CAPÍTULO 11

Probabilidade

Experimentos aleatórios

Todas as quartas-feiras e sábados, um banco estatal federal promove o sorteio dos números — aqui chamados dezenas — da Mega-Sena. Nela você pode escolher de 6 (aposta mínima) a 15 números (aposta máxima), dentre os 60 disponíveis. O resultado do sorteio consiste em 6 dezenas e você recebe prêmios, em dinheiro, ao acertar 4, 5 ou as 6 dezenas sorteadas – este último prêmio por acertar a sena é o sonho de milhões de brasileiros que lotam as casas lotéricas para fazer suas apostas. O brasileiro sabe, ainda que intuitivamente, que as chances de ele ganhar são muito pequenas. Mas, afinal, qual é essa chance?

Ao longo deste capítulo você saberá a resposta e terá a oportunidade de ler mais sobre a Mega-Sena, na seção *Troque ideias*, na página 275.

O sorteio das dezenas da Mega-Sena é um exemplo do que denominamos **experimento aleatório**: mesmo repetido um grande número de vezes (até janeiro de 2016 já haviam ocorrido mais de 1 780 sorteios), em condições idênticas, não é possível prever, entre os resultados possíveis, aquele que irá ocorrer. O resultado do sorteio depende exclusivamente do **acaso**. Dizemos que se trata de um **experimento de natureza aleatória** (ou **casual**).

Suponha, agora, que um dado não viciado (ou honesto) seja lançado. Não é possível dizer, com certeza, qual número será obtido na face superior. Pode ser 1, 2, 3, 4, 5 ou 6. Trata-se, também, de um experimento aleatório cujo resultado, entre os possíveis, não pode ser previsto com certeza.

Podemos citar vários outros experimentos de natureza aleatória:

- lançamento de uma moeda não viciada, em que se observa a face obtida;
- extração de uma carta de um baralho comum, em que se observa o naipe da carta;
- extração, ao acaso, de uma bola de uma caixa que contém 40 bolas de mesmo tamanho, sendo 25 pretas e 15 brancas, em que se observa a cor da bola;
- sorteio dos cinco algarismos que formam o número premiado na Loteria Federal.

SHUTTERSTOCK

A teoria da probabilidade permite que se façam **previsões** sobre as chances de um acontecimento ocorrer, em certo experimento aleatório, a partir da análise dos resultados obtidos, quando esse experimento é repetido, nas mesmas condições, um grande número de vezes.

UM POUCO DE **HISTÓRIA**

A teoria da probabilidade

Os primeiros registros ligados à teoria da probabilidade aparecem na obra do italiano Girolamo Cardano (1501-1576) sobre jogos de azar. Cerca de cem anos depois, Blaise Pascal deu novo impulso ao desenvolvimento da teoria da probabilidade, por meio das cartas que trocou com Pierre de Fermat (1601-1665), em que discutiam problemas ligados a jogos. Em sua obra sobre o triângulo aritmético, datada de 1654, há também alguns tópicos sobre probabilidade.

COLEÇÃO PARTICULAR/ALBUM/AKG-IMAGES/LATINSTOCK

Retrato de Girolamo Cardano entalhado em cobre no século XVI. Colorido posteriormente. Autoria desconhecida.

COLEÇÃO PARTICULAR/ALBUM/AKG-IMAGES/NORTH WIND PICTURE/ARCHIVES/LATINSTOCK

Ilustração de Jacques Bernoulli feita a partir de uma gravura histórica. Data e autoria desconhecidas.

No entanto, o primeiro artigo completo sobre o assunto só foi escrito em 1713, por Jacques Bernoulli, na obra *Ars Conjectandi* (*Arte de conjecturar*), que continha, inclusive, uma detalhada exposição sobre permutações e combinações. A partir de então, outros matemáticos dariam valiosas contribuições para o desenvolvimento da teoria das probabilidades, cujas aplicações em áreas como Biologia, Economia, Saúde, tábuas atuariais etc. não tardariam a ser reconhecidas.

Fonte de pesquisa: BOYER, Carl B. *História da Matemática*. 3ª ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2010.

Espaço amostral e evento

Espaço amostral

O conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório é chamado **espaço amostral** e é indicado pela letra grega Ω (lê-se "ômega").

- No lançamento de uma moeda, o espaço amostral é o conjunto $\Omega = \{K, C\}$, em que **K** representa a face cara e **C** representa a face coroa. Observe que $n(\Omega) = 2$, isto é, o número de elementos do conjunto Ω é igual a 2.
- No lançamento de um dado, o espaço amostral é $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Suponha que um dado seja lançado duas vezes, sucessivamente, e seja observada a sequência de números obtidos nas faces voltadas para cima.
  Usando o princípio fundamental da contagem (PFC), o número de resultados possíveis de ocorrer nesse experimento é $6 \cdot 6 = 36$. Veja, a seguir, uma forma de representar os 36 pares ordenados:

lançamentos →

1º \ 2º	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Assim, $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), ..., (2, 1), ..., (3, 1), ..., (4, 1), ..., (5, 1), ..., (6, 1), ..., (6, 6)\}$; $n(\Omega) = 36$.

- Voltemos ao experimento “sorteio das dezenas da Mega-Sena”. Escrever, um a um, todos os possíveis resultados do sorteio é inviável: teríamos que representar todos os possíveis subconjuntos de seis elementos que podem ser formados a partir de {1, 2, ..., 60}. Nesse caso, será necessário usar técnicas de contagem que estudamos no capítulo de Análise Combinatória: trata-se de escolher, sem importar a ordem, seis entre os sessenta números disponíveis. Temos:

$$\binom{60}{6} = C_{60,\,6} = \frac{60 \cdot 59 \cdot 58 \cdot 57 \cdot 56 \cdot 55}{6!} = 50\,063\,860$$

  Assim, o número de resultados possíveis deste experimento aleatório é $n(\Omega) = 50\,063\,860$.

  Observe que no sorteio da Mega-Sena não importa a ordem dos números sorteados.

Evento

Uma caixa contém 20 bolas, de mesma massa e tamanho, numeradas de 1 a 20. Uma pessoa, com os olhos vendados, retira uma bola dessa caixa. Trata-se de um experimento aleatório cujo espaço amostral é $\Omega = \{1, 2, ..., 20\}$.

Vamos construir alguns subconjuntos de Ω:

- **A**: “a bola sorteada contém um múltiplo de 4“; $A = \{4, 8, 12, 16, 20\}$.
- **B**: “a bola sorteada contém um número formado por dois algarismos“; $B = \{10, 11, 12, ..., 20\}$.
- **C**: “a bola sorteada contém um número primo“; $C = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$.
- **D**: “a bola sorteada contém um número natural não nulo menor ou igual a 20“; $D = \{1, 2, 3, 4, ..., 20\}$.
- **E**: “a bola sorteada contém um número formado por três algarismos“; $E = \varnothing$.

Cada um desses subconjuntos de Ω recebe o nome de **evento**.

> Evento é qualquer subconjunto do espaço amostral (Ω) de um experimento aleatório.

OBSERVAÇÕES

- Quando o evento coincide com o espaço amostral, ele é chamado **evento certo**. É o caso do evento **D**.
- Quando o evento é o conjunto vazio, ele é chamado **evento impossível**. É o caso do evento **E.**

EXEMPLO 1

Vamos considerar o experimento “lançamento de um dado duas vezes, sucessivamente”. O espaço amostral é $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), ..., (6, 6)\}$, como vimos no quadro da página anterior. Qual é o evento $\mathbf{E_1}$: “a soma dos pontos obtidos é maior que 8”?

Devemos analisar esse quadro e assinalar os pares de números cuja soma é 9, 10, 11 ou 12. Temos:

$E_1 = \{(3, 6); (4, 5); (4, 6); (5, 4); (5, 5); (5, 6); (6, 3); (6, 4); (6, 5); (6, 6)\}$

Já o evento $\mathbf{E_2}$ “o produto dos números obtidos é igual a 12” é:

$$E_2 = \{(2, 6), (3, 4), (4, 3), (6, 2)\}$$

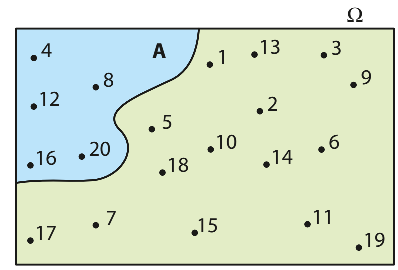
PENSE NISTO:

Com base no experimento descrito neste exemplo, crie em seu caderno um evento certo, um evento impossível e um evento formado por um único elemento.

Evento complementar

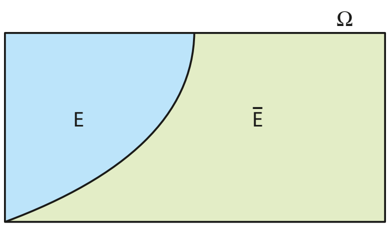
Considere, novamente, o experimento que consiste em retirar ao acaso uma bola entre as 20 que estão numa caixa e observar o número mostrado na bola.

Vamos representar ao lado o evento **A**: "ocorre um número múltiplo de 4".



Os elementos de Ω que não pertencem a **A** correspondem aos números que não são múltiplos de 4. Eles formam o conjunto complementar de **A** (em relação a Ω), que pode ser representado por $\overline{A}$ ou $\complement_{\Omega}^{A}$.

