que esse som está 8 bels acima do limite inferior.

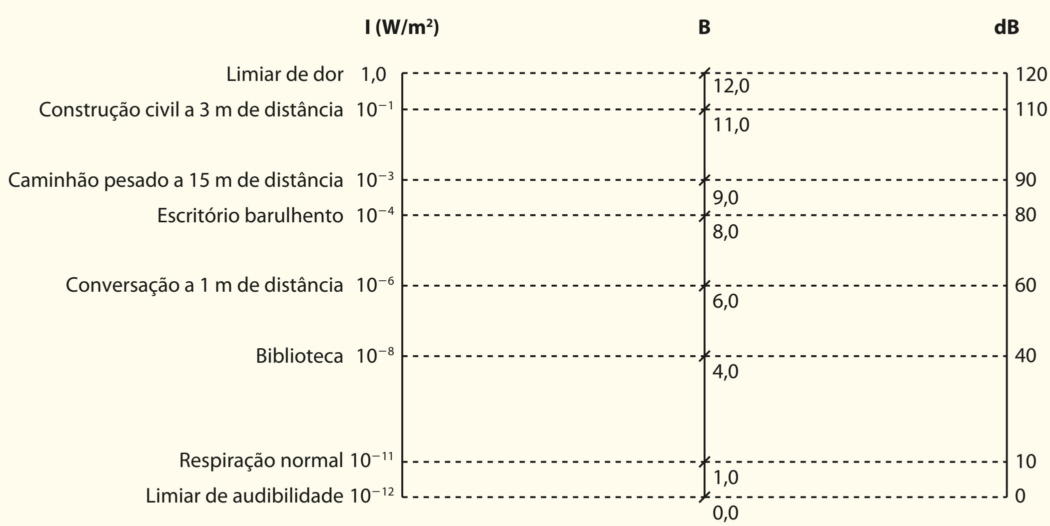
Repetindo esse raciocínio para os demais valores da tabela anterior, obtemos a seguinte correspondência:

Escala em bels



Ao se fazer essa escolha, reduziu-se a faixa da escala em excesso (de 10^{-12} até 1,0, obtivemos uma correspondência de 0 a 12). A saída encontrada foi subdividir o bel (B), criando-se o decibel (dB), que corresponde a um décimo do bel. A escala mais utilizada é a dos **decibels** (embora amplamente usado, o plural "decibéis" não é correto).

Veja, a seguir, a correspondência entre os diversos sons listados, o bel e o decibel:



Temos: $dB = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$

Observe que tanto o bel como o decibel não são unidades de medidas e sim escalas (dados pelo logaritmo de razões entre intensidades sonoras).

Com a escala em decibels é possível comparar de maneira muito mais fácil valores que se encontravam numa faixa numérica extremamente ampla. Esse exemplo mostra a vantagem do uso de uma escala logarítmica quando a grandeza em estudo assume valores muito pequenos (ou muito grandes).

Fontes de pesquisa: *Como funciona o corpo humano?* Disponível em: <www2.ibb.unesp.br/Museu_Escola/2_qualidade_vida_humana/Museu2_qualidade_corpo_sensorial_audicao1.htm>. Acesso em: 7 mar. 2016; Maria de Fátima Ferreira Neto. *60 + 60 = 63?* Disponível em: <www.sbfisica.org.br/v1/novopion/index.php/publicacoes/artigos/471-60-60-63>. Acesso em: 7 mar. 2016; *Propriedades físicas do som*. Disponível em: <wwwp.feb.unesp.br/jcandido/acustica/Apostila/Capitulo%2002.pdf>. Acesso em: 7 mar. 2016. ; *Ondas sonoras*. Disponível em: <www.arquivos.ufs.br/mlalic/UAB_livro/Fisica_C_Aula_04.pdf>. Acesso em: 7 mar. 2016.