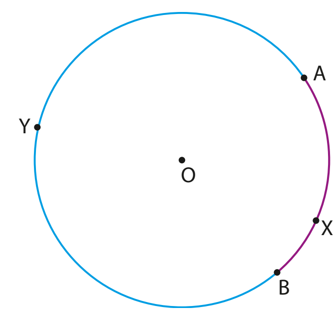
CAPÍTULO 1

A circunferência trigonométrica

Arcos e ângulos

Seja uma circunferência de centro **O**, sobre a qual tomamos dois pontos distintos, **A** e **B**. A circunferência fica dividida em duas partes, cada uma das quais é um **arco de circunferência**.



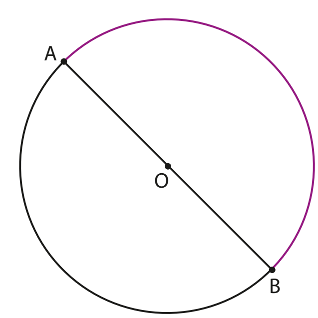
Observe, na figura ao lado, que existem dois arcos determinados por **A** e **B**:

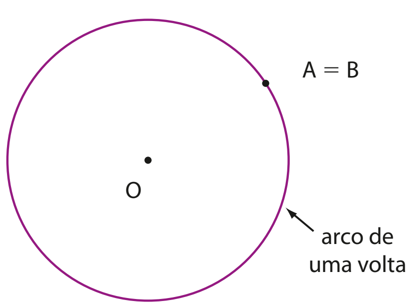
- O arco de extremidades **A** e **B** que contém o ponto **X** — representado por $\overset{\frown}{AXB}$.
- O arco de extremidades **A** e **B** que contém o ponto **Y** — representado por $\overset{\frown}{AYB}$.

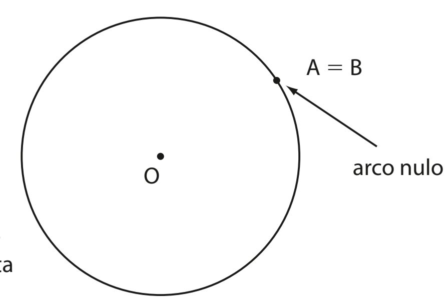
Quando não houver dúvidas em relação ao arco ao qual nos referimos, podemos escrever simplesmente $\overset{\frown}{AB}$ para representar o arco com extremidades **A** e **B**.

Vejamos agora dois casos particulares:

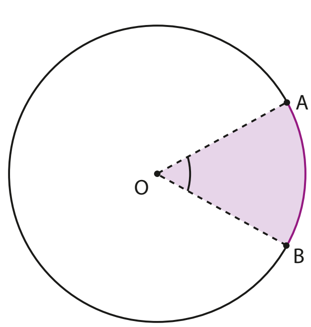
- Se **A** e **B** são simétricos em relação ao centro **O**, o segmento $\overline{AB}$ é um diâmetro e cada um dos arcos determina uma semicircunferência e é chamado **arco de meia-volta**. Veja a figura ao lado.
- No caso de **A** coincidir com **B**, dois arcos são determinados. Um deles é o **arco de uma volta** e o outro, o **arco nulo**. Observe-os nas figuras seguintes.







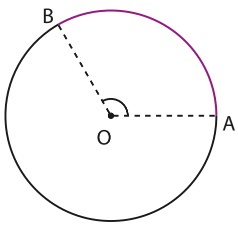
Observe que a todo arco $\overset{\frown}{AB}$ corresponde um ângulo central, isto é, um ângulo cujo vértice é o centro da circunferência.



$A\hat{O}B$ é o ângulo central correspondente ao arco $\overset{\frown}{AB}$.

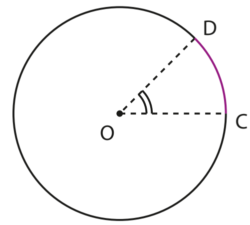
Medida e comprimento de arco

A **medida angular de um arco** ou, simplesmente, **medida de um arco** é igual à medida do ângulo central correspondente. Observe estes exemplos:



med(AÔB) = 120°

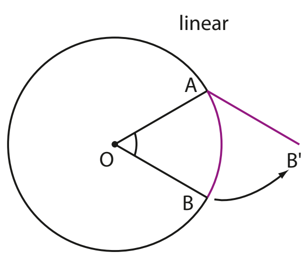
Dizemos que o arco $\overset{\frown}{AB}$ mede 120°.



med(CÔD) = 45°

Dizemos que o arco $\overset{\frown}{CD}$ mede 45°.

A **medida linear** de um arco refere-se ao seu **comprimento**. Quando retificamos um arco de circunferência, obtemos um segmento de reta cuja medida é igual ao **comprimento do arco**, que é medido em centímetros, metros, milímetros, quilômetros etc.



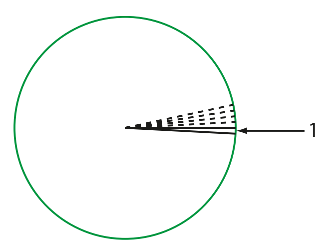
PENSE NISTO:

A medida angular de um arco depende da medida do raio da circunferência correspondente? E a medida do comprimento de um arco, depende?

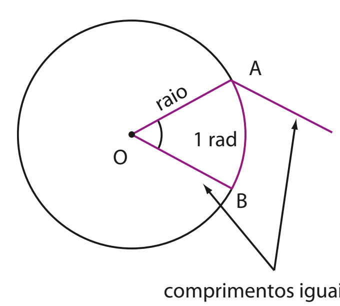
Unidades de medida de arcos e ângulos

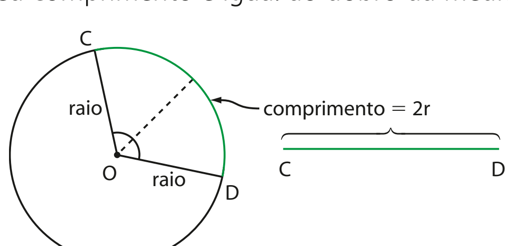
Ao tratarmos da medida de um arco, adotamos o grau (°) ou radiano (rad).