Seja **E** um evento de um espaço amostral Ω. Chamamos **evento complementar de E**, em relação a Ω (indica-se por $\overline{E}$ ou $\complement_{\Omega}^{E}$), o evento que ocorre quando **E** não ocorre.



Note que: $\begin{cases} E \cup \overline{E} = \Omega \\ E \cap \overline{E} = \varnothing \end{cases}$

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

1 Um dado é lançado e o número da face voltada para cima é anotado.

a) Descreva Ω.

b) Qual é o evento $\mathbf{E_1}$ "o número obtido é múltiplo de 3"?

c) Qual é o evento $\mathbf{E_2}$ "o número obtido não é primo"?

2 Suponha que, todo ano, a Confederação Brasileira de Futebol (CBF) realize um sorteio para decidir em qual região do país será disputado um torneio internacional. Determine o espaço amostral do experimento a ser realizado em um determinado ano.

3 Uma moeda honesta é lançada duas vezes sucessivamente e observa-se a sequência de faces obtidas. Determine:

a) Ω;

b) o evento **E** "sair ao menos uma cara".

4 Um número natural de 1 a 100 é escolhido ao acaso. Seja o evento **E** "sair um número que é uma potência de base 2".

a) Determine **E**.

b) Qual é o número de elementos de $\overline{E}$?

5 Um dado não viciado é lançado duas vezes sucessivamente e é anotada a sequência de faces obtidas. Determine:

a) $n(\Omega)$;

b) $n(E_1)$, sendo $\mathbf{E_1}$ o evento "o primeiro número obtido nesses lançamentos é 3";

c) $n(E_2)$, sendo $\mathbf{E_2}$ o evento "o produto dos números obtidos é ímpar";

d) $n(E_3)$, sendo $\mathbf{E_3}$ o evento "a soma dos pontos obtidos é menor que 7".

6 Um dado não viciado é lançado duas vezes, sucessivamente. Seja o evento **E** "a soma dos pontos obtidos é menor ou igual a 9". Determine $\overline{E}$.

7 Um dado não viciado é lançado três vezes sucessivamente. Seja o evento **E** "pelo menos um dos números obtidos é diferente dos outros". Determine $\overline{E}$.

O enunciado a seguir é válido para as questões 8 e 9.
Uma classe tem 17 rapazes e 15 moças. Pretende-se formar comissões de **n** alunos, escolhidos ao acaso, para representar a classe perante a diretoria do colégio.

8 Determine o número de elementos do espaço amostral correspondente se:

a) $n = 1$

b) $n = 2$

c) $n = 3$

9 Se a comissão for composta por dois alunos, considere o evento **E** "há um rapaz e uma moça na comissão" e determine n(E).

10 Um experimento aleatório é composto de duas etapas: primeiro, uma moeda não viciada é lançada e, em seguida, um dado não viciado é lançado. Construa o espaço amostral desse experimento, utilizando a representação **K** (cara) e **C** (coroa).

11 Uma caixa contém 4 bolas vermelhas (**V**), 2 pretas (**P**) e 1 branca (**B**), todas do mesmo tamanho e com mesma massa. Uma pessoa retira, ao acaso, uma bola dessa caixa (sem olhar a sua cor), registra em seguida sua cor e, *sem* repor a bola retirada, extrai, também ao acaso, uma segunda bola dessa caixa e anota a sua cor, obtendo assim uma sequência de duas cores.
Quais são os possíveis resultados (sequências) desse experimento?

12 Com relação à questão anterior, determine o espaço amostral do experimento, considerando que a 2ª extração é feita com reposição da primeira bola retirada.

Frequência relativa e probabilidade

Foram feitos 80 lançamentos sucessivos de uma moeda honesta, dos quais 37 resultaram em cara (**K**) e 43 resultaram em coroa (**C**).

A razão $\dfrac{\text{número de caras}}{\text{número total de lançamentos}} = \dfrac{37}{80} = 0{,}4625$ representa a **frequência relativa** correspondente ao evento $\{K\}$; a razão $\dfrac{43}{80} = 0{,}5375$ representa a frequência relativa correspondente ao evento $\{C\}$.

Imagine que tenham sido feitos mais 120 lançamentos dessa moeda, gerando o seguinte resultado acumulado para os 200 lançamentos: 96 caras (**K**) e 104 coroas (**C**). Desse modo, a frequência relativa correspondente ao evento $\{K\}$ passou a ser $\dfrac{96}{200} = 0{,}48$ e a frequência relativa correspondente ao evento $\{C\}$ passou a ser $\dfrac{104}{200} = 0{,}52$.

À medida que se aumenta o número de lançamentos, verifica-se, experimentalmente, que as frequências relativas correspondentes às ocorrências de cara e coroa ficam cada vez mais próximas entre si, tendendo à igualdade, dada pelo valor 0,50. Quando isso ocorre, dizemos que o espaço amostral relativo ao lançamento da moeda é **equiprovável**.

O Conde de Buffon (1707-1788) — matemático com algumas incursões na teoria de probabilidades, no contexto de jogos — teria lançado uma moeda 4 048 vezes, obtendo a face "cara" 2 048 vezes, de modo que a frequência relativa do evento $\{K\}$ é $\dfrac{2\,048}{4\,048} \simeq 0{,}5059$. Naturalmente, a frequência relativa do evento $\{C\}$ é $\dfrac{2\,000}{4\,048} \simeq 0{,}4941$ — observe a proximidade dos valores.

Definição de probabilidade

Seja $\Omega = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$ o espaço amostral finito de um experimento aleatório.

Para cada $i \in \{1, 2, ..., k\}$, consideremos o evento elementar ou unitário $\{a_i\}$. Vamos associar a cada um desses eventos um número real, indicado por $\mathbf{p(\{a_i\})}$ ou simplesmente $\mathbf{p_i}$, chamado **probabilidade** de ocorrência do evento $\{a_i\}$, tal que:

- $0 \leq p_i \leq 1, \forall i \in \{1, 2, ..., k\}$
- $p_1 + p_2 + ... + p_k = 1$

Essa associação é feita de modo que $\mathbf{p_i}$ $(i = 1, 2, ..., k)$ seja suficientemente próximo da frequência relativa do evento $\{a_i\}$, quando o experimento é repetido um grande número de vezes.

EXEMPLO 2

No lançamento de uma moeda honesta, dizemos que a probabilidade (ou chance) de ocorrer cara é $\frac{1}{2}$, assim como a probabilidade de ocorrer coroa também é $\frac{1}{2}$, pois, como vimos, lançando-se a moeda um grande número de vezes, espera-se que a frequência relativa do evento $\{K\}$ seja muito próxima de $\frac{1}{2}$, assim como a frequência relativa do evento $\{C\}$.

EXEMPLO 3

De forma análoga à do exemplo anterior, se considerarmos o experimento que consiste em lançar um dado não viciado, é razoável supor que cada face tenha probabilidade $\frac{1}{6}$ de ocorrer, pois $\frac{1}{6}$ é o valor para o qual se aproxima a frequência relativa de cada um dos eventos: $\{1\}, \{2\}, ..., \{6\}$, à medida que o experimento é repetido um grande número de vezes.

Observe que o espaço amostral correspondente ao experimento "lançamento de um dado" também é **equiprovável**: todos os eventos unitários $\{1\}, \{2\}, ..., \{6\}$ têm a mesma chance de ocorrer.

OBSERVAÇÃO

Em jogos de azar, deve-se considerar, eventualmente, a existência de algum fator que influencie o resultado — por exemplo, os chamados dados viciados: em vez de serem cubos perfeitos, podem ter pesos dentro, de modo que a frequência de ocorrência de uma face seja maior que a das outras. Outros truques podem ser feitos também em moedas, roletas etc.

Quando, no problema, não for feita qualquer menção, subentende-se que estamos diante de um jogo não viciado (ou honesto).

Veja um exemplo em que uma moeda é viciada:

Imagine que uma moeda foi lançada um número muito grande de vezes e observou-se que a frequência da face cara (**K**) é o dobro da frequência da face coroa (**C**).

Nesse caso, podemos supor a seguinte distribuição de probabilidades para $\Omega = \{K, C\}$:

$$p(\{K\}) = \frac{2}{3} \text{ e } p(\{C\}) = \frac{1}{3}\text{; note, no entanto, que } p(\{K\}) + p(\{C\}) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1.$$

Nesse caso, diz-se que o espaço amostral relativo ao lançamento dessa moeda é **não equiprovável**.

Probabilidades em espaços amostrais equiprováveis

Seja Ω um espaço amostral finito:

$$\Omega = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$$

Já vimos que, quando o espaço é equiprovável, $p(\{a_1\}) = p(\{a_2\}) = ... = p(\{a_k\})$, ou, ainda, $p_1 = p_2 = ... = p_k$.

Como $p_1 + p_2 + ... + p_k = 1$, para todo $i \in \{1, 2, ..., k\}$, tem-se: $p_i = \frac{1}{k}$.

