CAPÍTULO 2

Razões trigonométricas na circunferência

No estudo das razões trigonométricas para ângulos agudos em um triângulo retângulo são definidos sen α, cos α e tg α para $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

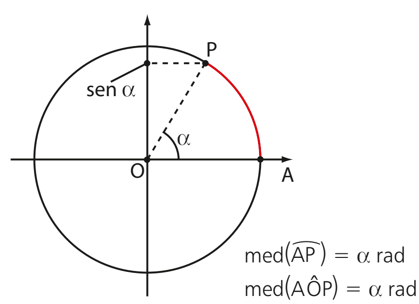
Vamos agora estender o conceito de seno, cosseno e tangente para um número real α, com $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$.

Seno

Seja **P** um ponto da circunferência trigonométrica, imagem de um número real α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$.

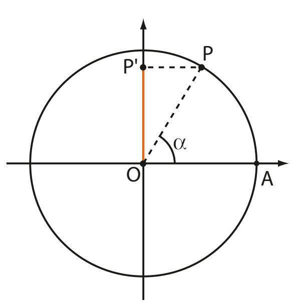
Definimos o **seno de** α como a ordenada do ponto **P**:

sen α = ordenada de **P**



Observe que, projetando ortogonalmente o ponto **P** sobre o eixo vertical, obtemos o ponto **P'**.

Considerando o sentido positivo ("para cima") do eixo vertical e tomando o segmento $\overline{OP'}$, podemos também definir o seno de α como a **medida algébrica** desse segmento, isto é,



$$\text{sen } \alpha = \text{med}\left(\overline{OP'}\right)$$

Daqui em diante, o eixo vertical da circunferência trigonométrica será chamado **eixo dos senos**.

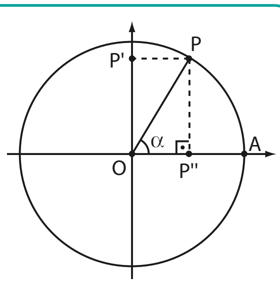
OBSERVAÇÃO

Observe a figura ao lado. Ela nos permite compreender que a definição anterior é "compatível" com a definição apresentada no estudo da trigonometria do triângulo retângulo:

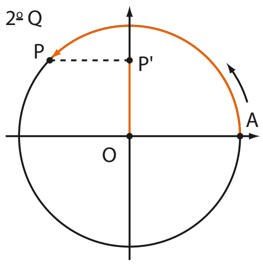
$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}};\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

Traçando o segmento $\overline{PP''}$ // $\overline{OP'}$, temos no $\triangle OPP''$:

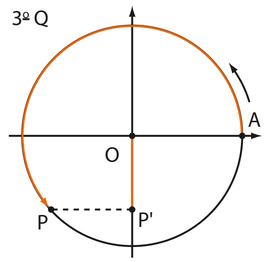
$$\text{sen } A\hat{O}P = \text{sen } \alpha = \frac{PP''}{OP} = \frac{PP''}{1} = PP'' = OP' = \text{med}\left(\overline{OP'}\right)$$



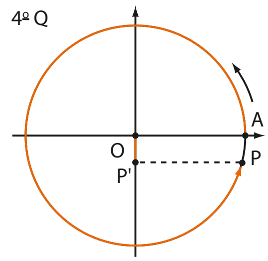
O mesmo procedimento é utilizado quando **P** ocupa posições nos demais quadrantes. Considerando o sentido positivo "para cima" do eixo dos senos, observe o sinal do seno de um número real α em cada quadrante, à medida que varia a posição de **P** (**P** é imagem de α).



ordenada de **P** > 0
sen $\alpha > 0$



ordenada de **P** < 0
sen $\alpha < 0$



ordenada de **P** < 0
sen $\alpha < 0$

PENSE NISTO:

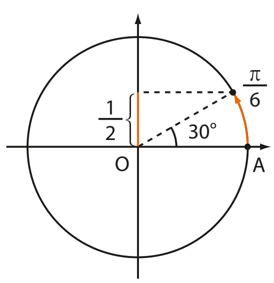
No 3º e no 4º quadrantes a medida algébrica do segmento $\overline{OP'}$ é positiva ou negativa?

OBSERVAÇÃO

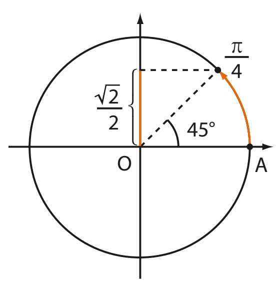
Como o raio da circunferência trigonométrica é unitário, temos que, para todo $\alpha \in [0, 2\pi]$, $-1 \leqslant \text{sen } \alpha \leqslant 1$, uma vez que a ordenada de qualquer ponto da circunferência trigonométrica varia de -1 a 1.

