CAPÍTULO 10

Análise Combinatória

Considere os seguintes problemas:

- De quantos modos distintos oito pessoas podem se sentar lado a lado em uma fila de cadeiras em um cinema?
- Quantas placas de automóveis podem ser formadas sem repetição de letras e de algarismos?
- De quantos modos distintos pode ocorrer o resultado de um sorteio da Mega-Sena?
- De quantas maneiras diferentes pode-se definir as chaves de seleções da primeira fase de uma Copa do Mundo de futebol?

Todas as questões levantadas são problemas de contagem.

A Análise Combinatória é a parte da Matemática que desenvolve técnicas e métodos de contagem que nos permitem resolver essas e outras questões.

Princípio fundamental da contagem (PFC)

Veja como podemos resolver alguns problemas de contagem.

EXEMPLO **1**

Um quiosque de praia, no Rio de Janeiro, lançou a seguinte promoção durante uma temporada de verão:

Combinado de sanduíche natural e suco a R$ 20,00

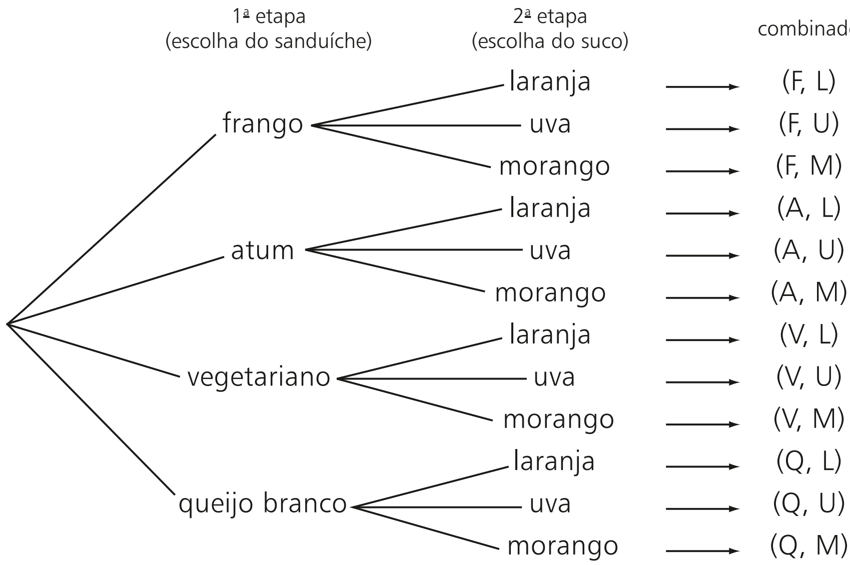
PEDRO TEIXEIRA/O GLOBO

Para esse combinado, há quatro opções de recheio para o sanduíche (frango, atum, vegetariano e queijo branco) e três opções de suco (laranja, uva e morango).

De quantas formas distintas uma pessoa pode escolher o seu combinado?

- Em primeiro lugar, a pessoa deverá optar pelo sabor do lanche. Há quatro opções: frango (**F**), atum (**A**), vegetariano (**V**) e queijo branco (**Q**).
- Para cada uma das possibilidades anteriores, a escolha do suco pode ser feita de três maneiras possíveis: laranja (**L**), uva (**U**) ou morango (**M**).

A representação dessas possibilidades pode ser feita por meio de um diagrama sequencial, conhecido como **diagrama da árvore de possibilidades** ou, simplesmente, diagrama da árvore. Observe:



Observe que cada combinado consta de um **par ordenado** (x, y), em que $x \in \{F, A, V, Q\}$ e $y \in \{L, U, M\}$.

O número de possibilidades é $4 \cdot 3 = 12$.

EXEMPLO **2**

Uma moeda é lançada três vezes sucessivamente. Quais são as sequências possíveis de faces obtidas nesses lançamentos?

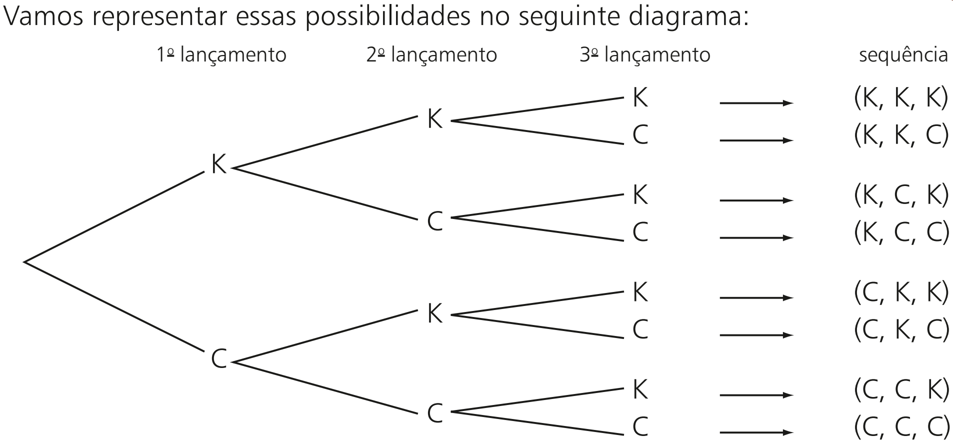
Vamos representar cara por **K** e coroa por **C**.

Há três etapas (lançamentos) a serem analisadas:

- O primeiro lançamento pode resultar em cara ou coroa.
- Para cada resultado obtido na primeira vez que a moeda for lançada, o segundo lançamento poderá resultar em cara ou coroa.
- A partir de cada um dos resultados anteriores, o terceiro lançamento pode resultar em cara ou coroa.

CIT/ZAPT

Vamos representar essas possibilidades no seguinte diagrama:



Cada sequência obtida é uma **tripla ordenada** (ou terna) de faces (f_1, f_2, f_3), em que $f_1 \in \{K, C\}$, $f_2 \in \{K, C\}$ e $f_3 \in \{K, C\}$.

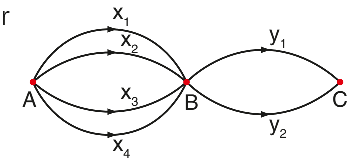
O número de sequências possíveis é $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

EXEMPLO 3

Quatro estradas ligam as cidades **A** e **B**, e duas estradas ligam as cidades **B** e **C**. De quantas maneiras distintas pode-se ir de **A** a **C**, passando por **B**?

Vamos representar as estradas que ligam as cidades **A** a **B** por $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$, $\mathbf{x_3}$ e $\mathbf{x_4}$ e as que ligam as cidades **B** a **C** por $\mathbf{y_1}$ e $\mathbf{y_2}$.

Há duas etapas sucessivas a serem cumpridas; na primeira, deve-se ir de **A** até **B** e, na segunda, de **B** até **C**.



Cada caminho determina uma sequência de dois elementos (x_i, y_j), em que $x_i \in \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ e $y_j \in \{y_1, y_2\}$, como mostra o esquema ao lado.

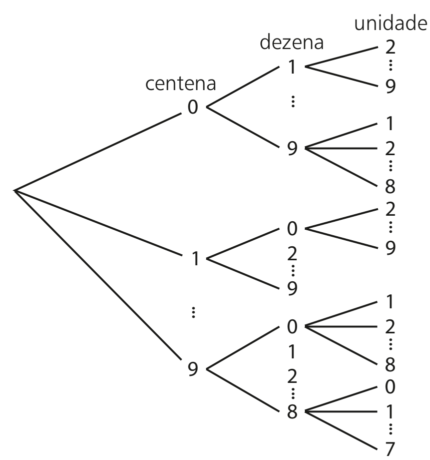
Caminhos possíveis: (x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_1), (x_3, y_2), (x_4, y_1), (x_4, y_2).

O número de maneiras de realizar a viagem completa corresponde ao número de sequências possíveis, que é $4 \cdot 2 = 8$.

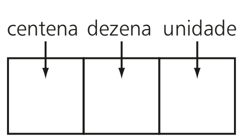
EXEMPLO 4

Leila esqueceu a senha de três algarismos para abrir o cadeado de sua mala de viagem. Ela só lembra que escolhera algarismos distintos entre si. Na pior das hipóteses, quantas combinações ela deverá testar para abrir a mala?

Representar todas as possibilidades no diagrama da árvore é impensável, mas é interessante, ao menos, representá-lo parcialmente para fixar ideias:



Temos:



- Para a escolha do algarismo das centenas: 10 opções (qualquer algarismo de 0 a 9).
- Para a escolha do algarismo das dezenas, a partir de cada escolha anterior: 9 opções, uma vez que o algarismo já escolhido para a centena não pode se repetir.
- Feitas as duas escolhas anteriores, há 8 opções distintas para a escolha do algarismo das unidades.

O diagrama acima representado, ainda que parcial, permite visualizar a "estrutura" da multiplicação: $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ (número máximo de tentativas).

Suponha que uma sequência seja formada por **k** elementos $(a_1, a_2, a_3, ..., a_k)$, em que:

- $\mathbf{a_1}$ pode ser escolhido de $\mathbf{n_1}$ maneiras distintas;
- $\mathbf{a_2}$ pode ser escolhido de $\mathbf{n_2}$ formas diferentes, a partir de cada uma das escolhas anteriores;
- $\mathbf{a_3}$ pode ser escolhido de $\mathbf{n_3}$ modos diferentes, a partir de cada uma das escolhas anteriores;

  ⋮

- $\mathbf{a_k}$ pode ser escolhido de $\mathbf{n_k}$ maneiras distintas, a partir das escolhas anteriores.

Então, o número de possibilidades para construir a sequência $(a_1, a_2, a_3, ..., a_k)$ é:

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot ... \cdot n_k$$

Esse resultado é conhecido como **princípio fundamental da contagem** (PFC) ou **princípio multiplicativo** e serve de base para a resolução de muitos problemas de contagem.