Consideremos **E** um evento de Ω, formado por **r** elementos ($r \leqslant k$), isto é, $E = \{a_1, a_2, ..., a_r\}$. Temos:

$$p(E) = p_1 + p_2 + ... + p_r = \underbrace{\frac{1}{k} + \frac{1}{k} + ... + \frac{1}{k}}_{\textbf{r}\text{ parcelas}} = \frac{r}{k}$$

Assim:

$$p(E) = \frac{r}{k} = \frac{\text{número de elementos de } \mathbf{E}}{\text{número de elementos de } \Omega} = \frac{n(E)}{n(\Omega)}$$

Informalmente, podemos interpretar a razão acima como: "a probabilidade de ocorrer um determinado evento é dada pelo quociente entre o número de casos favoráveis (casos que nos interessam) e o número de casos possíveis (total de casos)".

Propriedades

Seja Ω um espaço amostral finito e equiprovável, correspondente a um experimento aleatório.

Valem as seguintes propriedades:

1ª) A probabilidade do evento certo é igual a 1.
Basta notar que, quando $E = \Omega$, $n(E) = n(\Omega)$ e, portanto, $p(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = 1$.

2ª) A probabilidade do evento impossível é igual a 0.
Se **E** é um evento impossível, $E = \varnothing$, $n(E) = 0$ e, portanto, $p(E) = 0$.

3ª) Se **E** é um evento de Ω, distinto do evento impossível e também do evento certo, então $0 < p(E) < 1$.
Como $0 < n(E) < n(\Omega)$, dividimos todos os termos dessa desigualdade por $n(\Omega) > 0$:

$$\frac{0}{n(\Omega)} < \frac{n(E)}{n(\Omega)} < \frac{n(\Omega)}{n(\Omega)},$$

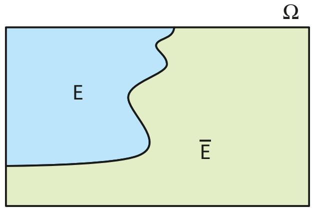
do que podemos concluir que $0 < p(E) < 1$.

4ª) Se **E** é um evento de Ω, então $p(\overline{E}) = 1 - p(E)$.
Como $E \cup \overline{E} = \Omega$ e $E \cap \overline{E} = \varnothing$, podemos escrever:

$$n(E) + n(\overline{E}) = n(\Omega)$$

Dividindo os dois membros dessa igualdade por $n(\Omega) \neq 0$, temos:

$$\frac{n(E)}{n(\Omega)} + \frac{n(\overline{E})}{n(\Omega)} = \frac{n(\Omega)}{n(\Omega)} \Rightarrow p(E) + p(\overline{E}) = 1$$



OBSERVAÇÃO

As propriedades citadas também são válidas para um espaço amostral finito não equiprovável.

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

1 Uma urna contém 15 bolas de mesmo tamanho e mesma massa numeradas de 1 a 15. Uma bola é extraída ao acaso da urna. Qual a probabilidade de ser sorteada uma bola com número maior ou igual a 11?

Solução:

Temos:

- $\Omega = \{1, 2, 3, ..., 15\}$; observe que esse espaço amostral é equiprovável.
- Seja o evento **E** "o número da bola sorteada é maior ou igual a 11". Temos: $E = \{11, 12, 13, 14, 15\}$.

Assim:

$$p(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \simeq 33{,}3\%$$

2 Um dado não viciado é lançado duas vezes sucessivamente. Qual é a probabilidade de:

a) ocorrer 5 no primeiro lançamento e um número par no segundo?

b) o produto dos pontos obtidos ser maior que 12?

Solução:

Como vimos, o conjunto dos resultados possíveis é formado por $6 \cdot 6 = 36$ pares ordenados, todos com a mesma probabilidade de ocorrer.

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), ..., (6, 6)\}$$

a) O evento que nos interessa é $E = \{(5, 2), (5, 4), (5, 6)\}$.

Assim, $p(E) = \dfrac{n(E)}{n(\Omega)} = \dfrac{3}{36} = \dfrac{1}{12}$.

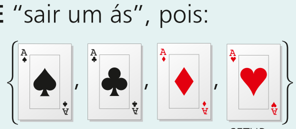
b) O evento que nos interessa é $E = \{(3, 5), (3, 6), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$.

Então, $p(E) = \dfrac{13}{36}$.

3 De um baralho comum, com 52 cartas, extraímos, ao acaso, uma carta. Qual é a probabilidade de não sair um ás?

Solução:

Podemos calcular, inicialmente, a probabilidade de o evento **E** "sair um ás", pois:

E = 

SETUP

Temos $p(E) = \dfrac{4}{52}$ e, portanto, a probabilidade de não ocorrer um ás, evento complementar de **E**, é:

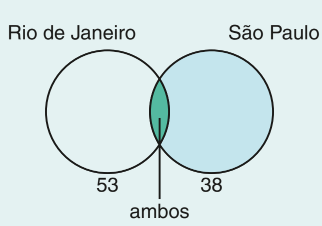
$$p(\bar{E}) = 1 - \frac{4}{52} = \frac{48}{52} = \frac{12}{13}$$

4 Em um grupo de 80 pessoas, todas de Minas Gerais, 53 conhecem o Rio de Janeiro, 38 conhecem São Paulo e 21 já estiveram nas duas cidades. Uma pessoa do grupo é escolhida ao acaso. Qual é a probabilidade de que ela tenha visitado apenas uma dessas cidades?

Solução:

Para facilitar o entendimento, acompanhe os cálculos observando os diagramas de Venn:

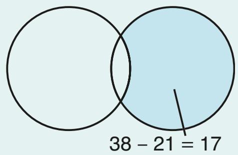
- Há 21 pessoas na interseção de São Paulo e Rio de Janeiro.



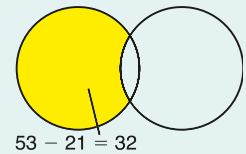
LUCIANA WHITAKER/PULSAR IMAGENS

O Rio de Janeiro é uma das cidades turísticas mais famosas do mundo. Rio de Janeiro (RJ), 2015.

- O número de pessoas que conhecem exclusivamente São Paulo é 38 − 21 = 17.

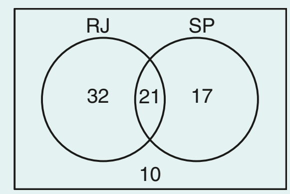


- O número de pessoas que conhecem exclusivamente o Rio de Janeiro é 53 − 21 = 32.



Note que 21 + 17 + 32 = 70. Assim, há 80 − 70 = 10 pessoas que não conhecem qualquer uma das duas cidades.

Temos:



- $n(\Omega) = 80$
- Considerando **E** o evento "a pessoa conhece apenas uma das duas cidades", temos $n(E) = 32 + 17 = 49$.
- A probabilidade pedida é $\frac{49}{80} = 0{,}6125 = 61{,}25\%$.

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

13 Uma urna contém 100 bolas de mesma massa e mesmo tamanho numeradas de 1 a 100. Uma delas é extraída ao acaso. Qual é a probabilidade de o número sorteado ser:

a) 18?

b) 57?

c) maior que 63?

d) formado por dois algarismos?

e) um quadrado perfeito?

14 Uma caixa contém 10 tiras de cartolina, todas do mesmo tamanho e textura. Em cada tira está escrita uma única letra do conjunto cujos elementos são as vogais e as cinco primeiras consoantes do alfabeto. Não existem tiras com a mesma letra. Uma tira é sorteada ao acaso. Qual é a probabilidade de que a letra escrita na tira sorteada seja:

a) **E**?

b) **C**?

c) **J**?

d) consoante?

15 Ao lançarmos um dado duas vezes sucessivamente, qual é a probabilidade de que:

a) o número 1 ocorra em ao menos um lançamento?

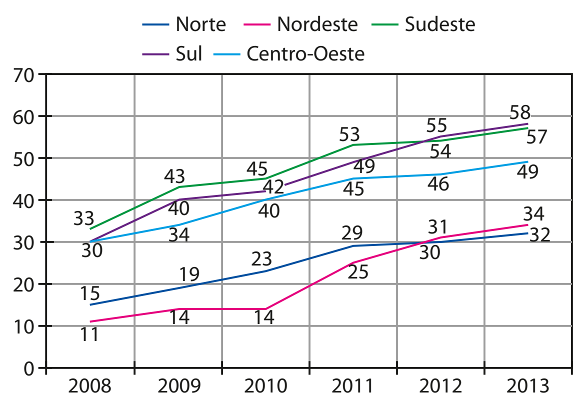
b) a soma dos pontos obtidos seja 7?

c) os números obtidos sejam diferentes entre si?

d) o módulo da diferença entre os pontos obtidos seja maior que 2?

16 O gráfico seguinte mostra a evolução do uso do computador nas regiões do Brasil.

Proporção de domicílios com computador segundo as regiões do Brasil – Percentual sobre o total de domicílios



Fonte: CETIC. *TIC Domicílios e Usuários 2014*. Disponível em: <data.cetic.br/cetic/explore?idPesquisa=TIC_DOM>. Acesso em: 30 mar. 2016.

Escolhida ao acaso uma das regiões mencionadas no gráfico, qual é a probabilidade de que, em 2013, menos da metade de seus domicílios possuíam computador?

17 De um baralho de 52 cartas, uma é extraída ao acaso. Qual é a probabilidade de que a carta sorteada:

a) seja o sete de copas?

b) seja de ouros?

c) não seja o valete de espadas?

d) não seja de ouros nem de copas?