Valores notáveis

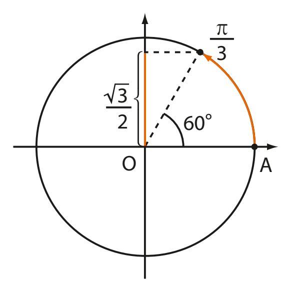
Já estamos familiarizados com o seno de alguns números reais, como $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{3}$:



$\text{sen } \frac{\pi}{6} = \text{sen } 30° = \frac{1}{2}$



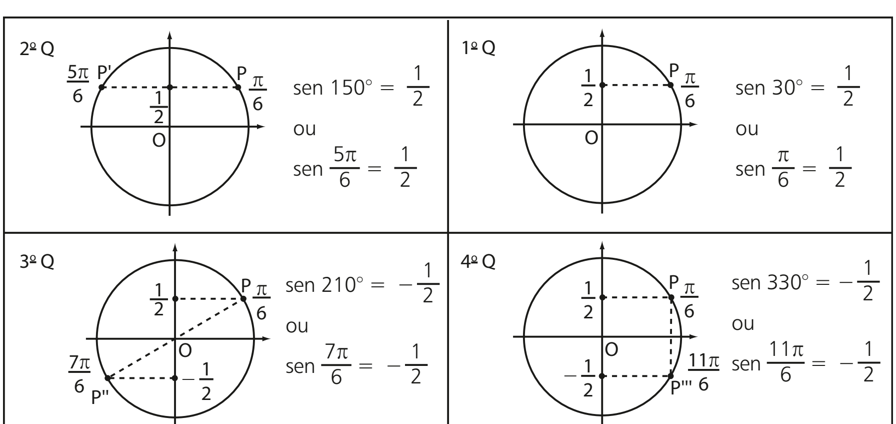
$\text{sen } \frac{\pi}{4} = \text{sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$



$\text{sen } \frac{\pi}{3} = \text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Usando os valores acima, é possível obter, por simetria, o seno de outros números reais.

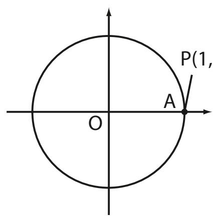
Acompanhe, na sequência dos quadrantes abaixo, os valores dos senos de números reais correspondentes a pontos simétricos de **P**, sendo **P** a imagem de $\frac{\pi}{6}$:



2º Q: $\text{sen } 150° = \frac{1}{2}$ ou $\text{sen } \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$	1º Q: $\text{sen } 30° = \frac{1}{2}$ ou $\text{sen } \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$
3º Q: $\text{sen } 210° = -\frac{1}{2}$ ou $\text{sen } \frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$	4º Q: $\text{sen } 330° = -\frac{1}{2}$ ou $\text{sen } \frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

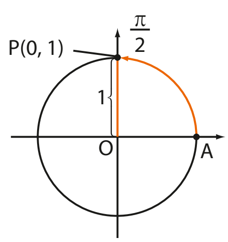
Observe que determinamos o valor do seno de um número real comparando-o com o seno de um outro número real $\left(\frac{\pi}{6}\right)$ cuja imagem pertence ao 1º quadrante. Esse processo é conhecido como **redução ao primeiro quadrante**.

Também é possível obter o valor do seno de números reais cujas imagens **P** coincidem com os pontos de interseção da circunferência trigonométrica com os eixos coordenados:



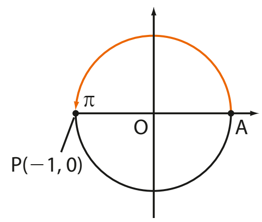
$\begin{cases} \text{sen } 0 = 0 \\ \text{sen } 0° = 0 \end{cases}$

A ordenada de **P** é 0.



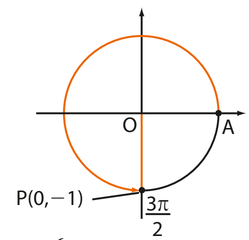
$\begin{cases} \text{sen } \frac{\pi}{2} = 1 \\ \text{sen } 90° = 1 \end{cases}$

A ordenada de **P** é 1.



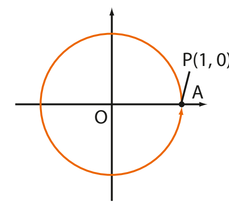
$\begin{cases} \text{sen } \pi = 0 \\ \text{sen } 180° = 0 \end{cases}$

A ordenada de **P** é 0.



$\begin{cases} \text{sen } \frac{3\pi}{2} = -1 \\ \text{sen } 270° = -1 \end{cases}$

A ordenada de **P** é −1.