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

1 Uma prova é composta de 8 questões do tipo verdadeiro (**V**) ou falso (**F**). De quantas maneiras distintas podem ser respondidas todas as questões dessa prova?

Solução:

Cada maneira de responder às questões da prova consta de uma sequência de oito elementos $(a_1, a_2, ..., a_8)$, em que cada a_i $(1 \leqslant i \leqslant 8)$ pode ser escolhido de duas maneiras distintas: **V** ou **F**.

Assim, pelo PFC, o número de respostas possíveis para essa prova é:

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot ... \cdot 2}_{\text{8 fatores}} = 2^8 = 256$$

PENSE NISTO:

Em quantas dessas 256 sequências pelo menos uma das respostas é **V**?

2 A seleção brasileira de futebol irá disputar um torneio internacional com outras cinco seleções, no sistema "todos jogam contra todos uma única vez". Quantas são as possíveis sequências de resultados — vitória (**V**), empate (**E**) e derrota (**D**) — da equipe brasileira nesse torneio?

Solução:

A sequência de resultados dos jogos pode ser representada por $(j_1, j_2, j_3, j_4, j_5)$, e, em cada jogo, pode ocorrer **V**, **D** ou **E**.

Pelo PFC, o número de sequências de resultados possíveis é:

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5 = 243$$

3 Considerando os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6, responda:

a) Quantos números de três algarismos podemos formar?

b) Quantos números ímpares de três algarismos distintos podemos formar?

PENSE NISTO:

Por que importa a ordem de escolha dos algarismos neste problema?

Solução:

a) Devemos construir uma tripla ordenada (x, y, z) de modo que:

- **x** possa ser escolhido de seis modos distintos, pois o número que será formado não pode começar por zero. Note que 034 = 34.
- **y** possa ser escolhido de sete formas diferentes, pois pode haver repetição de algarismos.
- **z** possa ser escolhido de sete maneiras distintas, pois não há restrições.

Assim, pelo PFC, a quantidade de números é $6 \cdot 7 \cdot 7 = 294$.

b) Devemos construir uma tripla ordenada (x, y, z), respeitadas as restrições. Já que um número é ímpar quando termina por algarismo ímpar, é mais prático iniciar a resolução do problema pela "última casa" (das unidades):

- **z** pode ser escolhido de três modos distintos (1, 3 ou 5).
- **x** pode ser escolhido de cinco maneiras diferentes, pois não podemos escolher o zero nem o algarismo já escolhido para **z**.
- **y** pode ser escolhido de cinco formas distintas, pois devemos excluir os dois algarismos já escolhidos para **x** e para **z**.

Assim, pelo PFC, o resultado é $3 \cdot 5 \cdot 5 = 75$.

PENSE NISTO:

Para resolver o item *b*, um estudante iniciou analisando as possibilidades de escolha para a centena, depois para a dezena e, por fim, para a unidade, obtendo:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{diferente} \\ \text{de zero}}}{6} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{qualquer,} \\ \text{exceto o} \\ \text{já escolhido}}}{6} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ímpar}}}{3} = 96$$

Qual foi o erro cometido?

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

1 Para ir à praia, Sílvia pretende colocar um maiô e uma canga. Sabendo que ela possui cinco maiôs diferentes e três modelos diferentes de canga, determine o número de maneiras distintas de Sílvia se vestir.

2 Um restaurante oferece almoço a R$ 40,00, incluindo: entrada, prato principal e sobremesa. De quantas formas distintas um cliente pode fazer seu pedido, se existem quatro opções de entrada, três de prato principal e duas de sobremesa?

3 Em um teste vocacional, um jovem deve responder a doze questões, assinalando, em cada uma, uma única alternativa, escolhida entre "sim", "não" e "às vezes". De quantas formas distintas o teste poderá ser respondido?

4 Três amigos chegam um pouco atrasados para uma aula de bicicleta na academia e encontram cinco bicicletas vagas.
De quantos modos distintos eles podem se distribuir nas bicicletas vagas?

5 Responda:

a) Quantos números de cinco algarismos existem?

b) Quantos números ímpares de cinco algarismos existem?

c) Quantos números de cinco algarismos são maiores que 71 265?

d) Quantos números de cinco algarismos distintos começam por 7?

6 Considerando os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8, responda:

a) Quantos números de quatro algarismos podemos formar?

b) Quantos números pares de quatro algarismos podemos formar?

c) Em relação ao total do item *a*, qual é a porcentagem correspondente aos números que têm todos os algarismos distintos?

7 Responda:

a) Uma moeda é lançada duas vezes sucessivamente. Quantas sequências de faces podem ser obtidas? Quais são elas?

b) Quantas sequências de faces poderiam ser obtidas, caso a moeda fosse lançada quatro vezes sucessivamente? E cinco vezes? E dez vezes?

c) Uma moeda foi lançada **n** vezes sucessivamente. Sabendo que o número de sequências de faces que poderiam ter sido obtidas é 4^{19}, qual é o valor de **n**?

8 Para acessar os serviços de um portal de vendas pela internet, o usuário deve cadastrar uma senha formada por quatro algarismos distintos. O sistema, entretanto, não aceita as senhas que contenham um ou mais algarismos correspondentes ao ano de nascimento do cliente. Determine o número de senhas que podem ser cadastradas por alguém que nasceu em:

a) 1966

b) 1954

c) 1999

9 As placas de veículos atuais são formadas por três letras seguidas de quatro algarismos. Considerando o alfabeto com 26 letras, quantas placas distintas podem ser fabricadas de modo que:

a) os algarismos sejam distintos?

b) as letras e os algarismos sejam distintos?

c) só algarismos pares distintos e vogais apareçam?

d) não apareça a letra **J** nem um algarismo maior que 6?

e) só apareçam algarismos ímpares e em ordem crescente?

10 Quantos números de três algarismos distintos podemos formar usando:

a) apenas os algarismos 1, 2 e 3?

b) apenas os algarismos ímpares?

c) apenas os algarismos pares?

d) algarismos pares e ímpares intercalados?

11 Dispondo dos algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6, determine:

a) a quantidade de números pares de três algarismos que podemos formar;

b) a quantidade de números pares de três algarismos distintos que podemos formar;

c) a quantidade de números divisíveis por 5, formados por 4 algarismos distintos.

12 Em uma festa, há 32 rapazes e 40 moças; 80% do número de moças e $\frac{3}{8}$ do número de rapazes sabem dançar. Quantos pares podem ser formados por um rapaz e uma moça de modo que:

a) ninguém saiba dançar? **b)** apenas uma pessoa do par saiba dançar?

13 (Obmep) Manuela quer pintar as quatro paredes de seu quarto usando as cores azul, rosa, verde e branco, cada parede de uma cor diferente. Ela não quer que as paredes azul e rosa fiquem de frente uma para a outra. De quantas maneiras diferentes ela pode pintar seu quarto?

a) 8 **b)** 16 **c)** 18 **d)** 20 **e)** 24

ILUSTRAÇÃO EXTRAÍDA DA PROVA DA OBMEP ANO 2007, 1ª FASE, NÍVEL 1.

14 Em uma empresa, os estagiários passam, obrigatoriamente e uma única vez, pelos seguintes setores: RH, financeiro, comercial e *marketing*.

a) Quantas ordens distintas são possíveis para o estagiário passar pelos quatro setores?

b) Se um estagiário iniciar o trabalho no setor comercial, de quantas formas distintas poderá completar seu treinamento?

15 Leia a tira do *Recruta Zero*, de Mort Walker.

INTERCONTINENTAL PRESS

Suponha que cada um dos cinco soldados tenha exatamente uma carta para enviar a um dos três "destinos" destacados. De quantos modos distintos esses soldados podem distribuir as cartas nesses "destinos"?

16 Para ir ao trabalho, uma secretária procura sempre combinar blusa, saia e sapatos. Como ela não gosta de repetir as combinações, fez um levantamento nos armários e verificou que são possíveis 420 combinações diferentes. Se ela possui dez blusas, quantas saias e quantos pares de sapatos ela pode ter, sabendo que, para cada item, há mais de uma peça?

17 (Obmep) Patrícia escreveu, em ordem crescente, os inteiros positivos formados apenas por algarismos ímpares: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 31, 33, ... Qual foi o 157º número que ela escreveu?

a) 997 **b)** 999 **c)** 1 111 **d)** 1 113 **e)** 1 115

18 José e a família, que moram em Brasília, pretendem viajar nas férias de janeiro para Buenos Aires. Consultando um agente de viagem, José recebeu a informação de que só há voos para Buenos Aires com conexão em São Paulo, Rio de Janeiro ou Curitiba e obteve a malha de voos ao lado para a data solicitada.

De	Para	Companhias aéreas
Brasília	São Paulo	A, B, C, D
Brasília	Rio de Janeiro	A, B, C, D
Brasília	Curitiba	A, B
São Paulo	Buenos Aires	A, B, C, D, E
Rio de Janeiro	Buenos Aires	B, C, E
Curitiba	Buenos Aires	A, B, C, F

De quantas maneiras diferentes ele poderá escolher o voo de ida:

a) podendo usar companhias aéreas distintas?

b) usando a mesma companhia aérea?

19 Um estudante está procurando as soluções inteiras da equação $2x = a + b$, na incógnita **x**.

Sabendo que $a \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $b \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, de quantas maneiras distintas o estudante poderá escolher **a** e **b** para obter soluções inteiras?

20 Um programador de computador criou um código especial que utiliza apenas os símbolos: •, –, **x**.

GRAPHORAMA

Os diferentes códigos são sequências formadas por esses símbolos.

Quantos códigos:

a) de cinco símbolos começam por "•"?

b) contêm de dois a quatro símbolos?

c) são formados por três símbolos, sendo um de cada tipo?