- **1 grau** é a medida de um arco igual a $\frac{1}{360}$ da circunferência correspondente.
  Como sabemos, o grau possui submúltiplos importantes, como o **minuto** e o **segundo**.
  O arco de 1 minuto (indica-se 1′) corresponde a $\frac{1}{60}$ do arco de medida 1°; o arco de 1 segundo (indica-se 1″) corresponde a $\frac{1}{60}$ do arco de medida 1′.



- **1 radiano** é a medida de um arco cujo comprimento é igual ao raio da circunferência correspondente.
  O arco $\overset{\frown}{AB}$, ao lado, bem como seu ângulo correspondente AÔB, mede 1 rad.
  Já o arco $\overset{\frown}{CD}$ abaixo, bem como seu ângulo correspondente CÔD, mede 2 rad, pois seu comprimento é igual ao dobro da medida do raio.





Como sabemos, o comprimento **C** de uma circunferência de raio **r** é igual a $2\pi r$. Isso significa que o raio "cabe" 2π vezes nesse comprimento (aproximadamente 6,28 vezes).

Assim, um arco de comprimento igual a **r** mede 1 rad; um arco de comprimento igual a 2r mede 2 rad etc. Da mesma maneira, um arco de comprimento $2\pi r$ (volta completa) mede 2π rad. Concluímos, desse modo, que o arco de uma volta mede 2π rad ou 360°.

Observe as correspondências abaixo:

$$\begin{array}{ccc} 2\pi \text{ rad} & — & 360° \\ \pi \text{ rad} & — & 180° \\ \frac{\pi}{2} \text{ rad} & — & 90° \\ \frac{\pi}{3} \text{ rad} & — & 60° \\ \frac{\pi}{4} \text{ rad} & — & 45° \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

A relação "um arco de meia-volta mede 180° ou π rad" servirá de base para efetuarmos as conversões de unidades de medidas de arcos, como mostram os exercícios resolvidos a seguir.

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

1 Um arco mede 30°. Qual é a medida desse arco em radianos?

Solução:

Podemos estabelecer a regra de três simples:

$$\begin{cases} \pi \text{ rad} \text{ — } 180° \\ x \text{ — } 30° \end{cases}$$

Daí: $x = \dfrac{30° \cdot \pi \text{ rad}}{180°} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6} \text{ rad}$

2 Em uma circunferência, um ângulo central mede $\frac{\pi}{4}$ radianos. Quanto mede esse ângulo em graus?

Solução:

Podemos estabelecer a regra de três simples:

$$\begin{cases} \pi \text{ rad} \text{ — } 180° \\ \frac{\pi}{4} \text{ rad} \text{ — } x \end{cases}$$

Assim: $x = \dfrac{\frac{\pi}{4} \text{ rad} \cdot 180°}{\pi \text{ rad}} \Rightarrow x = 45°$

3 Quanto mede, em graus, um arco de 1 radiano?

Solução:

Como π rad (ou 3,14 rad, aproximadamente) correspondem a 180°, podemos fazer:

$$\begin{cases} 3{,}14 \text{ rad} \text{ — } 180° \\ 1 \text{ rad} \text{ — } x \end{cases} \Rightarrow x = \frac{180°}{3{,}14} \Rightarrow x \simeq 57{,}3° = 57°18'$$

PENSE NISTO:

Como você poderia resolver mentalmente o exercício 1? E o exercício 2?

PENSE NISTO:

Explique por que 57,3° é igual a 57°18'.

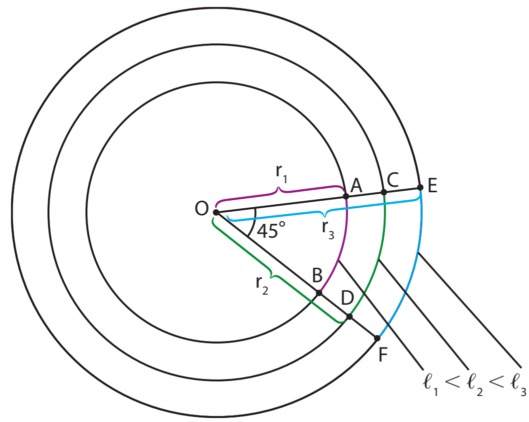
OBSERVAÇÃO

Quando a unidade de medida de um arco vier suprimida, fica convencionado que a medida deste arco é dada em radianos. Assim, por exemplo, quando dizemos que um arco $\overset{\frown}{AB}$ mede $\frac{\pi}{4}$, estamos dizendo que o arco $\overset{\frown}{AB}$ mede $\frac{\pi}{4}$ radianos; se o arco $\overset{\frown}{CD}$ mede 3, queremos dizer que o arco $\overset{\frown}{CD}$ mede 3 radianos, e assim por diante.

O comprimento de um arco

Quando medimos o comprimento de um arco, a unidade de medida utilizada é a mesma do raio: metro, centímetro, milímetro etc.

Observe que na figura ao lado o comprimento de um arco depende da medida do raio considerado: os arcos $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{CD}$ e $\overset{\frown}{EF}$ medem, cada um, 45° $\left(\text{ou } \frac{\pi}{4} \text{ rad}\right)$, mas seus comprimentos são diferentes.



Vamos calcular os comprimentos ℓ_1, ℓ_2 e ℓ_3 dos arcos $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{CD}$ e $\overset{\frown}{EF}$, respectivamente:

- arco $\overset{\frown}{AB}$:

$$\begin{cases} 360° — 2\pi r_1 \\ 45° — \ell_1 \end{cases} \Rightarrow \frac{360°}{45°} = \frac{2\pi r_1}{\ell_1} \Rightarrow 8 = \frac{2\pi r_1}{\ell_1} \Rightarrow \frac{\ell_1}{r_1} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \ell_1 = \frac{\pi}{4} \cdot r_1$$

- arco $\overset{\frown}{CD}$:

$$\begin{cases} 360° — 2\pi r_2 \\ 45° — \ell_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{360°}{45°} = \frac{2\pi r_2}{\ell_2} \Rightarrow 8 = \frac{2\pi r_2}{\ell_2} \Rightarrow \frac{\ell_2}{r_2} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \ell_2 = \frac{\pi}{4} \cdot r_2$$

- arco $\overset{\frown}{EF}$:

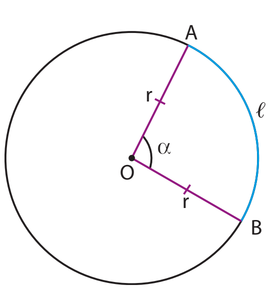
$$\begin{cases} 360° — 2\pi r_3 \\ 45° — \ell_3 \end{cases} \Rightarrow \frac{360°}{45°} = \frac{2\pi r_3}{\ell_3} \Rightarrow 8 = \frac{2\pi r_3}{\ell_3} \Rightarrow \frac{\ell_3}{r_3} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \ell_3 = \frac{\pi}{4} \cdot r_3$$

Mantida fixa a medida do ângulo central, o comprimento de um arco é diretamente proporcional ao raio da circunferência que o contém.