18 Na tabela seguinte aparece o resultado parcial do levantamento sobre hábitos alimentares realizado em uma comunidade de 200 pessoas:

	Nunca comem carne	Às vezes comem carne	Frequentemente comem carne	Total
Homens	17	a	55	94
Mulheres	b	49	26	c
Total	d	e	81	200

a) Determine os valores de **a**, **b**, **c**, **d** e **e**.

b) Escolhendo ao acaso um indivíduo da comunidade, qual é a probabilidade de que seja mulher e não consuma carne?

c) Escolhendo ao acaso um indivíduo da comunidade, qual é a probabilidade de que ele consuma carne frequentemente?

19 Uma pesquisa realizada com um grupo de fregueses de um supermercado revelou que 63% consomem a marca **A** de óleo, 55% consomem a marca **B**, e 32% consomem ambas as marcas. Uma pessoa do grupo é escolhida ao acaso. Qual é a probabilidade de que ela não consuma qualquer uma dessas marcas?

20 Vinte esfirras fechadas, todas com a mesma forma e tamanho, são colocadas em uma travessa; são sete de queijo, nove de carne e quatro de escarola. Alguém retira uma esfirra da travessa ao acaso. Qual é a probabilidade de que seja retirada uma esfirra de carne?

FERNANDO FAVORETTO/ CRIAR IMAGEM

21 Uma moeda é lançada três vezes sucessivamente. Qual é a probabilidade de sair cara mais de uma vez?

22 Em seu cadeado, Rita pretende colocar uma senha de três algarismos que contenha, obrigatoriamente, em alguma posição, seu número favorito, que é o 78. Dentre todas as senhas possíveis que Rita pode formar, qual é a probabilidade de ela escolher a senha 178?

23 Numa prova com três questões (**A**, **B** e **C**), verificou-se que:

- 5 alunos acertaram as três questões;
- 15 alunos acertaram as questões **A** e **C**;
- 17 alunos acertaram as questões **A** e **B**;
- 12 alunos acertaram as questões **B** e **C**;
- 55 alunos acertaram a questão **A**;
- 55 alunos acertaram a questão **B**;
- 64 alunos acertaram a questão **C**;
- 13 alunos erraram as três questões.

Um aluno é escolhido ao acaso. Qual é a probabilidade de ele ter acertado:

a) pelo menos duas questões?

b) exatamente uma questão?

24 Feito um levantamento com os funcionários de uma empresa sobre seus respectivos tempos de serviço na empresa, verificou-se que 40% lá trabalham há mais de 5 anos e, entre eles, 60% são homens. Sorteando-se ao acaso um funcionário dessa empresa, qual é a probabilidade de ele ser do sexo feminino e trabalhar na empresa há mais de 5 anos?

25 Após um número suficientemente grande de lançamentos de uma moeda viciada, constatou-se que a frequência relativa do evento coroa {C} era o quádruplo da frequência relativa do evento cara {K}. Lançando-se a moeda uma única vez, qual é a probabilidade de sair coroa {C}?

26 Depois de um número suficientemente grande de lançamentos de um dado, constatou-se que, para cada dois resultados com faces ímpares, ocorriam três resultados com faces pares. Se todas as faces pares do dado ocorrem com a mesma frequência, o que acontece também com todas as faces ímpares, determine a probabilidade de em um único lançamento obter:

a) face 1;

b) face 6.

27 O termo independente **c** da equação $x^2 - 3x + c = 0$ é escolhido aleatoriamente entre os elementos de $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$. Qual é a probabilidade de essa equação vir a ter raízes reais?

28 Considere a equação linear, na incógnita **x**:

$$(a - 2) \cdot x = 4$$

Se **a** for escolhido ao acaso entre os elementos de $\{0, 1, ..., 9\}$, qual é a probabilidade de que essa equação venha a ter:

a) uma única solução?

b) nenhuma solução?

c) uma solução inteira?

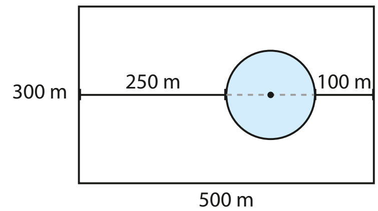
29 Considere a expressão $\log_3 m$, em que **m** é um número inteiro, positivo e menor ou igual a 100.

Se **m** for escolhido ao acaso, qual é a probabilidade de que o valor da expressão resulte em um número inteiro?

30 Uma caixa contém **x** bolas brancas, 3x bolas pretas e 3 bolas vermelhas, todas com o mesmo tamanho e mesma massa. Uma bola é extraída ao acaso dessa caixa. Determine o menor valor possível de **x**, a fim de que a probabilidade de a bola sorteada ser preta seja maior que 70%.

31 Conta uma lenda que um tesouro foi escondido em algum lugar de um terreno, abaixo da superfície da terra.

A figura seguinte mostra a vista superior do terreno, em que o círculo mostrado é a projeção ortogonal, sobre o plano do solo, de um reservatório de água vazio com formato cilíndrico. Observe as dimensões indicadas.



Qual é a probabilidade de que o tesouro não tenha sido escondido abaixo da região limitada pelo reservatório? Use $\pi \simeq 3$.

Nos exercícios resolvidos e propostos a seguir, vamos usar as técnicas de contagem estudadas em Análise Combinatória a fim de determinar $n(\Omega)$ e $n(E)$.

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

5 Em um estado brasileiro, todas as placas de automóveis são formadas por três letras (entre as 26 do alfabeto) e quatro algarismos e começam pela letra **M**.

GRAPHORAMA

Uma placa será confeccionada completamente ao acaso. Qual é a probabilidade de que ela seja formada por letras distintas e algarismos também distintos?

Solução:

O número de maneiras de composição da placa pode ser calculado pelo PFC:

$$M\ \overbrace{\underset{26}{\square}\ \underset{26}{\square}}^{\text{letras}}\ \overbrace{\underset{10}{\square}\ \underset{10}{\square}\ \underset{10}{\square}\ \underset{10}{\square}}^{\text{algarismos}} \Rightarrow n(\Omega) = 26^2 \cdot 10^4$$

Vamos determinar, usando o PFC, o número de elementos do evento **E** "a placa tem letras e algarismos distintos". Temos:

$$M\ \underset{25}{\square}\ \underset{24}{\square}\ \underset{10}{\square}\ \underset{9}{\square}\ \underset{8}{\square}\ \underset{7}{\square} \Rightarrow n(E) = 25 \cdot 24 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$$

A probabilidade pedida é, portanto:

$$p = \frac{25 \cdot 24 \cdot \cancel{10} \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{26 \cdot 26 \cdot \cancel{10} \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10} \simeq 0{,}447 = 44{,}7\%$$

6 Um ônibus de excursão com vinte brasileiros e seis estrangeiros é parado pela Polícia Rodoviária para vistoria de documentos. O funcionário escolhe, ao acaso, três passageiros para terem os documentos conferidos. Qual é a probabilidade de que todos sejam brasileiros?

CHRISTIAN RIZZI/FOLHAPRESS

Solução:

O espaço amostral é formado por todos os grupos de três passageiros quaisquer que podemos formar com os 26 turistas. Temos, então:

$$n(\Omega) = C_{26,\,3} = \frac{26 \cdot 25 \cdot 24}{3!} = 2\,600$$

O evento **E** que nos interessa é formado pelos grupos de três turistas brasileiros que podemos formar. Temos:

$$n(E) = C_{20,\,3} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3!} = 1\,140$$

Por fim, $p(E) = \dfrac{n(E)}{n(\Omega)} = \dfrac{1\,140}{2\,600} \simeq 0{,}438 = 43{,}8\%$.

7 Oito pessoas, entre elas um casal e seu filho, são colocadas aleatoriamente em fila. Qual é a probabilidade de que a família fique junta?

Solução:

O número de resultados possíveis de ocorrer no experimento é $P_8 = 8! = 40\,320$, que corresponde ao total de filas que podem ser formadas com as oito pessoas, sem restrição de lugar.

O evento **E** que nos interessa corresponde ao número de filas em que a família aparece junta. Devemos permutar o bloco "família" com cada uma das outras cinco pessoas, num total de maneiras igual a $P_6 = 6! = 720$. Porém, dentro do bloco, os três membros da família podem trocar de lugar entre si de 6 maneiras distintas ($P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$). Logo, $n(E) = 6! \cdot 6 = 4\,320$.

Daí, $p(E) = \dfrac{4\,320}{40\,320} \simeq 0{,}107 = 10{,}7\%$.

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

32 Um dos anagramas da palavra AMOR é escolhido ao acaso. Qual é a probabilidade de que no anagrama apareça a palavra ROMA?

33 Um anagrama formado a partir de CARDUME é escolhido ao acaso. Qual é a probabilidade de ele começar e terminar por vogal?

34 Um número de três algarismos é escolhido ao acaso. Qual é a probabilidade de ele ser formado por algarismos distintos?

35 Palíndromos são números inteiros que não se alteram quando lidos da esquerda para a direita e vice-versa. Por exemplo, 7 227, 535, 10 301 etc.

a) Com 0, 1, ..., 9 formam-se números de quatro algarismos. Um deles é escolhido ao acaso. Qual é a probabilidade de que ele seja um palíndromo?

b) Qual seria a resposta se o número fosse de cinco algarismos?

36 Uma caixa contém 60 bolas de mesma massa e mesmo tamanho, numeradas de 1 a 60.

a) Escolhendo aleatoriamente uma bola da caixa, qual é a probabilidade de que o número obtido seja múltiplo de 5?

b) Escolhendo simultaneamente e ao acaso duas bolas da caixa, qual é a probabilidade de que, em ambas, apareça um múltiplo de 5?