$\begin{cases} \text{sen } 2\pi = 0 \\ \text{sen } 360° = 0 \end{cases}$

A ordenada de **P** é 0.

Na calculadora

Nas calculadoras científicas, é possível obter o valor do seno (e de outras razões trigonométricas, como veremos adiante) de um arco qualquer expresso em graus ou em radianos.

- Em graus, é preciso ajustar a calculadora na configuração **DEG** (*degree*, em inglês, significa grau) utilizando a tecla **MODE**.

  Para obtermos o valor de sen 36°, por exemplo, é preciso seguir a sequência abaixo:

  Primeiro ajustamos a configuração da calculadora para "graus":

  MODE → **DEG**

  Em seguida, utilizamos a tecla **sin** que fornece o valor do seno:

  sin → **3** **6** → **=** → 0.587785252

  Obtemos o valor aproximado 0,587785252.

- Em radianos, é preciso ajustar a calculadora na configuração **RAD**, usando-se a tecla **MODE**.

  Para obtermos o valor de sen $\frac{\pi}{5}$ $\left(\frac{\pi}{5}\text{ corresponde a } 36°\right)$, é preciso seguir a sequência abaixo:

  Ajustamos a configuração para "radianos":

  MODE → **RAD**

  sin → **(** → **π** → **÷** → **5** → **)** → **=** → 0.587785252

  Obtemos o valor aproximado 0,587785252.

  Observe a importância do uso dos parênteses: se pressionássemos

  sin → **π** → **÷** → **5**, a calculadora "entenderia" a operação: $\frac{\text{sen } \pi}{5}$, que é, obviamente, diferente de sen$\left(\frac{\pi}{5}\right)$ e obteríamos, como resultado, o número zero, pois sen $\pi = 0$.

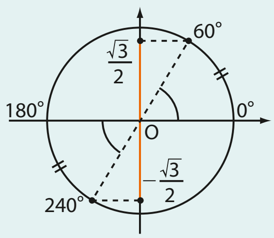
EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

1 Qual é o valor de:

a) sen 240°? **b)** sen 135°? **c)** sen $\frac{5\pi}{3}$? **d)** sen $\frac{7\pi}{6}$?

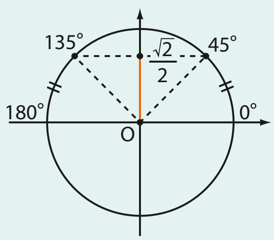
Solução:

a)



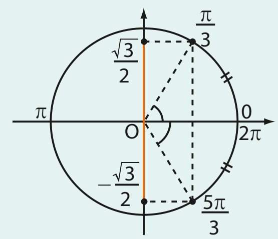
$$\text{sen } 240° = -\text{sen } 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

b)



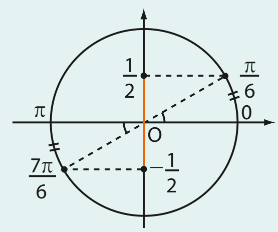
$$\text{sen } 135° = \text{sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

c) Observe, inicialmente, que $\frac{5\pi}{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3}$:



$$\text{sen } \frac{5\pi}{3} = -\text{sen } \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

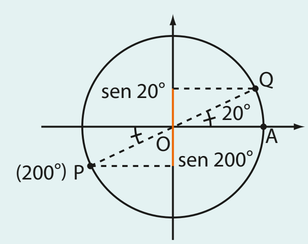
d) Note que $\frac{7\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}$:



$$\text{sen } \frac{7\pi}{6} = -\text{sen } \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

2 Utilizando a tabela trigonométrica, obtenha o valor de sen 200°. Confira a resposta usando uma calculadora científica.

Solução:



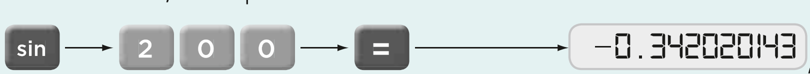
No cálculo de sen 200° podemos traçar, a partir do ponto **P**, o diâmetro da circunferência, obtendo o ponto **Q** no 1º quadrante.

Temos: med$(\text{A}\hat{\text{O}}\text{Q}) = 200° - 180° = 20°$.

Daí, sen 200° $= -$sen 20°.

Na tabela trigonométrica da página 276, temos: $-$sen 20° $= -0{,}34202$.

Na calculadora, basta pressionar

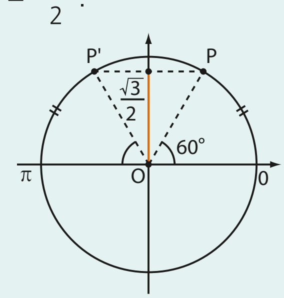


desde que ela esteja configurada na opção DEG. Obtemos o valor aproximado $-0{,}342020143$.