No exemplo, $\frac{\ell_1}{r_1} = \frac{\ell_2}{r_2} = \frac{\ell_3}{r_3} = \frac{\pi}{4}$.

Observe que a constante de proporcionalidade corresponde à medida do ângulo central, expressa em radianos. O ângulo central da figura mede 45° ou $\frac{\pi}{4}$ rad.

Em geral, podemos escrever:



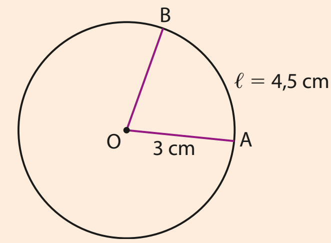
$$\alpha = \frac{\ell}{r}$$ em que $\begin{cases} \boldsymbol{\alpha}\text{: medida do arco em radianos} \\ \boldsymbol{\ell}\text{: comprimento do arco} \\ \mathbf{r}\text{: medida do raio da circunferência} \end{cases}$

PENSE NISTO:

Na relação ao lado, o que acontece se r = 1?

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

4 Em uma circunferência de raio 3 cm, toma-se um arco $\overset{\frown}{AB}$ de comprimento 4,5 cm. Qual é, em radianos, a medida desse arco?



Solução:

1º modo:

Podemos usar a relação $\alpha = \frac{\ell}{r}$, isto é: $\alpha = \frac{4{,}5}{3} = 1{,}5$ rad

2º modo:

Uma solução equivalente consiste em usar a definição da medida de 1 radiano, comparando a medida do arco com o seu comprimento:

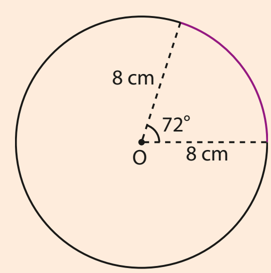
$$\begin{array}{lcl} \text{medida do arco} & & \text{comprimento do arco} \end{array}$$

$$\begin{cases} 1 \text{ rad} \text{ ———— } 3 \text{ cm} \\ x \text{ ———— } 4{,}5 \text{ cm} \end{cases} \Rightarrow x = 1{,}5 \text{ rad}$$

5 Qual é o comprimento de um arco de 72° sobre uma circunferência de raio 8 cm?

Solução:

1º modo:



- O comprimento da circunferência é $c = 2 \cdot \pi \cdot 8$ cm $= 16\pi$ cm.
  Podemos fazer:

$$\begin{cases} 16\pi \text{ cm} — 360° \\ x \quad — 72° \end{cases} \Rightarrow x = \frac{16\pi}{5} \text{ cm (ou aproximadamente 10,05 cm)}$$

  Observe que $\frac{360°}{72°} = 5$; assim, o comprimento do arco é igual à quinta parte do comprimento da circunferência correspondente.

2º modo:

- Expressamos 72° em radianos:

$$\begin{cases} 180° — \pi \text{ rad} \\ 72° — \quad x \end{cases} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{5} \text{ rad}$$

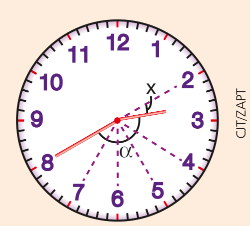
  Daí, usamos a relação:

$$\alpha = \frac{\ell}{r} \Rightarrow \frac{2\pi}{5} = \frac{\ell}{8} \Rightarrow \ell = \frac{16\pi}{5}$$

  Portanto, o comprimento deste arco é $\frac{16\pi}{5}$ cm.

6 Determine a medida do menor ângulo α formado entre os ponteiros de um relógio ao marcar 2 h 40 min.

Solução:



O ângulo pedido mede α.

Observe que, entre duas marcas consecutivas de horas, tem-se um arco cujo ângulo central tem medida $\frac{360°}{12} = 30°$. Assim, considerando o deslocamento do "2 ao 8", temos que:

$$\alpha + x = 6 \cdot 30° \Rightarrow \alpha = 180° - x$$

Em 1 hora (60 minutos), o ponteiro das horas percorre um arco de medida 30°.

Para calcular a medida **x** do ângulo percorrido pelo ponteiro das horas em 40 minutos, podemos estabelecer a proporção:

$$\begin{cases} 60 \text{ minutos} — 30° \\ 40 \text{ minutos} — \quad x \end{cases} \Rightarrow x = 20°$$

Assim:

$$\alpha = 180° - 20° = 160°$$

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

1 Expresse em radianos:

a) 30°
b) 15°
c) 120°
d) 210°
e) 270°
f) 300°
g) 20°
h) 150°
i) 315°

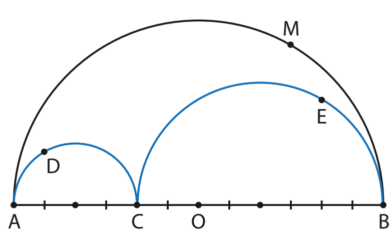
2 Expresse em graus:

a) $\frac{\pi}{3}$ rad
b) $\frac{\pi}{2}$ rad
c) $\frac{\pi}{4}$ rad
d) $\frac{\pi}{5}$ rad
e) 0,5 rad
f) $\frac{3\pi}{4}$ rad
g) $\frac{2\pi}{9}$ rad
h) $\frac{11\pi}{6}$ rad
i) 3 rad

3 Uma semicircunferência tem comprimento 188,4 m. Quanto mede seu raio? Considere $\pi \simeq 3,14$.

4 Calcule o comprimento de um arco $\overset{\frown}{AB}$ definido em uma circunferência de raio 8 cm por um ângulo central $A\hat{O}B$ de medida 120°.