37 Pretende-se organizar dois eventos no ano; três cidades do Sudeste, duas do Sul e cinco do Nordeste candidataram-se a sede desses eventos. Sabendo que uma mesma cidade não pode sediar os dois eventos e que as sedes devem ser sorteadas, ao acaso, entre as cidades candidatas, determine a probabilidade de que:

a) os eventos sejam feitos apenas em cidades do Nordeste;

b) nenhum evento ocorra no Sudeste.

38 Um banco enviou a seus clientes uma senha qualquer de acesso à internet formada por 5 algarismos seguidos de 3 letras. Sabendo que foram usadas apenas as dez primeiras letras do alfabeto, determine:

a) o número de senhas distintas que podem ser formadas;

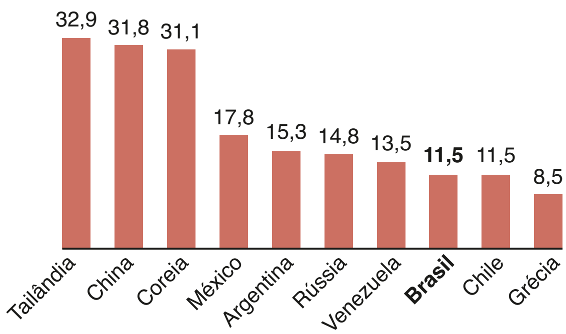
b) a probabilidade de um cliente receber a senha 12345ACE;

c) a probabilidade de um cliente receber uma senha formada pelos algarismos 1, 2, 3, 4 e 5 em qualquer ordem, seguidos pelas letras **A**, **B** e **C** em qualquer ordem;

d) a probabilidade de um cliente receber uma senha formada por algarismos distintos e por letras também distintas.

39 O gráfico abaixo compara a participação da indústria de transformação no PIB de alguns países.

Comparação entre países
Participação em 2013 (Em porcentagem)



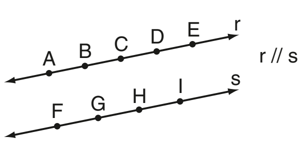
O Estado de S. Paulo, 2 maio 2015.

Sorteando-se ao acaso dois países dessa relação, qual é a probabilidade de que:

a) ambos tenham percentual de participação no PIB menor que 15%?

b) ao menos um dos países selecionados tenha participação percentual maior que 20%?

A figura a seguir refere-se aos exercícios 40 e 41.



40 Escolhem-se, ao acaso, dois quaisquer dos nove pontos acima. Qual a probabilidade de escolhermos:

a) dois pontos de **r**?

b) dois pontos de **s**?

c) um ponto de **r** e um ponto de **s**?

41 Escolhem-se, ao acaso, três pontos quaisquer entre os nove pontos dados. Unindo-se os pontos escolhidos, qual é a probabilidade de esses pontos serem vértices de um triângulo?

42 Três cartas de um baralho são sorteadas simultaneamente. Qual é a probabilidade de que:

a) apareçam o dez de ouros, o sete de copas e o ás de paus?

b) apareça o dez de ouros?

c) todas as cartas sejam de espadas?

43 Três casais de amigos foram ao cinema e ocuparam as seis cadeiras vagas, uma ao lado da outra, em uma certa fileira. Como chegaram um pouco atrasados, eles se distribuíram de maneira completamente aleatória. Qual é a probabilidade de que:

a) os homens tenham sentado lado a lado e que o mesmo ocorra com as mulheres?

b) cada homem tenha sentado ao lado de sua mulher?

44 Um dado não viciado é lançado sucessivamente três vezes.

a) Qual é a probabilidade de ocorrerem, em qualquer ordem, 2 faces iguais a 3 e 1 face igual a 6?

b) Qual é a probabilidade de ocorrerem as faces 1, 2 e 3, em qualquer ordem?

45 Unindo-se, aleatoriamente, dois vértices quaisquer de um pentágono convexo, qual é a probabilidade de que o segmento determinado corresponda a uma diagonal?

46 Os números reais **x** e **y** da matriz $M = \begin{pmatrix} 2 & x \\ y & -3 \end{pmatrix}$ serão escolhidos ao acaso, sorteando-se, sucessivamente e com reposição, dois elementos do conjunto $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

a) Qual é a probabilidade de que a matriz **M** obtida seja simétrica, isto é, $M = M^t$?

b) Qual é a probabilidade de que o determinante de **M** seja não nulo?

47 Um paralelepípedo retorretângulo tem dimensões 3 cm, 4 cm e 7 cm. Duas de suas arestas são selecionadas ao acaso. Qual é a probabilidade de que ambas tenham o mesmo comprimento?

48 Em um programa de prêmios de um canal de televisão, o participante deve escolher, simultaneamente e ao acaso, três dentre seis cartões disponíveis para abrir. Sabendo que há prêmios em apenas dois cartões, qual é a probabilidade de o participante não receber prêmio algum?

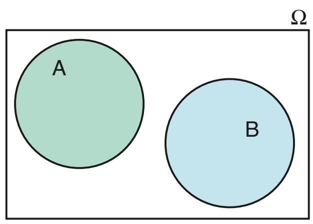
49 Para divulgar seus pacotes de TV, uma empresa decide oferecer gratuitamente um ano de assinatura a 2 apartamentos sorteados em um condomínio residencial. O condomínio possui 3 blocos, cada qual com 15 andares e 4 apartamentos por andar. Se o sorteio é aleatório, qual é a probabilidade de que dois apartamentos de um mesmo bloco e do mesmo andar recebam os prêmios-cortesia?

Probabilidade da união de dois eventos

Sejam **A** e **B** eventos de um mesmo espaço amostral Ω finito, não vazio e equiprovável. Vamos encontrar uma expressão para a probabilidade de ocorrer o evento **A** ou o evento **B**, isto é, a probabilidade da ocorrência da união dos eventos **A** e **B**, ou seja, $p(A \cup B)$.

Consideremos dois casos:

- $A \cap B = \varnothing$



Temos:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

Como $n(\Omega) \neq 0$, podemos escrever:

$$\frac{n(A \cup B)}{n(\Omega)} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} + \frac{n(B)}{n(\Omega)}$$

Logo:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

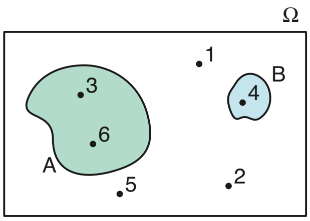
Nesse caso, **A** e **B** são chamados **eventos mutuamente exclusivos**.

EXEMPLO 4

Considerando o experimento aleatório "lançamento de um dado honesto", como podemos calcular a probabilidade de que o número obtido na face superior seja múltiplo de 3 ou de 4?

Sejam os eventos:

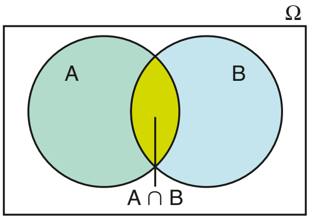
- **A**: "obter um número múltiplo de 3" $\Rightarrow A = \{3, 6\}$
- **B**: "obter um número múltiplo de 4" $\Rightarrow B = \{4\}$



Queremos calcular $p(A \cup B)$.

Como $A \cap B = \varnothing$, então $p(A \cup B) = p(A) + p(B) = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

- $A \cap B \neq \varnothing$



Das noções sobre conjuntos, temos:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Dividindo membro a membro por $n(\Omega) \neq 0$, obtemos:

$$\frac{n(A \cup B)}{n(\Omega)} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} + \frac{n(B)}{n(\Omega)} - \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)}$$

Daí:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

O evento $A \cap B$ representa a ocorrência **simultânea** dos eventos **A** e **B**.

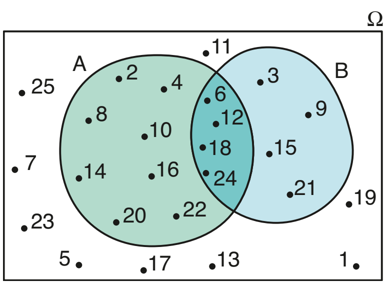
EXEMPLO 5

Vamos imaginar que uma urna contenha 25 bolas de mesmo tamanho e mesma massa, numeradas de 1 a 25, e que uma delas seja extraída ao acaso. Qual é a probabilidade de o número da bola sorteada ser múltiplo de 2 ou de 3?

Consideremos:

- $\Omega = \{1, 2, ..., 25\}$
- **A**: "o número é múltiplo de 2"; $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24\}$.
- **B**: "o número é múltiplo de 3"; $B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24\}$.

Queremos determinar $p(A \cup B)$.



Observe que os números 6, 12, 18 e 24 são elementos comuns ao evento **A** e ao evento **B**. Assim, $A \cap B = \{6, 12, 18, 24\}$ é o evento formado pelos múltiplos simultâneos de 2 e de 3, isto é, seus elementos são os múltiplos de 6.

Temos:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$$p(A \cup B) = \frac{12}{25} + \frac{8}{25} - \frac{4}{25} = \frac{16}{25} = 0{,}64 = 64\%$$

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

50 No lançamento de um dado, qual é a probabilidade de que o número obtido na face superior seja múltiplo de 2 ou de 3?

51 De um baralho de 52 cartas, uma é extraída ao acaso. Qual é a probabilidade de sair um valete ou uma carta de ouros?

52 Um dado é lançado duas vezes sucessivamente. Sejam os eventos:

A: "a soma dos pontos obtidos é 10";

B: "os números obtidos são distintos".