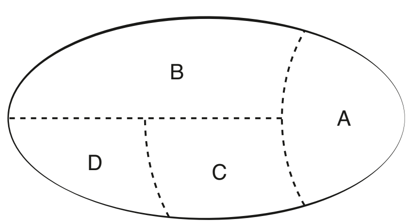
d) com quatro símbolos apresentam, pelo menos, três "•"?

21 Uma agência de turismo vende pacotes para as cidades históricas de Minas Gerais. O passageiro deve escolher entre o tipo de transporte (rodoviário ou aéreo) e a categoria do hotel em que se hospedará (turística, turística superior, primeira ou luxo). Opcionalmente, ele pode contratar um seguro-viagem entre as opções de plano: básico ou clássico.

a) De quantos modos distintos o pacote poderá ser contratado sem incluir o seguro-viagem?

b) De quantos modos distintos o pacote poderá ser contratado incluindo o seguro-viagem?

22 Um país é formado por quatro regiões **A**, **B**, **C** e **D**, como mostra o mapa seguinte:



Deseja-se colorir esse mapa de modo que regiões com uma fronteira comum tenham cores distintas.

Indique se as afirmações seguintes são verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**) e justifique as falsas.

a) É possível colorir o mapa usando apenas duas cores.

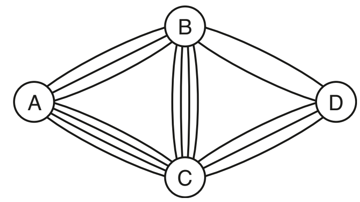
b) Usando quatro cores distintas, o número de maneiras de colorir o mapa é 24.

c) Com quatro cores disponíveis, o número máximo de possibilidades para colorir o mapa é 60.

d) Com 5 cores disponíveis, e colorindo **A** e **D** com a mesma cor, existem 60 maneiras distintas de colorir o mapa.

e) O número mínimo de cores necessárias para colorir o mapa é 3.

23 No esquema seguinte, **A**, **B**, **C** e **D** são cidades e as linhas representadas são estradas que ligam essas cidades.



De quantas formas distintas é possível ir de **A** até **D**, sem passar mais de uma vez pela mesma cidade?

24 Quantos divisores positivos tem o número:

a) 120? **b)** 3 780? **c)** $48^5 \cdot 15^6$?

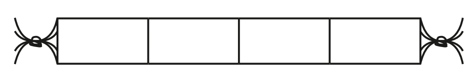
Sugestão: Faça a decomposição em fatores primos.

25 Responda:

a) O número $1\,125 \cdot 2^n$, com $n \in \mathbb{N}$, apresenta 84 divisores positivos. Qual é o valor de **n**?

b) Qual é o número de divisores positivos de $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot ... \cdot 18 \cdot 20$?

26 Uma pulseira de tecido será bordada com quatro faixas retangulares, como mostra a figura abaixo.



Há cinco cores de bordado disponíveis. De quantos modos distintos a pulseira poderá ser feita:

a) se não se pretende repetir cor alguma?

b) se retângulos "vizinhos" devem ser bordados com cores diferentes?

c) se o primeiro e o último retângulos forem bordados com a mesma cor e nos retângulos "do meio" forem usadas cores de bordado distintas entre si e também distintas da cor usada nas extremidades?

27 Para aumentar a segurança de suas operações via internet, o cliente de um banco deve digitar uma senha formada por 4 algarismos distintos. Uma vez que ela seja digitada corretamente, ele deverá digitar outra senha formada por duas letras (entre as 26 do alfabeto) seguidas de dois algarismos.

Suponha que o sistema não seja bloqueado após qualquer tentativa incorreta. Se, para testar cada possibilidade são gastos 30 segundos, qual seria o tempo máximo (em horas e minutos) gasto por uma pessoa (que não tem informação alguma sobre a senha) para ter acesso a uma determinada conta?

Fatorial de um número natural

Na resolução de problemas de contagem por meio do princípio multiplicativo (ou PFC) é comum aparecerem multiplicações envolvendo números naturais consecutivos, por exemplo: $26 \cdot 25 \cdot 24$; $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$; $7 \cdot 6 \cdot 5$ etc.

Muitas vezes é possível escrever multiplicações desse tipo de forma mais resumida. Para isso, vamos apresentar o fatorial de um número natural, que será útil na contagem dos agrupamentos que serão apresentados a seguir.

Dado um número natural **n**, definimos o **fatorial de n** (indicado por **n!**) por meio das relações:

Se $n = 0$, então $0! = 1$ (1)

Se $n = 1$, então $1! = 1$ (2)

Se $n \geqslant 2$, então $n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ (3)

Notemos que, em (3), o fatorial de **n** representa o produto dos **n** primeiros números naturais positivos. Um pouco mais à frente, você vai compreender a "conveniência" de se definir $0! = 1$ e $1! = 1$.

Assim, temos, por exemplo:

$2! = 2 \cdot 1 = 2$

$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

PENSE NISTO:

Se $n \in \mathbb{N}$, com $n \geqslant 2$, então o fatorial de **n** é um número par. Explique.

À medida que **n** aumenta, o cálculo de n! torna-se mais trabalhoso. Para ajudar, podemos utilizar a seguinte propriedade:

$$\boxed{n! = n \cdot (n - 1)!}, \ n \in \mathbb{N}^*$$

Veja estas simplificações:

- $6! = 6 \cdot \underbrace{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{5!} = 6 \cdot 5!$
- $5! = 5 \cdot \underbrace{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{4!} = 5 \cdot 4!$
- $9! = 9 \cdot \underbrace{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{8!} = 9 \cdot 8!$

  ou ainda $9 \cdot 8 \cdot \underbrace{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{7!} = 9 \cdot 8 \cdot 7!$

EXEMPLO 5

Para calcularmos o valor de $\frac{10!}{7!}$, podemos desenvolver o fatorial do número maior, 10, até chegarmos ao fatorial do menor, 7.

Temos:

$$\frac{10!}{7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!}} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

4 Resolva a equação $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 6$.

Solução:

Como $n + 1 > n - 1$, desenvolvemos o fatorial de $n + 1$ até chegarmos ao fatorial de $n - 1$:

$$\frac{(n+1) \cdot n \cdot \cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}} = 6 \Rightarrow n^2 + n - 6 = 0 \Rightarrow n = 2 \text{ ou } n = -3$$

Lembrando que só se define o fatorial de um número natural, concluímos que o único valor possível é $n = 2$; então $S = \{2\}$.

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

28 Calcule:

a) $6!$

b) $4!$

c) $0! + 1!$

d) $3! - 2!$

e) $7! - 5!$

f) $5 \cdot 3!$

29 Obtenha o valor de cada uma das expressões seguintes:

a) $\frac{8!}{6!}$

b) $\frac{9!}{10!}$

c) $\frac{3!}{4!} + \frac{4!}{5!}$

d) $\frac{7!}{5! \cdot 2!}$

e) $\frac{20!}{18! \cdot 2!}$

f) $\frac{8! \cdot 6!}{7! \cdot 7!}$

30 Efetue:

a) $\frac{11! + 9!}{10!}$

b) $17! - 17 \cdot 16!$

c) $\frac{40! - 39!}{41!}$

d) $\frac{(85!)^2}{86! \cdot 83!}$

31 Classifique como verdadeira (**V**) ou falsa (**F**) as seguintes afirmações, considerando que **a** e **b** são números naturais quaisquer.

a) $(a + b)! = a! + b!$

b) $(a - b)! = a! - b!$

c) $(2a)! = 2 \cdot a!$

d) $(a!)^2 = a! \cdot a!$

e) $(a \cdot b)! = a! \cdot b!$

32 Simplifique:

a) $\frac{(n+2)!}{(n+1)!}$

b) $\frac{(n-3)!}{(n-2)!}$

c) $\frac{(n+1)! + n!}{n!}$

d) $\frac{n! - (n-1)!}{(n-1)! + (n-2)!}$

33 Resolva as seguintes equações:

a) $(n + 2)! = 6 \cdot n!$

b) $n! = 120$

c) $\frac{n!}{(n-2)!} = 42$

d) $\frac{(n+2)! - (n+1)!}{n(n-1)!} = 25$

e) $(n - 5)! = 1$

f) $(n!)^2 - 100 \cdot n! = 2\,400$

34 (Enem-MEC) Um cliente de uma videolocadora tem o hábito de alugar dois filmes por vez. Quando os devolve, sempre pega outros dois filmes e assim sucessivamente. Ele soube que a videolocadora recebeu alguns lançamentos, sendo 8 filmes de ação, 5 de comédia e 3 de drama e, por isso, estabeleceu uma estratégia para ver todos esses 16 lançamentos. Inicialmente alugará, em cada vez, um filme de ação e um de comédia. Quando se esgotarem as possibilidades de comédia, o cliente alugará um filme de ação e um de drama, até que todos os lançamentos sejam vistos e sem que nenhum filme seja repetido.

De quantas formas distintas a estratégia desse cliente poderá ser posta em prática?

a) $20 \cdot 8! + (3!)^2$

b) $8! \cdot 5! \cdot 3!$

c) $\frac{8! \cdot 5! \cdot 3!}{2^8}$

d) $\frac{8! \cdot 5! \cdot 3!}{2^2}$

e) $\frac{16!}{2^8}$

Agrupamentos simples: permutações, arranjos e combinações

O princípio fundamental da contagem (PFC) é a principal técnica para resolução de problemas de contagem.

Vamos estudar a seguir as diferentes maneiras de formar um agrupamento e, por meio do PFC, desenvolver métodos de contagem para cada tipo de agrupamento.

Faremos, principalmente, o estudo dos **agrupamentos simples**, isto é, grupos de **k** elementos **distintos** escolhidos entre os **n** elementos de um conjunto, com $k \leq n$.

Estudaremos os seguintes agrupamentos simples: permutações, arranjos e combinações.