5 Considerando que, na figura abaixo, $\overline{AB}$ está dividido em 12 partes iguais, qual é o percurso mais curto sobre as semicircunferências: AMB ou ADCEB?

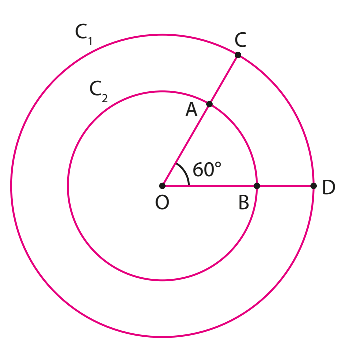


6 Na figura, as circunferências $\mathbf{C_1}$ e $\mathbf{C_2}$ têm mesmo centro **O** e raios de medidas $\mathbf{R_1}$ e $\mathbf{R_2}$, respectivamente, tais que $2R_1 = 3R_2$.

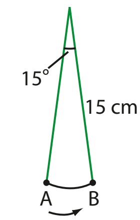
Determine:

a) as medidas dos arcos $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{CD}$, em radianos;

b) a razão entre os comprimentos de $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{CD}$, nesta ordem.



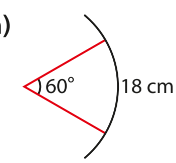
7 Um pêndulo de 15 cm de comprimento oscila entre **A** e **B** descrevendo um ângulo de 15°. Qual é o comprimento da trajetória descrita pela sua extremidade entre **A** e **B**? Use $\pi \simeq 3,14$.



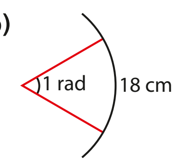
8 Um andarilho caminhou 7 536 m, em uma pista circular de 40 m de raio. Quantas voltas ele deu na pista? Considere $\pi \simeq 3,14$.

9 Determine a medida do raio da circunferência em cada caso:

a)

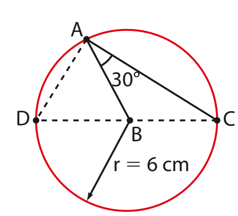


b)



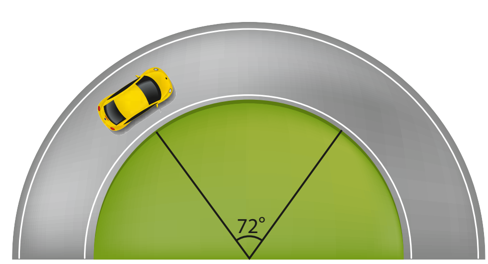
Use $\pi \simeq 3,14$.

10 Na figura, o triângulo ABC é isósceles de base $\overline{AC}$ e o triângulo CAD está inscrito em uma semicircunferência cujo raio mede 6 cm. Considerando o arco $\overset{\frown}{AD}$ que não contém o ponto **C**, determine:



a) sua medida, em radianos;
b) seu comprimento, em centímetros.

11 Um automóvel percorre 157 m em uma pista circular, descrevendo um arco de 72°. Determine a medida do raio da curva. Use $\pi \simeq 3,14$.



ALEX ARGOZINO

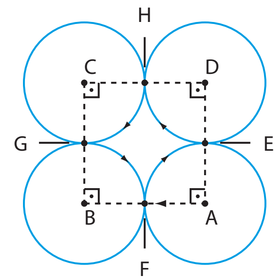
Elementos sem proporção entre si.

12 Determine a medida do menor ângulo formado entre os ponteiros de um relógio ao marcar:

a) 3 h
b) 8 h 30 min
c) 3 h 45 min
d) 5 h 40 min
e) 9 h 35 min

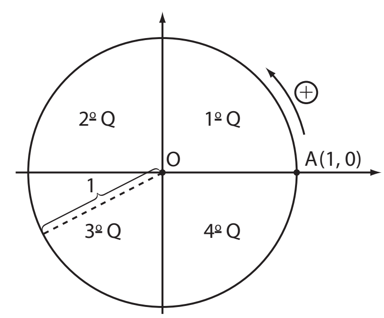
13 O ponteiro dos minutos de um relógio tem comprimento de 12 cm. Qual é a distância que a ponta do ponteiro percorre num intervalo de tempo de 20 minutos? Use $\pi \simeq 3{,}1$.

14 Na figura, as circunferências de mesmo raio têm centros em **A**, **B**, **C** e **D** e são tangentes exteriormente. Os pontos **E**, **F**, **G** e **H** são pontos de tangência.



Sabendo que $AC = 10\sqrt{2}$ cm, determine o comprimento do trajeto $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} + \overset{\frown}{EH} + \overset{\frown}{HG} + \overset{\frown}{GF} + \overset{\frown}{FE} + \overline{EA}$.

Circunferência trigonométrica



Fixemos dois eixos perpendiculares cruzando-se em **O** e orientados conforme as indicações: o vertical, para cima, e o horizontal, para a direita.

No sistema assim descrito, consideremos uma circunferência com centro **O** e raio unitário (isto é, raio de medida igual a 1).

O círculo limitado por essa circunferência fica dividido em quatro partes iguais denominadas **quadrantes** (**Q**) e indicadas na figura por 1º Q, 2º Q, 3º Q e 4º Q.

Vamos convencionar que todos os arcos tomados nessa circunferência têm origem no ponto A(1, 0) — interseção da circunferência com o semieixo horizontal positivo — e o sentido positivo é o anti-horário.

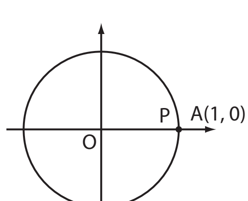
Construímos, deste modo, a **circunferência trigonométrica**.

Números reais associados a pontos da circunferência trigonométrica

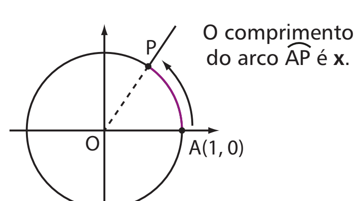
Como o raio é unitário, o comprimento da circunferência trigonométrica é $2 \cdot \pi \cdot 1 = 2\pi$ (aproximadamente 6,28) unidades de medida de comprimento.