Calcule $p(A \cup B)$.

53 Para apresentar um trabalho, um professor sorteará ao acaso um aluno, entre os 30 da turma. O sorteio será feito de acordo com o número da chamada. Qual é a probabilidade de o número do aluno sorteado ser:

a) primo ou maior que 10?

b) múltiplo de 7 ou de 5?

c) quadrado perfeito ou divisor de 36?

54 Sejam **A** e **B** eventos de um mesmo espaço amostral, com $p(A \cup B) = 0{,}75$. Em cada caso, calcule $p(B)$, admitindo que:

a) $p(A) = 0{,}35$ e **A** e **B** são mutuamente exclusivos.

b) $p(A) = 0{,}29$ e $p(A \cap B) = 0{,}09$.

55 Para preencher as vagas de trabalho em uma indústria, um certo número de pessoas participou do processo seletivo. O quadro abaixo mostra a distribuição dos candidatos por gênero e escolaridade:

	Homens	Mulheres
Ensino Médio completo	18	27
Ensino Superior completo	22	53

Um candidato do grupo é escolhido ao acaso. Qual é a probabilidade de que seja:

a) mulher ou tenha Ensino Superior completo?

b) homem e tenha somente o Ensino Médio completo?

56 A análise da série histórica de pluviometria dos últimos 20 anos, em uma praia do litoral cearense, mostrou que a probabilidade de chover 5 ou mais dias no mês de outubro é de 33% e a probabilidade de chover 5 ou menos dias nesse mesmo mês é de 81%. Qual é a probabilidade de chover exatamente 5 dias, nessa praia, no próximo mês de outubro?

Probabilidade condicional

Um avião fretado por uma operadora turística de Minas Gerais partiu de Belo Horizonte com destino a Natal, no Rio Grande do Norte, com 140 passageiros. Durante o voo, cada turista respondeu a duas perguntas:

- Já voou antes?
- Já esteve em Natal?

Os dados obtidos a partir das respostas dos passageiros encontram-se organizados no quadro seguinte:

	Voando pela primeira vez	Já havia voado	Total
Não conhecia Natal	83	22	105
Já conhecia Natal	23	12	35
Total	106	34	140

ADROVANDO CLARO/FOTOARENA

Praia de Ponta Negra, Natal (RN), 2014.

Um passageiro é selecionado ao acaso e verifica-se que ele nunca tinha viajado de avião. Qual é a probabilidade de que ele já conhecesse Natal?

Nesse caso, já temos um conhecimento parcial do resultado do experimento: "o passageiro estava voando pela primeira vez". Com isso, o número de casos possíveis se reduz a 106. Nesse novo universo, que é o espaço amostral reduzido, o número de passageiros que já conheciam Natal é 23.

Assim, a probabilidade pedida é $p = \frac{23}{106}$.

Esse número expressa a probabilidade de a pessoa escolhida conhecer Natal, sabendo que era a primeira vez que viajava de avião. Vamos denominar tal número de **probabilidade condicional** e indicá-lo por:

$$p(\text{já conhecer Natal} \mid \text{primeira vez de avião})$$

↑

(lê-se: "dado que" ou "sabendo que")

Do valor encontrado em $p = \frac{23}{106}$, podemos notar que:

- 23 corresponde ao número de passageiros que já estiveram em Natal e estavam voando pela primeira vez.
- 106 corresponde ao número de passageiros que voavam pela primeira vez.

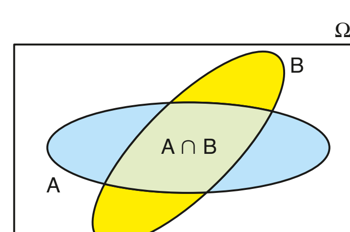
Temos, então:

$$p(\text{já conhecer Natal} \mid \text{primeira vez de avião}) = \frac{\text{número de passageiros que já conheciam Natal e voavam pela primeira vez}}{\text{número de passageiros que voavam pela primeira vez}}$$

A probabilidade condicional pode ser definida do seguinte modo:

Sejam **A** e **B** eventos de **Ω** finito e não vazio. A probabilidade condicional do evento **A**, sabendo que ocorreu o evento **B**, é indicada por p(A | B) e é dada por:

$$p(A \mid B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} \quad (1)$$



Podemos encontrar uma expressão equivalente a (1), dividindo o numerador e o denominador do 2º membro de (1) por $n(\Omega) \neq 0$:

$$p(A \mid B) = \frac{\dfrac{n(A \cap B)}{n(\Omega)}}{\dfrac{n(B)}{n(\Omega)}} \Rightarrow \boxed{p(A \mid B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}} \quad (2)$$

OBSERVAÇÃO

Para resolver problemas de probabilidade condicional, em geral é mais prático seguir o raciocínio desenvolvido no problema dos turistas do voo fretado: reduz-se o espaço amostral e se calculam as probabilidades nesse novo espaço.

A fórmula (2), obtida para o cálculo da probabilidade condicional, tem importância mais teórica do que prática.

Por meio dela, introduziremos, no próximo item, conceitos importantes em probabilidade, como o de eventos independentes e o teorema da multiplicação.

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

8 Um dado é lançado duas vezes sucessivamente. Sabendo-se que a soma dos pontos obtidos é menor que 6, qual é a probabilidade de que em ao menos um lançamento ocorra a face 2?

Solução:

Vamos reduzir o espaço amostral.

Com a informação dada, o número de casos possíveis passa a ser 10:

$$\Omega^* = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$$

Dos elementos de Ω^*, é preciso selecionar os pares em que pelo menos um dos resultados é 2.

Há 5 casos favoráveis: (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3) e (3, 2).

Assim, a probabilidade pedida é: $\frac{5}{10} = \frac{1}{2} = 50\%$.

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

57 Uma das letras do alfabeto é escolhida ao acaso. Sabendo que ela é uma das dez primeiras letras, qual é a probabilidade de que seja uma vogal?

58 Se um dado honesto é lançado duas vezes sucessivamente e os números obtidos são:

a) iguais, qual é a probabilidade de que a soma dos pontos seja um número par?

b) distintos, qual é a probabilidade de que a soma dos pontos seja 8?

59 Um dado honesto é lançado e sabe-se que a face superior tem um número par.

a) Qual é a probabilidade de que o número obtido seja primo?

b) Qual é a probabilidade de que o número obtido seja um divisor de 5?

60 De um baralho comum, uma carta é retirada ao acaso. Se a carta escolhida:

a) não é valete nem dama, qual é a probabilidade de ser o rei de ouros?

b) não é de ouros, qual é a probabilidade de não ser de copas?

c) é de copas, qual é a probabilidade de ser o rei?

d) não é de copas, qual é a probabilidade de ser o valete de espadas ou o valete de ouros?

e) não é de copas, qual é a probabilidade de ser de ouros ou ser um rei?

61 Um casal e quatro pessoas são colocados em fila indiana. Sabendo que o casal não ficou junto, qual é a probabilidade de que as extremidades da fila tenham sido ocupadas pelas pessoas que formam o casal?

62 No cadastro de um cursinho pré-vestibular estão registrados 600 alunos assim distribuídos:

- 380 rapazes;
- 105 moças que já concluíram o Ensino Médio;
- 200 rapazes que estão cursando o Ensino Médio.

Um nome do cadastro é selecionado ao acaso. Qual é a probabilidade de o nome escolhido ser de:

a) um rapaz, sabendo-se que já concluiu o Ensino Médio?

b) alguém que esteja cursando o Ensino Médio, sabendo-se que é uma moça?

63 Em um *buffet* infantil, os clientes escolhem 4 entre as 6 opções de petiscos para servir na festa: coxinha, empadinha, rissole, cachorro-quente, pastel e tortinha.

a) Para uma festa, qual é a probabilidade de um cliente incluir coxinha entre os petiscos selecionados?

b) Sabendo que um cliente incluiu coxinha e empadinha, qual é a probabilidade de ele ter incluído também pastel?

c) Sabendo que um cliente não incluiu coxinha entre os petiscos, qual é a probabilidade de ele também não ter incluído empadinha em seu pedido?

Probabilidade da interseção de dois eventos

Teorema da multiplicação

Seja Ω um espaço amostral finito e não vazio. **A** e **B** são eventos de Ω. Quando estudamos probabilidade condicional, vimos que, na expressão $p(A \mid B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$:

- $p(A \mid B)$ representa a probabilidade de ocorrer **A** dado que ocorreu o evento **B**.
- $p(A \cap B)$ representa a probabilidade de ocorrência simultânea dos eventos **A** e **B** (ou a probabilidade da interseção de **A** com **B**).
- $p(B)$ representa a probabilidade de ocorrer **B**.

De $p(A \mid B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$ segue, imediatamente, a relação:

$$p(A \cap B) = p(A \mid B) \cdot p(B)$$

Isso significa que, para se calcular a probabilidade de ocorrer a interseção dos eventos **A** e **B** (ocorrência simultânea de **A** e **B**), que é $p(A \cap B)$, é preciso multiplicar a probabilidade de ocorrer um deles ($p(B)$) pela probabilidade de ocorrer o outro, sabendo que o primeiro já ocorreu ($p(A \mid B)$).