Permutações

Aline (**A**), Bia (**B**), Claudinha (**C**) e Diana (**D**) são alunas do 6º ano de um colégio e, na classe, ocupam a mesma fileira de quatro lugares. Elas vivem brigando por causa da posição em que cada uma quer sentar. Para resolver o problema, a professora sugeriu um rodízio completo das alunas na fileira, trocando a disposição todos os dias.

MASTERFILE/RADIUS IMAGES/LATINSTOCK

Quantos dias são necessários para esgotar todas as possibilidades de as quatro meninas se acomodarem nas quatro carteiras?

Inicialmente, vamos escrever todas as possibilidades de acomodação:

1ª	2ª	3ª	4ª
A	B	C	D
B	A	C	D
C	A	B	D
D	A	B	C

1ª	2ª	3ª	4ª
A	B	D	C
B	A	D	C
C	A	D	B
D	A	C	B

1ª	2ª	3ª	4ª
A	D	C	B
B	C	A	D
C	B	A	D
D	B	A	C

1ª	2ª	3ª	4ª
A	D	B	C
B	C	D	A
C	B	D	A
D	B	C	A

1ª	2ª	3ª	4ª
A	C	B	D
B	D	A	C
C	D	A	B
D	C	A	B

1ª	2ª	3ª	4ª
A	C	D	B
B	D	C	A
C	D	B	A
D	C	B	A

Observe que uma disposição difere das demais apenas pela ordem em que as quatro alunas vão se sentar nas quatro carteiras.

Assim, cada maneira de arrumar as meninas na fileira corresponde a um **agrupamento ordenado** (sequência) formado por quatro elementos.

Dizemos que cada disposição no quadro corresponde a uma **permutação** das quatro crianças.

Vamos usar o PFC para contar o número de possibilidades:

- Para ocupar a primeira carteira da fileira, há quatro opções.
- Definida a primeira posição, há três opções de escolha para a menina que vai sentar na segunda posição.
- Definidas a primeira e a segunda posições, há duas opções de escolha para a menina que vai sentar na terceira carteira.
- Escolhidas a primeira, a segunda e a terceira posições, a menina que vai sentar na última carteira fica determinada de maneira única.

Assim, há 24 possibilidades ($4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$).

Desse modo, são necessários 24 dias para esgotar todas as possibilidades de as quatro meninas se acomodarem na fileira.

Dados **n** elementos distintos, chama-se **permutação simples** ou simplesmente **permutação** todo **agrupamento ordenado** (sequência) formado por esses **n** elementos.

Cálculo do número de permutações

Sejam **n** elementos distintos e $\mathbf{P_n}$ o número de permutações possíveis desses **n** elementos.

Vamos contar o número de sequências formadas por **n** elementos:

- Para escolher o primeiro elemento da sequência temos **n** possibilidades.
- Para escolher o segundo elemento da sequência, uma vez definida a primeira posição, há $(n - 1)$ possibilidades.
- Definidos os dois primeiros elementos da sequência, podemos escolher o terceiro elemento de $(n - 2)$ maneiras.

  $\vdots$
- Escolhidos os $(n - 1)$ primeiros elementos da sequência, o elemento que irá ocupar a última posição na sequência fica determinado de maneira única.

Assim, pelo PFC:

$$P_n = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \text{, isto é, } \boxed{P_n = n!}$$

EXEMPLO 6

Um caso de agrupamento formado por permutação corresponde aos anagramas formados com as letras de uma palavra.

Utilizando todas as letras da palavra PRATO (**P**, **R**, **A**, **T**, **O**) e trocando-as de ordem, temos uma sequência de cinco letras que forma uma "palavra" com ou sem sentido. Cada "palavra" formada corresponde a um anagrama, como em: PROTA, ATORP, RAPTO, TROPA etc.

O número de anagramas formados é o número de permutações possíveis das letras **P**, **R**, **A**, **T**, **O**, a saber:

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

PENSE NISTO:

Como seria a representação dessas possibilidades em um diagrama da árvore?

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

5 Sejam os anagramas formados com as letras **G**, **R**, **A**, **N**, **I**, **Z**, **O**. Quantos começam e terminam por vogal?

Solução:

Para iniciar o anagrama, temos três possibilidades (**A**, **I**, **O**).

Definida a vogal do início, sobram duas opções para a vogal que irá ocupar a última letra do anagrama.

Definidas as duas extremidades, as outras cinco letras (uma vogal e quatro consoantes) podem ocupar qualquer posição no anagrama, num total de 120 possibilidades ($P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$).

O resultado procurado é, portanto, $3 \cdot 2 \cdot P_5 = 6 \cdot 120 = 720$.

6 Giba e Gina têm três filhos: Carla, Luís e Daniel. A família quer tirar uma foto de recordação de uma viagem na qual todos apareçam lado a lado.

GRAPHORAMA

a) De quantas formas distintas os membros da família podem se distribuir?

b) Em quantas possibilidades o casal aparece lado a lado?

Solução:

a) Cada forma de dispor as 5 pessoas lado a lado corresponde a uma permutação dessas 5 pessoas, uma vez que a sequência é formada por todos os membros da família.

O número de posições possíveis é, portanto, $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

b) Para que Giba e Gina apareçam juntos (lado a lado), podemos considerá-los como uma única pessoa que irá permutar com as outras três, num total de 24 possibilidades ($P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$).

Porém, para cada uma dessas 24 possibilidades, Giba e Gina podem trocar de lugar entre si, de 2 maneiras distintas ($P_2 = 2! = 2$).

Assim, o resultado procurado é $\underbrace{P_4}_{\text{entre os blocos}} \cdot \underbrace{P_2}_{\text{dentro do bloco}} = 24 \cdot 2 = 48$.

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

35 Determine o número de anagramas formados a partir de:

a) LUA
b) GATO
c) ESCOLA
d) REPÚBLICA
e) FESTA
f) PERNAMBUCO

36 Um dado foi lançado quatro vezes sucessivamente e as faces obtidas foram 2, 3, 5 e 6, não necessariamente nessa ordem. De quantas formas distintas pode ter ocorrido a sequência de resultados?

37 Considere os anagramas formados a partir de CONQUISTA.

a) Quantos são?

b) Quantos começam por vogal?

c) Quantos começam e terminam por consoante?

d) Quantos têm as letras CON juntas e nessa ordem?

e) Quantos apresentam a letra **C** antes da letra **A**?

f) Quantos apresentam as letras CON juntas, o mesmo ocorrendo com as letras QUIS e também com as letras TA?

38 Uma vez por ano, dona Fátima, que mora no Recife, visita parentes em Caruaru, João Pessoa, Petrolina, Maceió e Garanhuns.

a) De quantas formas distintas ela pode escolher a sequência de cidades a visitar?

b) De quantos modos diferentes a ordem das cidades pode ser definida se dona Fátima pretende encerrar as visitas em Petrolina?

39 Em uma mesma prateleira de uma estante há 10 livros distintos, sendo cinco de Álgebra, três de Geometria e dois de Trigonometria.

a) De quantos modos distintos podemos arrumar esses livros nessa prateleira, se desejamos que os livros de um mesmo assunto permaneçam juntos?

ALEX ARGOZINO

b) De quantos modos distintos podemos arrumar esses livros nessa prateleira de modo que nas extremidades apareçam livros de Álgebra e os livros de Trigonometria fiquem juntos?

40 Em uma turma de um curso de idiomas, o professor escolherá, semanalmente, um aluno para comentar o filme visto na semana. Ele tem como alunos quatro rapazes e três moças e cada aluno irá comentar apenas um filme.

a) Quantas semanas serão necessárias para que todos os alunos da turma sejam chamados?

b) De quantos modos distintos poderá ser estabelecida a ordem dos alunos para comentar os filmes?

c) De quantos modos distintos poderá ser estabelecida a ordem dos alunos se o professor escolher primeiro só as moças e depois os rapazes?

d) De quantos modos distintos poderá ser estabelecida a ordem dos alunos se o professor escolher os alunos alternadamente de acordo com o sexo?

41 Em quantos anagramas da palavra QUEIJO as vogais não aparecem todas juntas?

42 Resolva estas equações:

a) $P_n = 24$

b) $\dfrac{P_n}{P_{(n-2)}} = 506$

43 Permutando-se as letras **T**, **R**, **A**, **P**, **O**, **S**, são formados 720 anagramas. Esses anagramas são colocados em ordem alfabética.

a) Determine a posição da primeira "palavra" que começa por **R**.

b) Qual é a posição correspondente a PRATOS?

c) Que anagrama ocupa a 500ª posição?

44 Considerando os anagramas da palavra BRASIL, responda:

a) quantos começam por **B**?

b) quantos começam por **B** e terminam por **L**?

c) quantos começam por **B** ou terminam por **L**?

45 Seja o conjunto A = {p, q, r, s}. Determine o número de funções que podem ser definidas de **A** em **A**.

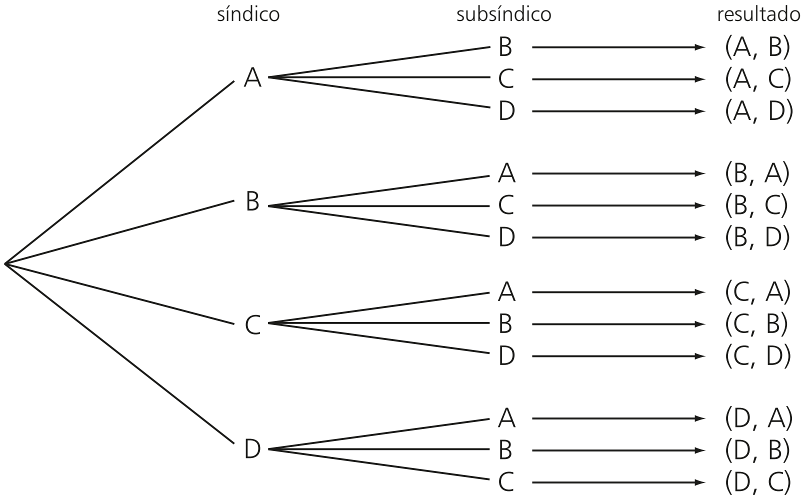
Arranjos

LETTERA STUDIO

Em uma reunião de um condomínio residencial, foi realizada uma votação para definir os cargos de síndico e subsíndico do prédio.