Vamos associar a cada número real **x**, $0 \leqslant x < 2\pi$, um único ponto **P** da circunferência trigonométrica, de modo que:

- se $x = 0$, o ponto **P** coincide com o ponto A(1, 0);
- se $x > 0$, descrevemos, a partir de **A**, no sentido anti-horário, um arco de comprimento **x** cujas extremidades são **A** e **P**.

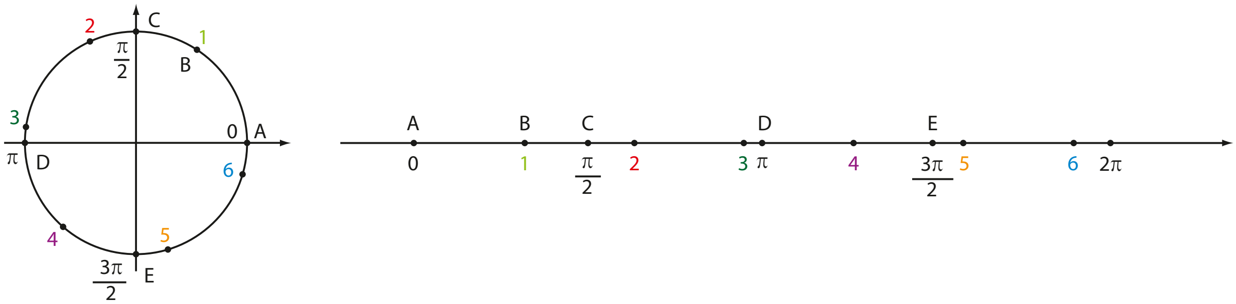


$x = 0$



$x > 0$

Observe a associação seguinte:



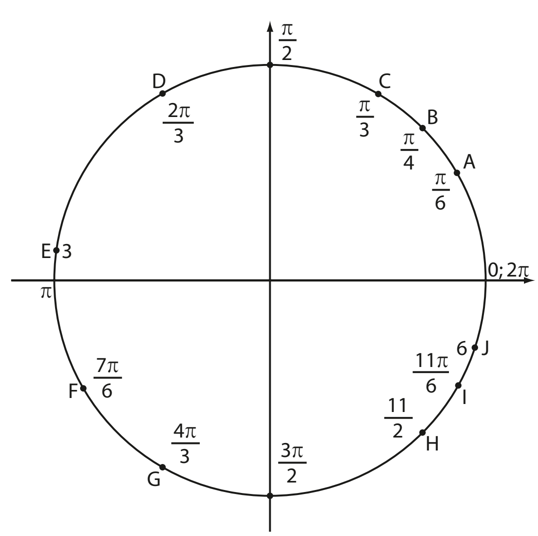
Temos que:

- O arco $\overset{\frown}{AC}$ corresponde a $\frac{1}{4}$ do arco de uma volta completa.
  Seu comprimento é $\frac{\pi}{2}$ (aproximadamente 1,57), que é a quarta parte de 2π. Note, também, que sua medida é $\frac{\pi}{2}$ radianos (ou 90°). Dizemos que **C** é imagem do número real $\frac{\pi}{2}$.
- O arco $\overset{\frown}{AD}$ corresponde à metade do arco de uma volta completa.
  Seu comprimento é π (aproximadamente 3,14), que é a metade de 2π. Observe que sua medida é π radianos (ou 180°). Dizemos que **D** é imagem do número real π.
- O arco $\overset{\frown}{AE}$ corresponde a $\frac{3}{4}$ do arco de uma volta completa e seu comprimento é, portanto, $\frac{3}{4}$ de 2π, isto é, $\frac{3\pi}{2}$.
  Sua medida é $\frac{3\pi}{2}$ radianos (ou 270°). O ponto E é imagem do número real $\frac{3\pi}{2}$.
- O arco $\overset{\frown}{AB}$ tem comprimento igual a 1 e sua medida é 1 rad (observe que o comprimento de $\overset{\frown}{AB}$ é igual à medida do raio). O ponto **B** é imagem do número real 1.
  ⋮
  e assim por diante.

Ao fazermos essa associação, é importante lembrar que a medida (α) de um arco, em radianos, coincide numericamente, na circunferência trigonométrica, com o seu comprimento (ℓ), pois, como $\alpha = \frac{\ell}{r}$ e $r = 1$, temos $\alpha = \ell$.

EXEMPLO 1

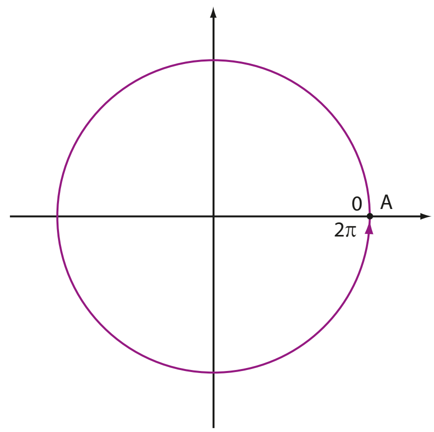
Observe, na circunferência trigonométrica ao lado, as imagens **A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F**, **G**, **H**, **I** e **J**, correspondentes aos números reais $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, 3, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{11}{2}$, $\frac{11\pi}{6}$ e 6, respectivamente.



OBSERVAÇÃO

Estamos considerando, por enquanto, a associação de um número real pertencente ao intervalo $[0, 2\pi[$ a um ponto da circunferência trigonométrica.

No capítulo 4, é apresentada a associação de um número real qualquer a um ponto da circunferência trigonométrica. Antecipadamente, observe que a imagem do número real 2π é o ponto $A(1, 0)$: trata-se da extremidade "final" do arco de uma volta completa, de medida 2π radianos (ou 360°) e comprimento 2π.