No exemplo a seguir, ficará mais claro o uso dessa relação.

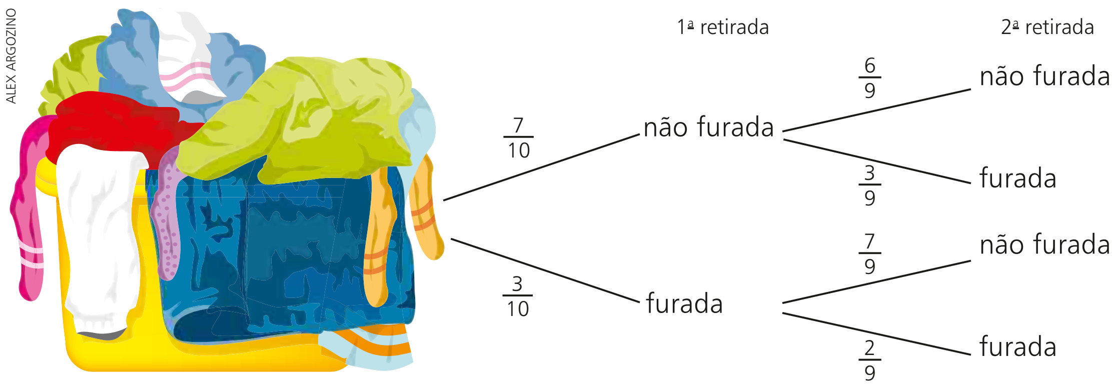
EXEMPLO 6

Em um cesto de roupas há dez camisetas, das quais três estão furadas. Duas camisetas são retiradas ao acaso, sucessivamente e sem reposição do cesto. Qual é a probabilidade de que as duas camisetas retiradas não estejam furadas?

Podemos construir um diagrama de árvore para representar os resultados possíveis desse experimento, associando probabilidades a cada "galho".

Observe que as probabilidades referentes à segunda retirada estão condicionadas ao resultado da primeira.

ALEX ARGOZINO



Estamos interessados em calcular:

$$p\left(\begin{matrix}\text{não}\\\text{furada}\end{matrix} \cap \begin{matrix}\text{não}\\\text{furada}\end{matrix}\right) = \underbrace{\frac{7}{10}}_{\text{probabilidade de a 1ª camiseta não estar furada}} \cdot \underbrace{\frac{6}{9}}_{\text{probabilidade de a 2ª camiseta não estar furada, sabendo que a 1ª também não estava}} \quad \text{(observe o 1º galho)}$$

Logo, a resposta é $p = \frac{42}{90} = \frac{7}{15}$.

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

9 Em uma caixa há vinte selos distintos, de mesmo tamanho e textura, sendo 12 nacionais e 8 importados. Retira-se ao acaso um selo da caixa e registra-se sua origem (procedência). A seguir, retira-se outro selo da caixa, sem que o primeiro seja reposto, e anota-se a origem. Qual é a probabilidade de saírem selos de origens diferentes?

REPRODUÇÃO

Solução:

Vamos representar por **N** um selo nacional e **I** um selo importado.

Podem ocorrer dois casos:

- O primeiro selo é nacional e o segundo é importado.

$$p(N \cap I) = \frac{12}{20} \cdot \frac{8}{19} = \frac{24}{95}$$

$\frac{12}{20}$: probabilidade de o 1º selo ser **N**

$\frac{8}{19}$: probabilidade de o 2º selo ser **I**, dado que o 1º selo é **N**

ou

- O primeiro selo é importado e o segundo é nacional:

$$p(I \cap N) = \frac{8}{20} \cdot \frac{12}{19} = \frac{24}{95}$$

$\frac{8}{20}$: probabilidade de o 1º selo ser **I**

$\frac{12}{19}$: probabilidade de o 2º selo ser **N**, dado que o 1º é **I**

Assim, usando a adição de probabilidades, temos:

$$p = \frac{24}{95} + \frac{24}{95} = 2 \cdot \frac{24}{95} = \frac{48}{95}$$

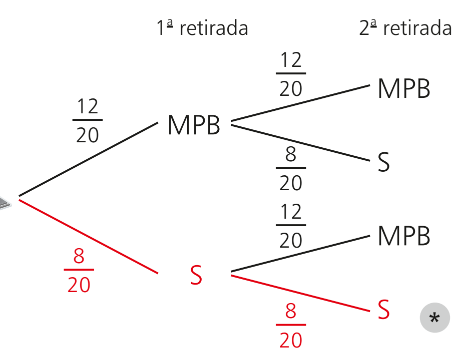
Eventos independentes

Vamos considerar o seguinte problema:

12 CDs de MPB e 8 de música sertaneja (**S**), todos distintos entre si e sem identificação, estão guardados em uma caixa. Um estudante retira, ao acaso, sucessivamente e com reposição, dois desses CDs. Qual é a probabilidade de que os dois CDs retirados sejam de música sertaneja?

Observe o diagrama de árvore:


ALEX ARGOZINO



Estamos interessados em calcular $p(S \cap S)$. Utilizando o teorema da multiplicação, temos:

$p(S \cap S) = p(\textbf{S} \text{ na 1ª retirada}) \cdot p(\textbf{S} \text{ na 2ª retirada} \mid \textbf{S} \text{ na 1ª})$; veja *

Nesse caso, porém, como o CD extraído na 1ª retirada é reposto, no momento da 2ª retirada a caixa contém exatamente os CDs de antes da 1ª retirada.

Desse modo, o fato de ter sido retirado um CD de música sertaneja na 1ª vez não muda a probabilidade de extrair um CD de música sertaneja na 2ª retirada.

Dizemos que ocorre **independência entre os eventos**.

A probabilidade pedida é, portanto:

$$p = p(S \cap S) = \frac{8}{20} \cdot \frac{8}{20} = 0{,}16 = 16\%$$

De modo geral, se $p(A \mid B) = p(A)$, ou seja, se o fato de ter ocorrido o evento **B** não altera a probabilidade de ocorrer o evento **A**, dizemos que **A** e **B** são **eventos independentes** e vale a relação:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

Em geral, sendo $\mathbf{A_1}, \mathbf{A_2}, ..., \mathbf{A_n}$ eventos independentes, temos:

$$p(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = p(A_1) \cdot p(A_2) \cdot ... \cdot p(A_n)$$

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

10 Um dado não viciado é lançado e é registrado o número obtido na face superior. Em seguida uma moeda honesta é lançada e é registrada sua face. Qual é a probabilidade de obtermos número 5 e coroa?

Solução:

Os eventos "sair número 5" e "sair coroa" são independentes, pois o fato de sair número 5 no lançamento do dado não muda a probabilidade de sair coroa no lançamento da moeda.

Desse modo, a probabilidade pedida é:

$$p = \underbrace{\frac{1}{6}}_{\text{sair nº 5}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{sair coroa}} = \frac{1}{12}$$

11 A probabilidade de um atirador **X** acertar um alvo é de 80%, e a probabilidade de um atirador **Y** acertar o mesmo alvo é de 90%.

Se os dois atirarem uma única vez, simultaneamente, qual é a probabilidade de que:

a) ambos atinjam o alvo?

b) pelo menos um atinja o alvo?

Solução:

Nesse problema é natural admitir independência entre os eventos.

a) $p(X \cap Y) = p(X) \cdot p(Y) = 0{,}80 \cdot 0{,}90 = 0{,}72 = 72\%$

b) *1º modo:*

Sabemos que $p(X \cup Y) = p(X) + p(Y) - p(X \cap Y)$

Como há independência entre os eventos, podemos escrever:

$p(X \cup Y) = p(X) + p(Y) - p(X) \cdot p(Y) = 0{,}80 + 0{,}90 - 0{,}72 = 0{,}98 = 98\%$

2º modo:

Podem ocorrer três casos:

$$(\underbrace{\textbf{X}\text{ acerta e }\textbf{Y}\text{ erra}}_{\substack{0{,}80 \cdot 0{,}10 = \\ = 0{,}08}}) \text{ ou } (\underbrace{\textbf{X}\text{ erra e }\textbf{Y}\text{ acerta}}_{\substack{0{,}20 \cdot 0{,}90 = \\ = 0{,}18}}) \text{ ou } (\underbrace{\textbf{X}\text{ acerta e }\textbf{Y}\text{ acerta}}_{\substack{0{,}80 \cdot 0{,}90 = \\ = 0{,}72}})$$

Assim, a probabilidade pedida é $0{,}08 + 0{,}18 + 0{,}72 = 0{,}98$.

PENSE NISTO:

Um estudante apresentou, para o item *b*, a seguinte solução:

$1 - 0{,}20 \cdot 0{,}10 = 1 - 0{,}02 = 0{,}98$

Explique o raciocínio desenvolvido pelo estudante!

Aplicações

Matemática, futebol e loteria

MARCELO CORTES/FOTOARENA

Placar do jogo durante partida entre Vasco da Gama e Joinville, 2015.

Uma das loterias mais populares entre os brasileiros é a Loteca (antiga loteria esportiva).

A Loteca lista 14 partidas de futebol. O apostador arrisca um palpite para o resultado de cada partida: vitória de um dos times (coluna 1 ou coluna 2) ou empate (coluna do meio).