Quatro moradores, **A**, **B**, **C**, **D**, candidataram-se a ocupar esses cargos. De quantos modos distintos pode ocorrer o resultado dessa votação?

Façamos inicialmente uma representação de todas as possibilidades, usando o diagrama da árvore de possibilidades:



Observe que cada possibilidade acima representada corresponde a um **agrupamento ordenado** de duas pessoas escolhidas entre os quatro candidatos.

Note, por exemplo, que o par ordenado (A, B) é diferente do par ordenado (B, A), pois, na primeira situação, o síndico é **A** e o subsíndico é **B** e, na segunda situação, ocorre o contrário.

Dizemos que cada resultado da votação corresponde a um **arranjo** dos quatro elementos (candidatos) tomados dois a dois (isto é, escolhemos dois entre os quatro para formar o agrupamento ordenado).

Vamos, por meio do PFC, contar o número total de arranjos possíveis (indicaremos por $\mathbf{A}_{4,\,2}$):

- Para a escolha do síndico, há quatro possibilidades.
- Definido o síndico, sobram três opções para a escolha do cargo de subsíndico.

Assim, $A_{4,\,2} = 4 \cdot 3 = 12$.

Dado um conjunto com **n** elementos distintos, chama-se **arranjo** desses **n** elementos, tomados **k** a **k** (com $k \leq n$), qualquer agrupamento ordenado de **k** elementos distintos escolhidos entre os **n** existentes.

Contagem do número de arranjos

Dados **n** elementos distintos, vamos indicar por $\mathbf{A}_{n,\,k}$ o número de arranjos desses elementos, tomados **k** a **k**. Vamos usar o PFC:

- O 1º elemento da sequência pode ser escolhido de **n** formas possíveis.
- O 2º elemento da sequência pode ser escolhido de $(n - 1)$ maneiras distintas, pois já fizemos a escolha anterior e não há repetição de elementos.

- Feitas as duas primeiras escolhas, há $(n - 2)$ maneiras diferentes de escolher o 3º elemento da sequência, pois não pode haver repetição.

  ⋮

- Para escolher o k-ésimo elemento, a partir das $(k - 1)$ escolhas anteriores, sobram $n - (k - 1) = (n - k + 1)$ opções.

Assim, pelo PFC, a quantidade de arranjos possíveis (indicada por $\mathbf{A}_{n,\,k}$) é:

$$A_{n,\,k} = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot (n - k + 1) \quad (1)$$

Para obter uma expressão equivalente a (1) usando fatorial, basta multiplicar e dividir seu segundo membro por:

$(n - k) \cdot (n - k - 1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = (n - k)!$. De fato:

$$A_{n,\,k} = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot (n - k + 1) \cdot \frac{(n - k) \cdot (n - k - 1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n - k) \cdot (n - k - 1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Observe que o numerador da expressão acima corresponde a $n!$.

Assim:

$$A_{n,\,k} = \frac{n!}{(n - k)!} \quad (2)$$

Os problemas que envolvem contagem do número de arranjos podem ser resolvidos pelo PFC ou pela aplicação das fórmulas equivalentes (1) ou (2).

OBSERVAÇÃO

As permutações, estudadas a partir da página 235, podem ser consideradas arranjos.
Dados **n** elementos distintos, todo arranjo (agrupamento ordenado) formado exatamente por esses **n** elementos corresponde a uma permutação desses elementos.
Com efeito, fazendo $k = n$ na fórmula do arranjo, obtemos:

$$A_{n,\,n} = \frac{n!}{(n - n)!}, \text{ isto é, } P_n = \frac{n!}{0!} = n!$$

Nessa última expressão, note a "conveniência" de termos definido $0! = 1$.

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

7 Dado o conjunto das vogais $V = \{a, e, i, o, u\}$, determine a quantidade de arranjos que podemos formar com três elementos de **V**.

Solução:

Todo arranjo formado é um agrupamento ordenado de três elementos, escolhidos entre os cinco de **V**.

Alguns arranjos possíveis são: (a, e, i); (a, o, u); (e, a, i); (e, i, o); (u, o, i); (i, o, u) etc.

Façamos, então, essa contagem:

1º modo: Usando o PFC:

1ª letra da sequência	2ª letra da sequência	3ª letra da sequência
↓	↓	↓
5	4	3

Multiplicando as possibilidades, obtemos o número de arranjos: $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

2º modo: Usando uma das fórmulas:

1 $A_{\underset{n}{5},\ \underset{k}{3}} = \underset{n}{5} \cdot \underset{n-1}{4} \cdot \underset{n-k+1}{3} = 60$ ou 2 $A_{5,\ 3} = \dfrac{5!}{(5-3)!} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 60$

Observe, neste exercício, que um arranjo difere de outro pela natureza dos elementos escolhidos (letras) ou pela ordem dos elementos.

8 A senha de um cartão magnético bancário, usado para transações financeiras, é uma sequência de duas letras distintas (entre as 26 do alfabeto) seguida por uma sequência de três algarismos distintos. Quantas senhas podem ser criadas?

Solução:

Devemos determinar o número de sequências (agrupamentos ordenados) formadas por cinco elementos, sendo os dois primeiros letras distintas e os três últimos algarismos distintos.

Utilizemos o princípio multiplicativo:

letras		algarismos		
26	25	10	9	8

São possíveis 468 000 senhas (26 · 25 · 10 · 9 · 8 = 468 000).

Observe também que:

$$\underbrace{26 \cdot 25}_{A_{26,\ 2}} \cdot \underbrace{10 \cdot 9 \cdot 8}_{A_{10,\ 3}}$$

sequência de 2 letras distintas entre as 26 · sequência de 3 algarismos distintos entre os 10

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

46 Para ocupar os cargos de presidente e vice-presidente do grêmio de um colégio, candidataram-se dez alunos. De quantos modos distintos pode ser feita essa escolha?

47 A senha de acesso a uma rede de computadores é formada por uma sequência de quatro letras distintas seguida por dois algarismos distintos:

a) Quantas são as possíveis senhas de acesso?

b) Quantas senhas apresentam simultaneamente apenas consoantes e algarismos maiores que 5?

Considere as 26 letras do alfabeto.

48 Em uma pesquisa encomendada por uma operadora turística com o objetivo de descobrir os destinos nacionais mais cobiçados pelos brasileiros, o entrevistado deve escolher, em ordem de preferência, três destinos entre os dez apresentados pelo entrevistador. Um dos destinos apresentados é a cidade de Natal.

a) Quantas respostas diferentes podem ser obtidas?

b) Quantas respostas possíveis apresentam a cidade de Natal como destino preferido em 1º lugar?

c) Quantas respostas possíveis não contêm Natal entre os destinos mencionados?

49 A 1ª fase de um torneio de futebol é disputada por 15 equipes no sistema de turno e returno (a equipe **A**, por exemplo, joga com a equipe **B** duas vezes: uma em seu campo e a outra no campo adversário). Quantas partidas são disputadas ao todo, se os dois mais bem classificados da 1ª fase fazem a final no mesmo sistema?

50 Para a eleição do corpo dirigente de uma empresa, oito pessoas são pré-selecionadas. De quantas maneiras distintas poderão ser escolhidos o presidente, o vice-presidente e o diretor financeiro, se apenas dois deles têm conhecimentos para assumir a diretoria financeira?

51 Uma empresa distribui a seus funcionários um questionário constituído de duas partes. Na primeira, o funcionário deve colocar a ordem de preferência de turno de trabalho: matutino, vespertino ou noturno. Na segunda, o funcionário deve escolher, em ordem de preferência, dois dos sete dias da semana para folgar. De quantas maneiras distintas um funcionário poderá preencher esse questionário?

52 Em uma final de uma prova de natação participam cinco atletas europeus, dois norte-americanos e um brasileiro.

a) De quantos modos distintos poderão ser distribuídas as medalhas de ouro, prata e bronze?

b) Em quantos resultados só aparecem atletas europeus nas três primeiras posições?

c) Em quantos resultados o atleta brasileiro recebe medalha?

d) Supondo que o atleta brasileiro não recebeu medalha, determine o número de resultados em que há mais atletas europeus do que norte-americanos no pódio.

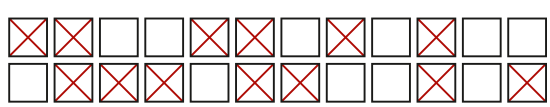
53 Para compor as equipes para uma competição entre escolas, o professor de Educação Física de um colégio precisa definir a última vaga das seleções de vôlei, basquete e futebol, entre dez garotos que restaram. Oito deles competem nas três modalidades e os demais só jogam futebol. De quantas formas distintas o professor pode completar as três equipes?

54 Seis amigos participam de uma brincadeira de futebol, que consiste em cobrança de pênaltis. Cada um escolhe, de todos os modos possíveis, um colega para bater o pênalti e outro para tentar defendê-lo.

a) Quantas cobranças de pênalti são feitas nessa brincadeira, incluindo as repetições?

b) Quantas cobranças haveria se o grupo resolvesse convidar um sétimo amigo para que ele escolhesse, de todos os modos possíveis, o cobrador e o defensor dos pênaltis?

55 A sessão de um filme já havia começado quando duas pessoas que não se conhecem entram na sala. Elas percebem que só há lugares vagos nas duas primeiras fileiras, abaixo representadas (o × indica que o lugar está ocupado).



a) De quantas maneiras distintas elas poderão se acomodar?

b) De quantas maneiras distintas elas poderão sentar lado a lado?

c) De quantas maneiras distintas elas poderão sentar em uma mesma fileira?