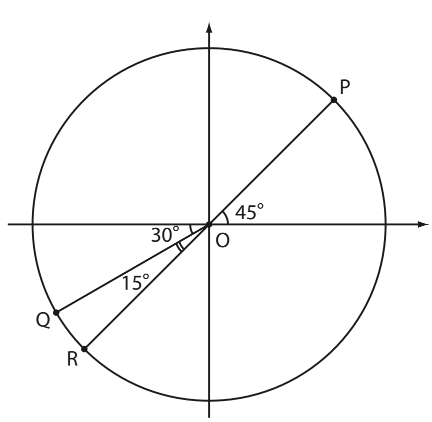
EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

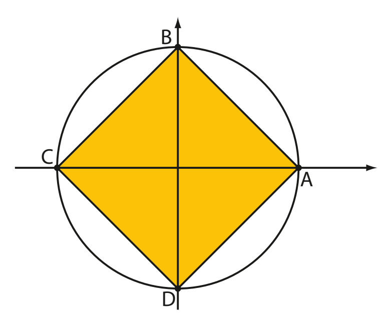
15 Marque, na circunferência trigonométrica, os pontos correspondentes aos seguintes números reais: $0, \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{6}$ e $\frac{5\pi}{3}$.

16 Agrupe, por quadrante, os pontos correspondentes aos seguintes números reais: $\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{12}, \frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}$, $2, \frac{2\pi}{7}, \frac{3\pi}{5}, \frac{5\pi}{9}, \frac{4}{3}, \frac{7\pi}{12}, \sqrt{7}, \frac{15\pi}{8}, \frac{15\pi}{11}, \frac{10}{3}, \frac{13}{4}$ e 5.

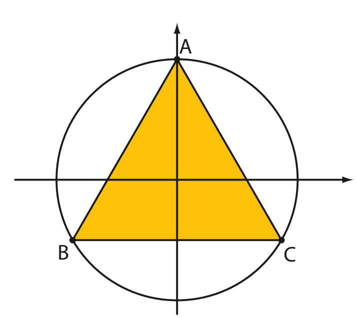
17 Sejam os pontos **P**, **Q** e **R** da circunferência trigonométrica seguinte. Qual é o número real **x**, com $0 \leqslant x < 2\pi$, associado ao ponto **P**? E ao ponto **Q**? E ao ponto **R**?



18 O quadrado ABCD está inscrito na circunferência trigonométrica. Determine, para cada vértice, o número real **x**, com $0 \leqslant x < 2\pi$, associado.



19 O triângulo equilátero ABC está inscrito na circunferência trigonométrica seguinte. Quais são os números reais **x**, com $0 \leqslant x < 2\pi$, que têm imagens nos vértices do triângulo?



Simetrias

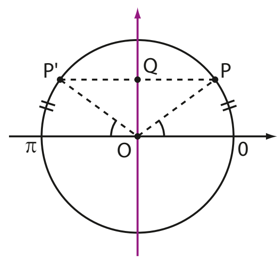
Na circunferência trigonométrica, vamos estudar três tipos de simetrias: em relação ao eixo vertical, em relação ao eixo horizontal e em relação ao centro.

Para o estudo de cada uma delas, tomaremos um arco de medida **a** radianos, do 1º quadrante, correspondente ao número real **a**, com $0 \leqslant a < \frac{\pi}{2}$.

Seja **P** a imagem do número real **a**:

- **Simetria em relação ao eixo vertical**

  O simétrico de **P** em relação ao eixo vertical é o ponto **P'**, imagem do número real $\pi - a$, visto que os ângulos centrais assinalados na figura são congruentes.

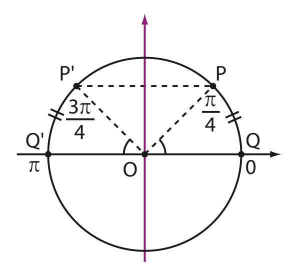


PENSE NISTO:

Por que os triângulos POQ e P'OQ da figura ao lado são congruentes?

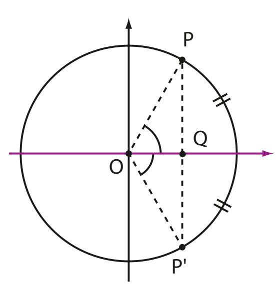
EXEMPLO 2

Os pontos **P** e **P'**, imagens dos números reais $\frac{\pi}{4}$ e $\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$, respectivamente, são simétricos em relação ao eixo vertical. O mesmo ocorre com **Q** e **Q'**, imagens de 0 e π, respectivamente.



- **Simetria em relação ao eixo horizontal**

  Levando em conta a congruência entre os ângulos centrais assinalados na figura, podemos afirmar que o número real que possui imagem simétrica à imagem de **a** é o número $2\pi - a$.

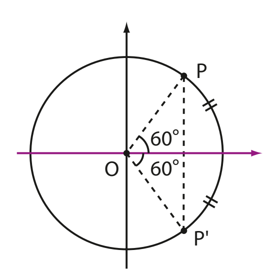


PENSE NISTO:

Por que os triângulos POQ e P'OQ da figura ao lado são congruentes?

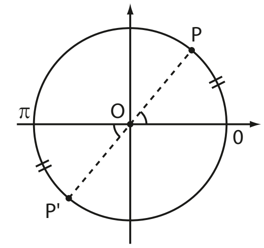
EXEMPLO 3

Em relação ao eixo horizontal, são simétricos os pontos **P** e **P'** (note a congruência entre os ângulos assinalados). Os pontos **P** e **P'** são as imagens dos números reais $\frac{\pi}{3}$ e $2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$, respectivamente.



- **Simetria em relação ao centro**

  Quando dois pontos são diametralmente opostos, como **P** e **P'** da figura, é possível afirmar que o número real com imagem em **P** é **a** e em **P'** é a + π, pois os ângulos assinalados na figura são congruentes.

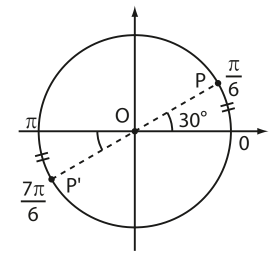


EXEMPLO **4**

Os pontos correspondentes aos números reais $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{7\pi}{6}$ são simétricos em relação ao centro da circunferência.

Note que:

$$\frac{7\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{6\pi}{6} = \pi$$



EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

20 Marque, na circunferência trigonométrica, os pontos correspondentes aos números $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{2\pi}{3}$. Cite a simetria, se houver.