Há várias possibilidades de aposta. A aposta mínima é um duplo, isto é, em um único jogo assinalam-se duas opções: coluna 1 e coluna 2, coluna 1 e coluna do meio ou coluna 2 e coluna do meio. Nos demais 13 jogos assinala-se um único palpite para cada jogo. Há também apostas em um triplo, isto é, em um único jogo assinalam-se as três opções, garantindo, obviamente, o acerto do resultado daquele jogo.

Entre muitas opções de aposta, podemos citar: 2 duplos; 1 triplo e 1 duplo; 6 triplos; 3 triplos e 5 duplos (aposta máxima).

Ganha quem acertar os resultados de 13 ou 14 partidas.

Mas, afinal, quais são as chances de se ganhar nessa loteria com a aposta mínima?

A teoria de probabilidades nos ajuda a calcular tais chances, a partir da hipótese de que o espaço amostral é equiprovável, isto é, em cada uma das 14 partidas, cada possível resultado (coluna 1, coluna do meio e coluna 2) tem probabilidade $\frac{1}{3}$ de ocorrer.

Observe, também, que o resultado de um jogo não interfere no resultado dos demais jogos, garantindo, desse modo, independência entre os eventos (cada jogo está associado a um evento).

Imagine que você irá preencher um volante dos 14 jogos, concorrendo com a aposta mínima, isto é, você assinala um duplo em um jogo, digamos o primeiro, e nos demais jogos (2º ao 14º) um palpite simples (uma coluna por jogo).

A probabilidade de acertar os 14 jogos pode ser expressa por:

$$p(\text{acertar o 1º jogo e acertar o 2º e acertar o 3º e } \dots \text{ e acertar o 14º jogo})$$

Usando o teorema da multiplicação e lembrando a independência dos eventos, temos:

$$p = p(\underbrace{\text{acertar o 1º jogo}}_{\text{duplo}}) \cdot p(\underbrace{\text{acertar o 2º jogo}}_{\text{simples}}) \cdot \dots \cdot p(\underbrace{\text{acertar o 14º jogo}}_{\text{simples}})$$

$$p = \frac{2}{3} \cdot \underbrace{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \dots \cdot \frac{1}{3}}_{\text{13 fatores}} = \frac{2}{3^{14}} \simeq 0{,}000042\%$$

Achou muito pequena a chance de ganhar?

Lembre-se, contudo, de que esse é um modelo teórico em que são feitas previsões. Na prática, em vários jogos, o apostador tem conhecimento prévio sobre os times e acompanha o desempenho das equipes no campeonato. Isso pode aumentar a chance de acerto do resultado de um jogo.

Mas no futebol são 11 contra 11 e tudo pode acontecer...

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

64 Duas cartas, de um baralho de 52, são extraídas sucessivamente e ao acaso. Qual é a probabilidade de saírem duas cartas de copas, se a extração é feita:

a) sem reposição?

b) com reposição?

65 Uma moeda e um dado são lançados simultaneamente. Qual é a probabilidade de ocorrer coroa e um número primo?

66 Em uma festa infantil, foram misturados, em uma caixa, 12 brindes para meninos e 15 para meninas, todos empacotados da mesma maneira. Dois brindes são retirados ao acaso, sucessivamente e sem reposição, da caixa. Qual é a probabilidade de que:

a) ambos sejam para meninos?

b) um seja para meninos e outro para meninas?

67 Refaça o exercício anterior, admitindo que a extração seja feita com reposição.

68 Em uma bandeja há dez pastéis, sendo três de palmito, quatro de carne e três de queijo, todos com o mesmo formato e aparência. Se Dudu retirar três deles ao acaso, sucessivamente e sem reposição, qual é a probabilidade de que:

CÍCERO VIÉGAS/ISUZU IMAGENS

a) todos sejam de carne?

b) exatamente dois deles sejam de palmito?

c) seja retirado um de cada sabor?

69 A probabilidade de um nadador **A** queimar a largada em uma competição é de 18%; para o nadador **B** essa probabilidade é de 12%. Se os dois nadadores estão disputando uma prova, qual é a probabilidade de que:

a) ambos queimem a largada?

b) nenhum deles queime a largada?

c) ao menos um queime a largada?

70 Dois estojos idênticos estão sobre uma mesa. Um deles tem 3 canetas pretas, 2 vermelhas e 3 azuis; o outro tem 2 canetas pretas, 4 azuis e 1 vermelha. Fabrício escolhe ao acaso um estojo e dele extrai, aleatoriamente, uma caneta. Qual é a probabilidade de Fabrício tirar uma caneta azul?

ALEX ARGOZINO

71 Sobre uma mesa há duas moedas: uma tem duas caras e a outra tem uma cara e uma coroa. Uma delas é escolhida ao acaso e lançada. Qual é a probabilidade de obter cara?

72 Um casal de matemáticos foi passar um fim de semana de verão na praia. Jorge havia lido as previsões meteorológicas na internet e disse à sua mulher: "A probabilidade de não chover no fim de semana é $\frac{17}{25}$ e a probabilidade de chover no domingo é $\frac{1}{5}$". A partir daí, perguntou a ela: "Qual é, então, a probabilidade de chover nos dois dias de viagem?"

73 De um baralho comum (52 cartas) extraímos, sucessivamente e sem reposição, duas cartas. Qual é a probabilidade de saírem cartas de naipes diferentes?

74 De cada 15 camisas que um varejista coloca à venda, 10 são fabricadas pela confecção $\mathbf{C_1}$ e 5 são fabricadas pela confecção $\mathbf{C_2}$. Os percentuais de camisas com defeito produzidas nas confecções $\mathbf{C_1}$ e $\mathbf{C_2}$ são, respectivamente, 4% e 1%.
Uma camisa que está à venda no varejista é selecionada ao acaso.

a) Qual é a probabilidade de que ela não apresente defeitos e tenha sido produzida em $\mathbf{C_1}$?

b) Qual é a probabilidade de a camisa apresentar defeito?

TROQUE IDEIAS

As chances na Mega-Sena

ANDRÉ HORTA/FOTOARENA

Apenas pessoas maiores de 18 anos podem apostar, conforme o artigo 81, inciso IV, da Lei nº 8.069/90.

Vamos voltar à introdução do capítulo, na qual citamos a Mega-Sena.

O volante da Mega-Sena, formulário em que os números da aposta são anotados, contém 60 números, de 1 a 60. Para concorrer, pode-se apostar em seis números (aposta mínima), sete, oito, ..., até 15 números (aposta máxima). A cada rodada, são sorteados seis números entre os 60. Há prêmios em dinheiro para quem acertar quatro números (quadra), cinco números (quina) e os seis números (sena).

Mas, afinal, se alguém fizer a aposta mínima, que chance tem de ganhar?

a) Qual é a probabilidade de acertar a sena com a aposta mínima?

b) Qual é a probabilidade de se fazer uma quadra (isto é, acertar exatamente 4 números) com a aposta mínima?

c) Qual é a probabilidade de se fazer a quina (isto é, acertar exatamente 5 números) com a aposta mínima?

d) Qual é a probabilidade de não se acertar qualquer número fazendo a aposta mínima?

e) Em janeiro de 2016, a aposta mínima custava R$ 3,50; já a aposta em 8 números custava R$ 98,00.

i) Quem aposta em 8 números está concorrendo com quantas senas?

ii) Há proporcionalidade entre os valores dessas apostas e as chances de acertar a sena?

iii) Apresente um cálculo que justifique a resposta anterior.

f) A aposta máxima consiste na escolha de 15 dezenas. Ao se optar pela aposta máxima, em quantas vezes aumenta-se a chance de acertar a sena?

g) Em janeiro de 2016, Aurélio possuía R$ 24,50 para apostar na Mega-Sena. Como ele sabia que a chance de acertar a sena é muito pequena, pensou em maximizar as chances de acertar a *quina*. Ele ficou em dúvida se valia a pena fazer 7 apostas mínimas (7 · R$ 3,50 = R$ 24,50) ou uma única aposta em 7 números, que também custava R$ 24,50.

Para acertar a *quina*, qual era a melhor opção para Aurélio?

DESAFIO

Alguns bancos usam o seguinte sistema complementar de segurança para digitação de senhas na internet: Na hora de digitar a senha, o usuário encontra, na tela do computador, cinco "botões", cada qual contendo um par de algarismos, colocados em ordem crescente. A composição dos "botões" é gerada aleatoriamente pelo sistema e não há repetição de algarismos. Veja a figura seguinte, que mostra uma possível configuração visualizada na tela:

$\boxed{\text{1 ou 6}}$ $\boxed{\text{3 ou 5}}$ $\boxed{\text{0 ou 7}}$ $\boxed{\text{8 ou 9}}$ $\boxed{\text{2 ou 4}}$

Se a senha do usuário for 350161, ele deve pressionar, sucessivamente: 2º, 2º, 3º, 1º, 1º e 1º "botões".

a) Ao acessar uma conta desse banco pela internet, qual é a probabilidade de que o usuário encontre a configuração

$\boxed{\text{0 ou 2}}$ $\boxed{\text{1 ou 3}}$ $\boxed{\text{4 ou 6}}$ $\boxed{\text{7 ou 8}}$ $\boxed{\text{5 ou 9}}$?

Admita que o sistema possa gerar, ao acaso, qualquer configuração.

b) Qual é a probabilidade de alguém que não conhece a senha de 6 dígitos de uma conta ter acesso a ela, nesse sistema, "chutando" todos os "botões" nos quais se encontra cada algarismo da senha?