56 Um baralho comum é composto de 52 cartas, sendo 13 de cada naipe. Os naipes são: copas ♥, ouros ♦, espadas ♠ e paus ♣; e as cartas, para cada naipe, são: **A** (ás), 2, 3, ..., 10, **J** (valete), **Q** (dama) e **K** (rei).

As cartas de um baralho comum foram distribuídas em duas caixas da seguinte maneira: Na caixa **X**, foram colocadas todas as cartas de ouros e de paus e na caixa **Y**, todas as cartas de espadas e de copas. Deseja-se retirar, ao acaso, sucessivamente e sem reposição, 3 cartas da caixa **X** e, em seguida, 2 cartas da caixa **Y**. As cinco cartas retiradas formam, na ordem em que foram extraídas, uma sequência.

a) Quantas sequências distintas de 5 cartas podem ser obtidas?

b) Em quantas sequências distintas aparecem os 4 ases e 1 rei?

c) Em quantas sequências distintas aparecem os 4 ases?

Combinações

Quando termina o treino, Jaqueline costuma tomar uma vitamina com leite na lanchonete da academia. Numa tarde, a lanchonete dispunha das seguintes frutas: abacate, mamão, banana, maçã, morango e laranja. De quantas maneiras distintas Jaqueline pode pedir sua vitamina misturando exatamente duas dessas frutas?

Vamos representar, uma a uma, as possibilidades de mistura:

mamão e banana	maçã e morango	abacate e mamão
mamão e maçã	maçã e laranja	abacate e banana
mamão e morango	banana e morango	abacate e maçã
mamão e laranja	banana e laranja	abacate e morango
banana e maçã	morango e laranja	abacate e laranja


ALAMY/FOTOARENA

As frutas fazem parte de um cardápio saudável.

Observe que escolher, por exemplo, mamão e laranja, nessa ordem, é o mesmo que escolher laranja e mamão, nessa ordem, pois, para determinar o sabor da vitamina, não importa a ordem em que as frutas sejam escolhidas.

Assim, cada escolha que Jaqueline poderá fazer consiste em um **agrupamento não ordenado** de duas frutas escolhidas entre as seis disponíveis. Dizemos que cada uma das possibilidades anteriores é uma **combinação** das seis frutas tomadas duas a duas, isto é, um **subconjunto** formado por dois elementos (frutas) escolhidos entre seis (frutas) disponíveis.

É usual representar as combinações entre chaves — { } —, assim como fazemos com conjuntos.

Como podemos contar o número de combinações dessas frutas?

Inicialmente, podemos usar o PFC para contar o número de agrupamentos ordenados de duas frutas:

$$\underset{\text{1ª fruta}}{\underset{\uparrow}{6}} \cdot \underset{\text{2ª fruta}}{\underset{\uparrow}{5}} = 30$$

Esse cálculo inclui escolhas repetidas, pois sabemos que a ordem de escolha das frutas não importa. Por exemplo, estão incluídas as opções mamão com laranja e laranja com mamão, banana com maçã e maçã com banana etc.

O número de ordens possíveis em que duas determinadas frutas podem ser escolhidas é:

$$2 \cdot 1 = 2 = P_2$$

Assim, como cada escolha foi contada duas vezes, o número de combinações possíveis é $\frac{30}{2} = 15$.

Observe, nesse caso, que uma combinação difere das demais apenas pela natureza dos elementos escolhidos (frutas).

Suponha, agora, que Jaqueline quisesse misturar exatamente três frutas na sua vitamina. Quantas possibilidades ela teria?

Inicialmente, notamos que cada escolha consiste em um agrupamento não ordenado (combinação) de três frutas escolhidas entre seis.

Observe alguns subconjuntos de três elementos que podemos formar: {banana, mamão, maçã}; {mamão, abacate, laranja}; {laranja, banana, mamão} etc.

Vamos fazer a contagem do número de combinações.

Primeiro, usamos o PFC para contar o número de agrupamentos ordenados de três frutas:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ 1^{\text{a}}\text{ fruta}}}{6} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ 2^{\text{a}}\text{ fruta}}}{5} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ 3^{\text{a}}\text{ fruta}}}{4} = 120$$

Como a ordem não importa, é preciso saber quantas vezes uma mesma vitamina foi contada nesse cálculo.

Imaginemos uma possível escolha: mamão (**M**), banana (**B**) e laranja (**L**).

Pelo PFC, o número de sequências formadas por essas três frutas é: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, que são as **permutações** possíveis de **M**, **B** e **L**:

(M, B, L), (M, L, B), (L, B, M), (L, M, B), (B, L, M) e (B, M, L)

Como as seis permutações desses elementos determinam uma mesma vitamina, concluímos que o número de combinações pedido é $\frac{120}{6} = 20$.

Dados **n** elementos distintos, chama-se **combinação** desses **n** elementos tomados **k** a **k** (com $k \leqslant n$) qualquer **subconjunto** formado por **k** elementos distintos, escolhidos entre os **n**.

Contagem do número de combinações

Sejam **n** elementos distintos.

Vamos encontrar um método, baseado nos exemplos anteriores, para contar o número de combinações desses **n** elementos tomados **k** a **k** (com $k \leqslant n$). Indicaremos esse número por $C_{n,\,k}$ ou por $\binom{n}{k}$.

- Usamos o PFC para contar o número de agrupamentos ordenados (arranjos) formado por **k** elementos distintos, escolhidos entre os **n** elementos disponíveis:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot [n-(k-1)] = A_{n,\,k}$$

- Usamos o PFC para contar o número de sequências distintas (ordens) que podem ser formadas com os **k** elementos escolhidos (permutações de **k** elementos):

$$k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = P_k = k!$$

- Como qualquer permutação desses **k** elementos dá origem a uma única combinação, o número de combinações dos **n** elementos tomados **k** a **k** é:

$$C_{n,\,k} = \frac{A_{n,\,k}}{P_k} \Rightarrow \boxed{C_{n,\,k} = \frac{A_{n,\,k}}{k!}}$$

Aplicando a fórmula do arranjo, obtemos:

$$C_{n,\,k} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} \Rightarrow \boxed{C_{n,\,k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}}$$

OBSERVAÇÕES

- Se k = 1, o número de combinações de **n** elementos distintos, tomados um a um, é igual a **n**, pois corresponde ao número de subconjuntos que podem ser formados com exatamente um elemento escolhido entre os **n** elementos. De fato:

$$C_{n,\,1} = \binom{n}{1} = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} = \frac{n \cdot \cancel{(n-1)!}}{1!\,\cancel{(n-1)!}} = \frac{n}{1!} = n$$

Note, nesse caso, a "conveniência" de termos definido 1! = 1.

- Se k = n, o número de combinações de **n** (com n ⩾ 1) elementos distintos, tomados **n** a **n**, é igual a 1. De fato:

$$C_{n,\,n} = \binom{n}{n} = \frac{n!}{n! \cdot (n-n)!} = \frac{\cancel{n!}}{\cancel{n!} \cdot 0!} = \frac{1}{0!} = 1$$

Observe, novamente, a "conveniência" da definição especial 0! = 1.

- Observe que $C_{n,\,p} = C_{n,\,n-p}$ ou $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$:

$$C_{n,\,p} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!} = \frac{n!}{\underbrace{[n-(n-p)]}_{=\,p}! \cdot (n-p)!} = C_{n,\,n-p}$$

Assim, temos:

$$C_{6,\,4} = C_{6,\,2};\quad C_{10,\,3} = C_{10,\,7};\quad \binom{11}{5} = \binom{11}{6} \text{ etc.}$$

PENSE NISTO:

Como você explica, por meio das noções de conjuntos, que $C_{n,\,n} = 1$?

PENSE NISTO:

Em um grupo formado por cinco pessoas, a quantidade de duplas (não ordenadas) que podemos formar é igual à quantidade de trios (não ordenadas)? Por quê?

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

9 Em uma classe de 30 alunos pretende-se formar uma comissão de três alunos para representação discente no colégio. Quantas comissões distintas podem ser formadas?

Solução:

Cada comissão corresponde a uma combinação dos 30 alunos, tomados 3 a 3, uma vez que não importa a ordem de escolha dos alunos.

Para contar as possibilidades, podemos ou não usar a fórmula.

1º modo: Sem a fórmula

- Contamos, inicialmente, o número de maneiras de escolher 3 alunos entre os 30, levando em conta a ordem de escolha:

$$30 \cdot 29 \cdot 28$$

- Como a ordem não importa, determinamos o número de ordens possíveis para escolher três determinados alunos:

$$3 \cdot 2 \cdot 1 \text{ (ou } P_3 = 3!)$$

Assim, o número de combinações é $\frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4060$.

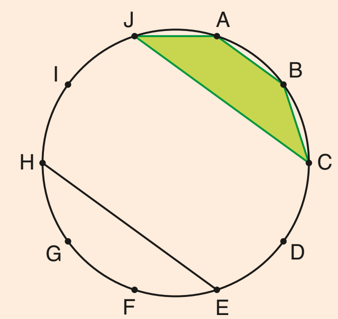
2º modo: Com a fórmula

$$C_{30,\,3} = \binom{30}{3} = \frac{30!}{(30-3)! \cdot 3!} = \frac{30!}{27! \cdot 3!} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot \cancel{27!}}{\cancel{27!} \cdot 6} = 4060$$

10 Sobre uma circunferência marcam-se dez pontos distintos.

a) Quantos segmentos de reta podem ser construídos com extremidades em dois desses pontos?

b) Quantos quadriláteros convexos podem ser construídos com vértices em quatro desses pontos?



Solução:

a) Observe que escolher **H** e **E**, nessa ordem, é o mesmo que escolher **E** e **H**, nessa ordem, pois o segmento de reta formado será o mesmo.