21 Proceda da mesma forma que no exercício anterior para:

a) $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5\pi}{3}$

b) $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{11\pi}{6}$

c) $\frac{\pi}{8}$ e $\frac{9\pi}{8}$

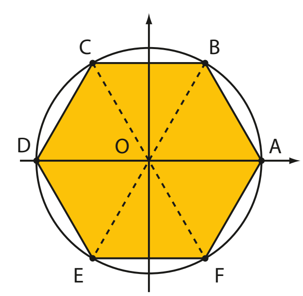
d) $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$

22 Considere o número real $\frac{11\pi}{10}$.

a) Em que quadrante se encontra a imagem **P** desse número?

b) Os pontos simétricos de **P** em relação ao eixo horizontal, ao eixo vertical e ao centro da circunferência trigonométrica são, respectivamente, os pontos **Q**, **R** e **S**. Obtenha os números reais associados a esses pontos.

23 Na figura ao lado o hexágono regular ABCDEF está inscrito na circunferência trigonométrica. O vértice **A** é imagem do número real zero.



a) Os demais vértices do hexágono são imagens de números reais pertencentes ao intervalo $[0, 2\pi[$. Determine esses números.

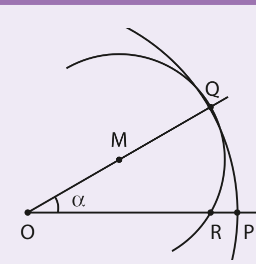
b) Obtenha o perímetro e a área do hexágono ABCDEF.

24 Divide-se a circunferência trigonométrica em 8 partes iguais, sendo A(1, 0) um dos pontos de divisão. Obtenha os números reais **x**, com $0 \leqslant x < 2\pi$ cujas imagens são os pontos de divisão.

DESAFIO

Na figura, o arco $\overset{\frown}{PQ}$ pertence à circunferência de centro **O**. Sua medida, em radianos, é α e seu comprimento é 5 cm.

Com centro em **M**, ponto médio de $\overline{OQ}$, traçamos uma circunferência que contém o arco $\overset{\frown}{QR}$ e tangencia internamente a outra circunferência no ponto **Q**. Determine o comprimento de $\overset{\frown}{QR}$.

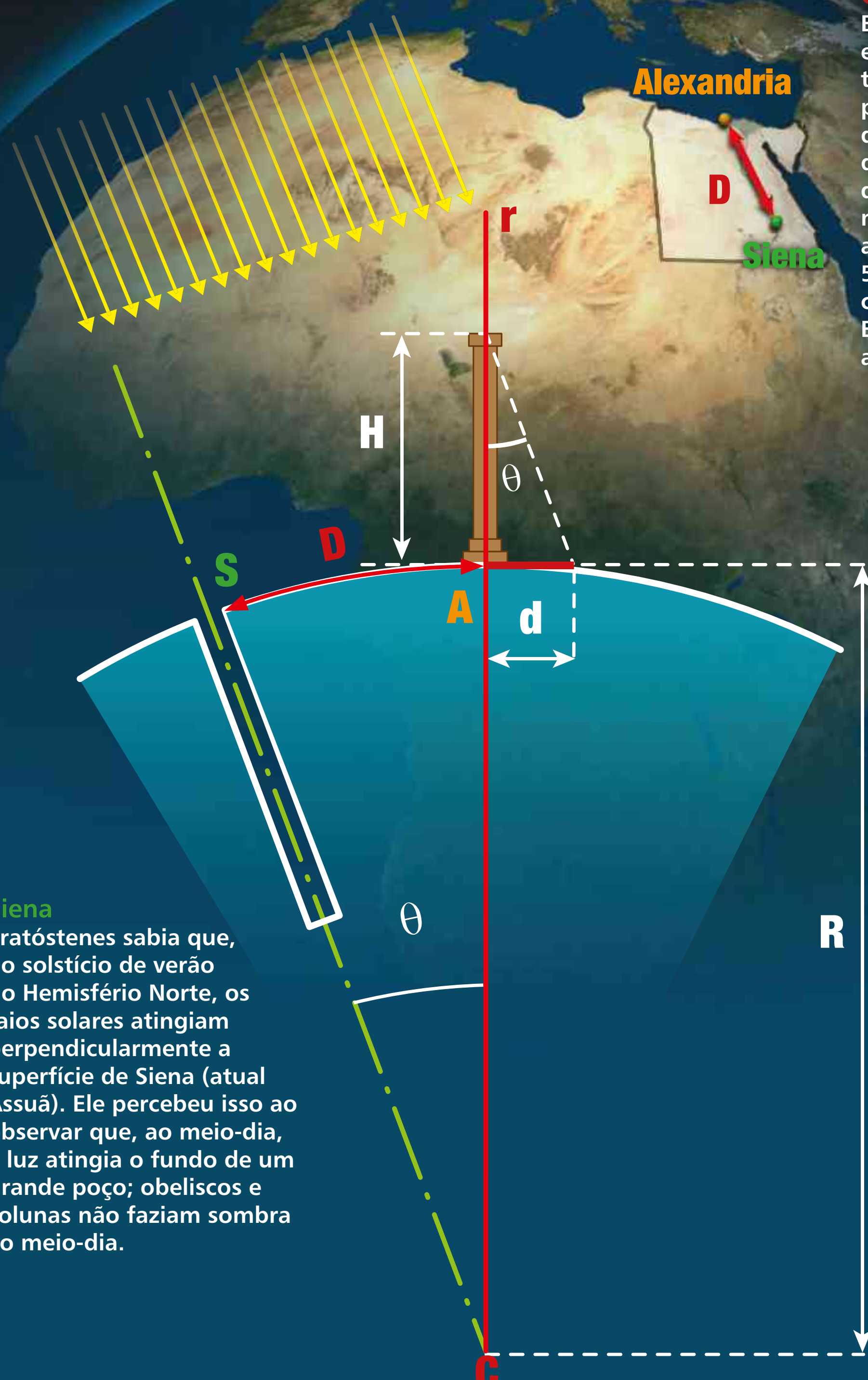


Aplicações

Medindo distâncias inacessíveis

Matemática e Astronomia

Na Antiguidade, os gregos exerceram um papel importante no desenvolvimento de diversos ramos do conhecimento humano. Movidos talvez pela curiosidade ou fascínio pelos astros, empreenderam incursões interessantes em assuntos de astronomia. Um deles foi Eratóstenes, que conseguiu estimar o comprimento da circunferência da Terra a partir da observação das sombras formadas pela luz solar.



O estádio

Eratóstenes calculou a distância entre Siena e Alexandria com base no tempo de viagem das caravanas, que percorriam a média de 100 estádios por dia. Estádio era a unidade de medida de comprimento usada pelos gregos, que equivale a aproximadamente 157 metros. Para ir de uma cidade à outra, as caravanas levavam, em média, 50 dias e, ao calcular essa distância com a unidade de medida da época, Eratóstenes chegou a 5 mil estádios, aproximadamente 785 quilômetros.

Alexandria

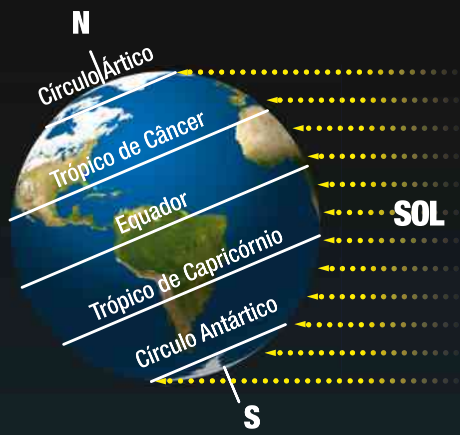
Ele pensou em observar a inclinação dos raios solares em Alexandria, outra cidade egípcia ao sul de Siena, no solstício de verão do ano seguinte. Eratóstenes observou que um objeto, provavelmente uma vareta ou coluna fincada no solo, em área aberta, fazia sombra ao meio-dia.

Ele verificou que o ângulo (θ) formado entre a coluna e os raios solares era de 7,2°.

- Considerando o prolongamento das linhas verticais a partir de uma coluna perpendicular ao solo em Siena (**S**) e outro em Alexandria (**A**), deduziu que essas linhas deveriam se encontrar no centro da Terra (**C**), determinando um ângulo θ. Note que AC = SC = R.
- Considerando que os raios do Sol são retas paralelas interceptadas por uma transversal (reta **r**), ele pôde concluir que o ângulo θ formado entre elas também media 7,2°.

Siena

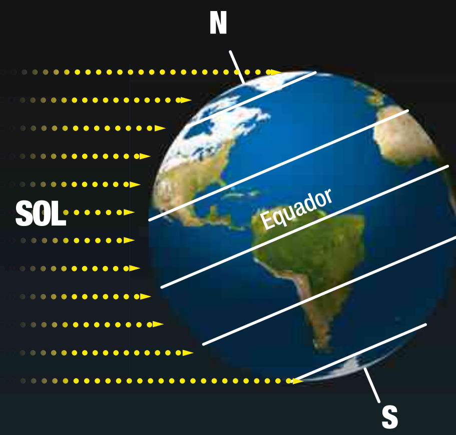
Eratóstenes sabia que, no solstício de verão do Hemisfério Norte, os raios solares atingiam perpendicularmente a superfície de Siena (atual Assuã). Ele percebeu isso ao observar que, ao meio-dia, a luz atingia o fundo de um grande poço; obeliscos e colunas não faziam sombra ao meio-dia.



Verão no Hemisfério Sul

Solstícios e equinócios

O solstício ocorre duas vezes ao ano, quando a luz do Sol atinge de forma mais intensa um dos hemisférios da Terra: em junho é verão no Hemisfério Norte e em dezembro é verão no Hemisfério Sul.
Entre os dois solstícios há os equinócios de março e setembro, períodos do ano em que a luz solar atinge da mesma maneira os dois hemisférios, fazendo dias e noites terem a mesma duração.
Cada um dos solstícios e equinócios marca o início de uma das quatro estações do ano: verão, outono, inverno e primavera.



Verão no Hemisfério Norte

Eratóstenes

Eratóstenes (Cirene, 276 a.C. – Alexandria, 194 a.C.) era bibliotecário em Alexandria e aprofundou seus estudos na área da Matemática. Nascido na Grécia, ele se dedicou também à Gramática, à Geografia e à Astronomia. É considerado um importante colaborador para a Geografia, por ter criado e adotado um vocabulário próprio para esse ramo do saber.

Circunferência e raio da Terra

7,2° equivalem a 5 000 estádios
aproximadamente 785 km

360° equivalem a 250 000 estádios
aproximadamente 39 250 km

Como 7,2° equivalem a $\frac{1}{50}$ de 360°, e sabendo que Alexandria estava a 5 mil estádios de Siena, concluiu também que a distância entre as duas cidades corresponderia a $\frac{1}{50}$ do comprimento da circunferência da Terra. Multiplicou 50 por 5 mil e obteve o comprimento da circunferência terrestre de 250 mil estádios, aproximadamente 39 250 quilômetros.
Como o comprimento da circunferência é dado por 2πr, sendo **r** a medida do raio, para obter a medida do raio terrestre, basta fazer:

$$\frac{39\,250}{2\pi}$$

o que daria um resultado próximo a 6 250 km.

Medidas atuais da Terra

Hoje sabemos que, considerando o achatamento que existe nos polos, o raio polar terrestre é de aproximadamente 6 357 quilômetros e que o comprimento da circunferência polar é de 39 942 quilômetros.
Ou seja, podemos afirmar que Eratóstenes obteve com seu método medidas surpreendentemente próximas das conhecidas atualmente, considerando a precariedade dos instrumentos utilizados. Por exemplo, qual teria sido a precisão da medida angular feita inicialmente? Além disso, ele considerou que as duas cidades estavam sob o mesmo meridiano, o que hoje, sabe-se, não é exato. Na verdade, há uma diferença de cerca de 3°. Ainda assim, sua iniciativa é plena de méritos, como também seus outros trabalhos nas áreas de Aritmética e Geografia.

Fontes de pesquisa: BOYER, Carl B. *História da Matemática*. 3ª ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2010.; Eratóstenes, um gênio do tamanho da Terra. Disponível em: <www.mat.ibilce.unesp.br/ciencia/docs/Mini-Curso-Eratostenes,-Um-Genio-do-Tamanho-da-Terra.pdf>. Acesso em: 10 mar. 2016.