Assim, devemos contar o número de agrupamentos não ordenados formados por dois desses dez pontos, a saber:

$$C_{10,\,2} = \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} = 45 \quad \text{ou} \quad C_{10,\,2} = \binom{10}{2} = \frac{10!}{2!\,8!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot \cancel{8!}}{2 \cdot \cancel{8!}} = 45$$

b) Observe, por exemplo, que a ordem de escolha dos pontos **A**, **B**, **C** e **J** não importa, pois o quadrilátero convexo formado por esses pontos continuará sendo o mesmo.

Assim, devemos escolher, sem importar a ordem, quatro dos dez pontos:

$$C_{10,\,4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210 \quad \text{ou} \quad C_{10,\,4} = \binom{10}{4} = \frac{10!}{4!\,6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \cancel{6!}} = 210$$

11 Nove funcionários de uma grande empresa (5 mulheres e 4 homens) foram participar das gravações para uma campanha publicitária. Chegando ao local da filmagem, foram informados de que, na cena que seria gravada, deveriam aparecer apenas quatro pessoas, sendo 2 homens e 2 mulheres.

De quantas maneiras distintas poderão ser escolhidos os quatro funcionários?

Solução:

As 5 mulheres podem ser representadas por $\mathbf{M_1}$, $\mathbf{M_2}$, $\mathbf{M_3}$, $\mathbf{M_4}$ e $\mathbf{M_5}$, e os 4 homens, por $\mathbf{H_1}$, $\mathbf{H_2}$, $\mathbf{H_3}$ e $\mathbf{H_4}$.

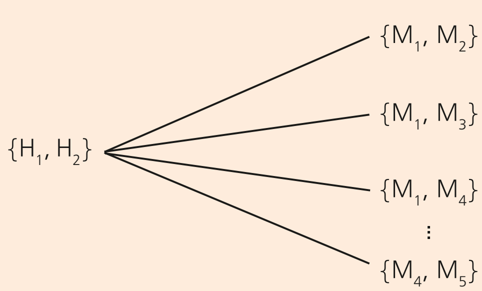
- Para escolher os dois funcionários homens, temos: $C_{4,\,2} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6$, ou seja, 6 possibilidades, abaixo destacadas:

$$\{H_1, H_2\}, \{H_1, H_3\}, \{H_1, H_4\}, \{H_2, H_3\}, \{H_2, H_4\} \text{ e } \{H_3, H_4\}$$

- Para escolher as duas funcionárias, temos: $C_{5,\,2} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$, ou seja, 10 possibilidades:

$\{M_1, M_2\}$, $\{M_1, M_3\}$, $\{M_1, M_4\}$, $\{M_1, M_5\}$, $\{M_2, M_3\}$, $\{M_2, M_4\}$, $\{M_2, M_5\}$, $\{M_3, M_4\}$, $\{M_3, M_5\}$ e $\{M_4, M_5\}$

Observe, por exemplo, a dupla masculina $\{H_1, H_2\}$; eles poderão se juntar a qualquer uma das dez duplas femininas:



Para a próxima dupla masculina listada $\{H_1, H_3\}$, temos, novamente, dez possibilidades de composição.

Enfim, para cada uma das 6 duplas masculinas, o número de possibilidades de composição com as duplas femininas é 10. Assim, o resultado procurado é:

$$\underbrace{6}_{C_{4,\,2}} \cdot \underbrace{10}_{C_{5,\,2}} = 60$$

12 Uma locadora de automóveis tem à disposição de seus clientes uma frota de dezesseis carros nacionais e quatro carros importados, todos distintos. De quantas formas uma empresa poderá alugar três carros, de modo que pelo menos um carro nacional seja escolhido?

Solução:

1º modo:

Podemos ter um, dois ou três carros nacionais.

- Com um carro nacional e dois importados, o número de opções é $16 \cdot \binom{4}{2} = 16 \cdot 6 = 96$.
- Com dois carros nacionais e um importado, o número de opções é $\binom{16}{2} \cdot 4 = 120 \cdot 4 = 480$.
- Com os três carros nacionais, o número de opções é $\binom{16}{3} = 560$.

Assim, ao todo, o número de possibilidades é $96 + 480 + 560 = 1\,136$.

2º modo:

- O número de maneiras de a empresa alugar três carros quaisquer é $\binom{20}{3} = 1\,140$.
- O número de possibilidades de a empresa só alugar carros importados é $\binom{4}{3} = 4$.

Assim, a diferença $\binom{20}{3} - \binom{4}{3} = 1\,140 - 4 = 1\,136$ fornece o número de escolhas em que pelo menos um carro é nacional.

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

57 De quantos modos distintos Lucas pode escolher quatro entre as nove camisetas regata que possui para levar em uma viagem?

58 Um curso de idiomas oferece turmas para iniciantes em inglês, espanhol, alemão, italiano e japonês.

a) De quantas formas distintas um estudante pode se matricular em três desses cursos?

b) De quantas formas distintas ele poderá se matricular em três desses cursos, incluindo obrigatoriamente o de inglês?

59 Em um grupo de 6 pessoas, a quantidade de duplas que podem ser formadas é maior, menor ou igual à quantidade de quartetos que podem ser formados? Compare também a quantidade de duplas com a de trios.

60 Sobre uma circunferência marcam-se dez pontos.

a) Quantos triângulos podemos construir com vértices em três desses pontos?

b) Quantos pentágonos convexos podemos construir com vértices em cinco desses pontos?

c) Considere o decágono convexo cujos vértices são os pontos assinalados sobre essa circunferência. Qual é o número de diagonais que esse polígono possui?

61 Uma junta médica deverá ser formada por quatro médicos e dois enfermeiros. De quantas maneiras ela poderá ser formada se estão disponíveis dez médicos e seis enfermeiros?

62 Uma equipe de dez pesquisadores é formada por sete brasileiros e três estrangeiros. Para apresentar um projeto a uma empresa, será necessário escolher cinco pesquisadores, dos quais no mínimo um deve ser estrangeiro. De quantas formas distintas poderá ser feita essa escolha?

Para resolver os exercícios 63 a 65, reveja, se necessário, o enunciado do exercício 56.

63 Escolhendo-se simultaneamente quatro cartas de um baralho comum, determine:

a) o número de maneiras distintas de escolher as quatro cartas;

b) de quantas formas distintas é possível escolher as quatro cartas de copas;

c) de quantos modos distintos é possível escolher quatro ases.

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

64 Duas cartas são sorteadas, de uma só vez, de um baralho comum. Determine o número de maneiras possíveis de ocorrer um resultado formado por:

a) um rei e uma rainha;

b) duas cartas de copas;

c) uma carta de copas e outra de ouros;

d) dois ases;

e) cartas de naipes distintos.

65 De quantas maneiras distintas poderão ser sorteadas simultaneamente cinco cartas de um baralho de modo que o resultado do sorteio contenha:

a) três cartas de paus e duas de espadas?

b) o rei de ouros?

c) exatamente dois valetes?

d) pelo menos três valetes?

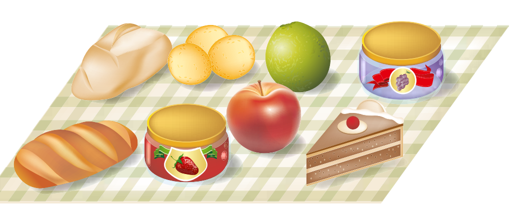
66 Um casal de Curitiba decidiu que a viagem de lua de mel seria feita pelo Nordeste, visitando exatamente três das nove capitais.

a) De quantos modos distintos poderiam ser escolhidas as três capitais, sem levar em consideração a ordem de visita?

b) Se o casal pretendesse conhecer obrigatoriamente Salvador, de quantos modos poderia ser feita a escolha?

c) Se, por motivos logísticos, Fortaleza só pudesse ser visitada se São Luís também o fosse e vice-versa, determine de quantas maneiras a escolha poderá ser feita.

67 Para montar uma cesta de café da manhã, estão disponíveis os seguintes itens: quatro tipos de pão, três tipos de queijo, três tipos de fruta, cinco sabores de geleia e quatro sabores de torta doce. De quantos modos distintos a cesta poderá ser montada se um cliente pedir dois tipos de pão, um tipo de queijo, duas frutas, dois sabores de geleia e uma torta doce?



ALEX ARGOZINO

68 Marcam-se cinco pontos distintos sobre uma reta **r**. Sobre outra reta **s**, paralela (e distinta) a **r**, marcam-se mais quatro pontos distintos.

a) Quantos triângulos podem ser formados com vértices em três quaisquer desses pontos?

b) Quantos quadriláteros convexos podem ser formados com vértices em quatro quaisquer desses pontos?

69 Para montar o seu enxoval, Priscila foi a uma loja onde a vendedora lhe mostrou 7 jogos de cama, 8 jogos de banho e **n** jogos de mesa. Priscila achou que seria suficiente comprar dois jogos de cama, dois de mesa e quatro de banho. Nessas condições, Priscila escolheu uma entre as 66 150 possibilidades de compra de seu enxoval. Qual é o valor de **n**?

70 Faça o que se pede:

a) Em uma reunião havia 50 pessoas. Cada uma cumprimentou todas as outras uma única vez. Quantas saudações foram dadas nessa reunião?

b) Generalize o item *a*, supondo que havia **n** pessoas na reunião.

c) Em uma reunião social, cada pessoa cumprimentou todas as outras uma única vez com um aperto de mão. Sabendo que foram dados 741 apertos de mão no total, determine o número de pessoas presentes à reunião.

71 (Obmep) Em uma Olimpíada de Matemática, foram distribuídas várias medalhas de ouro, várias de prata e várias de bronze. Cada participante premiado pôde receber uma única medalha. Aldo, Beto, Carlos, Diego e Elvis participaram dessa olimpíada e apenas dois deles foram premiados.

ILUSTRAÇÃO EXTRAÍDA DA PROVA DA OBMEP ANO 2015, 1ª FASE, NÍVEL 3.

De quantas formas diferentes pode ter acontecido essa premiação?

a) 20 **c)** 60 **e)** 120

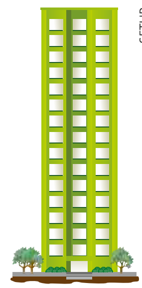
b) 30 **d)** 90

72 No grêmio de uma universidade serão realizadas eleições para os cargos de presidente, vice-presidente, tesoureiro e 4 conselheiros. Determine o número de maneiras distintas de ocorrer o resultado dessa eleição, sabendo que 14 alunos candidataram-se para ocupar qualquer um dos cargos e que todos os conselheiros eleitos terão a mesma função.

73 Qual é o número de peças de um jogo de dominó comum (números de 0 a 6)?

ALEX ARGOZINO

74 A frente de um prédio comercial de 15 andares possui 45 janelas idênticas, cada uma correspondendo a uma sala comercial, como mostra a figura ao lado.


SETUP

De madrugada, o porteiro do prédio verificou, no seu painel de controle, que em seis salas da frente as luzes haviam ficado acesas.

a) Determine o número de maneiras distintas de se ter seis salas com as luzes acesas.

b) Determine o número de maneiras distintas de se ter seis salas com as luzes acesas, sendo três em um andar e três em outro andar.

c) Determine o número de maneiras distintas de se ter seis salas com as luzes acesas, sendo duas em um andar, duas em outro e duas em um andar diferente dos anteriores.

75 Uma organização beneficente pré-seleciona, todo mês, 10 tipos de produto de uma lista de 15, para montar uma cesta básica que será distribuída às famílias carentes de certa região.
Para cada tipo de produto, a organização tem 5 possíveis fornecedores dos quais serão escolhidos 2.
De quantos modos distintos essa organização pode adquirir a cesta básica em um determinado mês? Não é necessário efetuar todos os cálculos, deixe-os indicados.

76 Uma livraria promoveu uma liquidação, colocando à venda 45 livros, todos distintos, sendo 20 livros ao preço de R$ 15,00 cada, 15 livros ao preço de R$ 20,00 cada e 10 livros ao preço unitário de R$ 10,00. Emília foi à livraria durante a liquidação, pretendendo gastar a exata quantia de R$ 50,00. De quantos modos distintos Emília poderá escolher os livros que irá comprar?

Permutações com elementos repetidos

Estudamos, até aqui, os agrupamentos simples, isto é, aqueles formados por elementos distintos. Vamos agora estudar as permutações com elementos repetidos, cujas técnicas de contagem estão baseadas em estratégias já estudadas na contagem dos agrupamentos simples.

1º caso: Apenas um elemento se repete


THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Um dado é lançado sete vezes sucessivamente. De quantas formas distintas pode ser obtida uma sequência com quatro faces iguais a 1 e as demais faces iguais a 2, 5 e 6?

- Vamos escolher, de início, as posições (correspondentes à ordem dos lançamentos) que as faces 2, 5 e 6 podem ocupar.

  Para fixar ideias, veja o esquema seguinte, em que está representada uma possível ocorrência de posições:

		2	6			5	Nas posições vazias estão as faces iguais a 1.
1º lançamento	2º lançamento	3º lançamento	4º lançamento		...	7º lançamento	

  Observe que, fixadas as posições das faces 2, 6 e 5, as posições das faces iguais a 1 ficam determinadas de maneira única, uma vez que qualquer permutação de faces 1 gera a mesma sequência.

  Trata-se, então, de escolher três entre sete posições. Isso pode ser feito de 35 maneiras distintas ($C_{7,\,3} = 35$).

- Para a escolha anterior (3º, 4º e 7º lançamentos), as faces 2, 5 e 6 podem trocar de lugar entre si, num total de 6 maneiras distintas ($P_3 = 3! = 6$).

Os passos anteriores sugerem que o número de sequências possíveis seja dado por:

$$C_{7,\,3} \cdot P_3 = \frac{7!}{\cancel{3!}\,4!} \cdot \cancel{3!} = \frac{7!}{4!} \begin{array}{l} \leftarrow \text{7 é o número total de lançamentos} \\ \leftarrow \text{4 é o número de vezes que a face 1 ocorre} \end{array}$$

Indicaremos esse número por $P_7^{(4)}$.

Seguindo o mesmo raciocínio, podemos obter o número de anagramas formados a partir de CASAL. Cada anagrama formado é uma sequência de cinco letras, das quais duas são iguais a **A**.

O total de anagramas é $P_5^{(2)} = \frac{5!}{2!} = 60$.

Já em VENEZUELA, há nove letras, das quais três são iguais a **E**. Então, o número de anagramas possíveis é:

$$P_9^{(3)} = \frac{9!}{3!} = 60\,480$$

2º caso: Dois elementos diferentes se repetem

Suponha, agora, que um dado seja lançado nove vezes sucessivamente. De quantas formas distintas pode ser obtida uma sequência com quatro faces iguais a 1, duas faces iguais a 3 e as demais faces iguais a 2, 5 e 6?

- Inicialmente, vamos determinar as possíveis posições em que as faces distintas de 1 podem ocorrer. Há 126 possibilidades ($C_{9,\,5} = 126$), pois devem ser escolhidas cinco entre nove posições.

Acompanhe a seguir uma possível escolha.

1º lançamento	2º lançamento							9º lançamento
	3		2	3		5		6

As quatro faces 1 entram nas posições vazias.

- Para tal escolha de lugares (2º, 4º, 5º, 7º e 9º lançamentos), as faces 2 (uma vez), 3 (duas vezes), 5 (uma vez) e 6 (uma vez) podem trocar de lugar entre si. Usando o resultado obtido no 1º caso, sabemos que o número de possibilidades é $P_5^{(2)} = \frac{5!}{2!}$.

Assim, reunindo os dois passos anteriores, concluímos que o número de permutações possíveis é dado por:

$$C_{9,\,5} \cdot P_5^{(2)} = \frac{9!}{\cancel{5!}\,4!} \cdot \frac{\cancel{5!}}{2!} = \frac{9!}{\underset{\uparrow}{4!}\,2!} \begin{array}{l} \leftarrow \text{9 é o número total de lançamentos} \\ \leftarrow \text{2 é o número de faces iguais a 3} \end{array}$$

4 é o número de faces iguais a 1

Indicaremos por $P_9^{(4,\,2)}$.

Para obter o número de anagramas formados a partir de BANANA, seguimos o mesmo raciocínio: são seis letras, das quais três são **A** e duas são **N**. Então, o total de anagramas é:

$$P_6^{(3,\,2)} = \frac{6!}{3!\,2!} = 60$$

Caso geral

Dados **n** elementos, dos quais $\mathbf{n_1}$ são iguais a $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{n_2}$ são iguais a $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{n_3}$ são iguais a $\mathbf{a_3}$, ..., $\mathbf{n_r}$ são iguais a $\mathbf{a_r}$ (em que $n_1 + n_2 + ... + n_r = n$), o número de permutações desses **n** elementos é dado por:

$$P_n^{(n_1,\, n_2,\, ...,\, n_r)} = \frac{n!}{n_1!\, n_2!\, ...\, n_r!}$$

Para determinarmos o número de anagramas formados a partir de CACHORRO, observamos que há oito letras, das quais duas são iguais a **C**, duas são iguais a **O**, duas são iguais a **R**, além de uma letra **A** e uma letra **H**. Temos, então, o seguinte número de anagramas:

$$P_8^{(2,\,2,\,2,\,1,\,1)} = P_8^{(2,\,2,\,2)} = \frac{8!}{2!\,2!\,2!} = 5\,040$$

EXEMPLO 7

Um casal tem cinco filhos; três meninos e duas meninas. De quantos modos distintos poderia ter ocorrido a ordem dos nascimentos dos filhos?

Representando o sexo dos filhos por **M** (masculino) e **F** (feminino), devemos permutar cinco letras, das quais três são **M** e duas são **F**. Assim, o número de possibilidades é:

$$P_5^{(3,\,2)} = \frac{5!}{3!\,2!} = 10$$

Observe, a seguir, algumas possibilidades:

(M, M, M, F, F), (M, F, M, F, M), (F, M, M, M, F), ...

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

77 Desconsiderando o acento gráfico, determine o número de anagramas formados a partir de:

a) MORANGO
b) FALTA
c) OURO
d) PANAMÁ
e) ACADEMIA
f) MATEMÁTICA
g) SOSSEGADO
h) COPACABANA
i) PROBABILIDADE

78 Um dado é lançado quatro vezes sucessivamente. Determine o número de sequências de resultados em que:

a) as quatro faces são iguais a 5;
b) três faces são iguais a 2 e uma face é igual a 4;
c) duas faces são iguais a 3, uma face é 4 e outra é 5.

79 Permutando os algarismos 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3 e 4, quantos números de 10 algarismos podemos formar?

80 Considere os anagramas formados a partir de PIRATARIA.

a) Quantos são?
b) Quantos começam pela letra **A**?
c) Quantos começam por vogal?
d) Quantos começam e terminam por vogal?

81 Permutando-se duas letras iguais a **A** e **n** letras iguais a **B** podem ser obtidos 21 anagramas. Qual é o valor de **n**?

82 Um dado é lançado três vezes sucessivamente. Quantas sequências de resultados apresentam soma dos pontos:

a) menor que 8?
b) maior que 13?

83 Um robô se encontra no ponto P(8, 10) de um sistema de eixos coordenados e quer chegar à origem (0, 0). Sabe-se que ele foi programado para dar um passo de uma unidade de medida de comprimento por vez, para a esquerda ou para baixo. Quantos caminhos distintos podem conduzi-lo à origem?

DESAFIO

Três professores foram pré-selecionados para realizar quatro apresentações diferentes na semana pedagógica de um colégio.

Cada apresentação será atribuída a um único professor e todos os professores pré-selecionados devem, obrigatoriamente, fazer ao menos uma apresentação.

De quantos modos distintos podem ser atribuídas as apresentações?