3 Resolva a equação sen x $= \frac{\sqrt{3}}{2}$, sendo U = [0, 2π[.

Solução:

Devemos determinar todos os números reais **x**, com $0 \leqslant x < 2\pi$, tal que sen x $= \frac{\sqrt{3}}{2}$.



Marcamos no eixo dos senos a ordenada $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Observe que tanto **P** como **P'** têm ordenada $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Como sen $\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\left(\text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, temos que **P** é imagem de $\frac{\pi}{3}$, e **P'** é imagem de $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

Assim, o conjunto solução da equação é $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\}$.

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

1 Calcule o valor da seguinte expressão:

$$y = \frac{\text{sen } 0 + \text{sen } \dfrac{\pi}{2} - \text{sen } \dfrac{3\pi}{2}}{2 \cdot \text{sen } \dfrac{\pi}{6}}$$

2 Dê o valor de:

a) sen $\frac{3\pi}{2}$
b) sen π
c) sen 120°
d) sen 150°
e) sen 225°
f) sen 300°
g) sen 2π
h) sen 330°

3 Localize os números reais $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$ e $\frac{5\pi}{3}$ na circunferência trigonométrica. Em seguida, forneça o seno de cada um deles.

4 Identifique os pares de números reais que possuem o mesmo seno:

$$\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{4\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$$

5 Sem consultar a tabela trigonométrica, compare os pares de valores seguintes:

a) sen 75° e sen 85°
b) sen 100° e sen 170°
c) sen 260° e sen 250°
d) sen 300° e sen 290°

6 Com auxílio da tabela trigonométrica da página 276, calcule:

a) sen 130°
b) sen 230°
c) sen 320°
d) sen $\frac{\pi}{5}$
e) sen $\frac{3\pi}{5}$

7 Determine o sinal de:

a) sen 3°
b) sen 3
c) sen 5
d) sen 100°
e) sen 200°

8 Sabendo que sen $\frac{\pi}{7}$ = a, responda:

a) a > 0 ou a < 0?
b) qual é o valor de sen $\frac{8\pi}{7}$, em função de **a**?

9 Resolva as equações seguintes, sendo U = [0, 2π[.

a) sen x = $\frac{1}{2}$
b) sen x = 0
c) sen x = −1
d) sen x = $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
e) sen x = 2
f) $4 \cdot \text{sen}^2\, x - 3 = 0$

10 Com uma calculadora científica, Joel desejava obter o valor de sen 4°, que ele sabia que era um número real positivo, pois 4° é um arco com imagem no 1º quadrante. Ao pressionar, obteve:

sin → 4 → = → −0.756802495

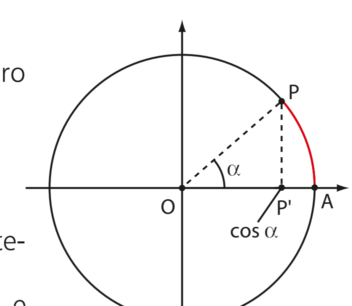
Explique a contradição encontrada. O que pode ter ocorrido?

Cosseno

Seja **P** um ponto sobre a circunferência trigonométrica, imagem do número real α, 0 ⩽ α ⩽ 2π.

Definimos o cosseno de α como a abscissa do ponto **P**:

$$\cos \alpha = \text{abscissa de } \mathbf{P}$$



med($\overset{\frown}{AP}$) = α rad
med(AÔP) = α rad

Ao projetarmos ortogonalmente esse ponto **P** sobre o eixo horizontal, obtemos o ponto **P'**.

Considerando o sentido positivo ("para a direita") do eixo horizontal e tomando o segmento $\overline{OP'}$, podemos também definir o **cosseno de** α como a **medida algébrica** desse segmento, isto é:

$$\cos \alpha = \text{med}(\overline{OP'})$$

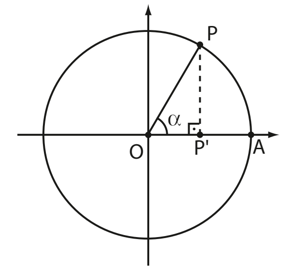
A partir desse momento, o eixo horizontal da circunferência trigonométrica será chamado **eixo dos cossenos**.

OBSERVAÇÃO

Na figura ao lado, é possível compreender que a definição anterior é "compatível" com a definição apresentada no estudo da trigonometria do triângulo retângulo:

$$\cos \alpha = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}, \text{ com } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

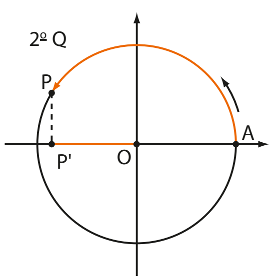
No triângulo retângulo POP', temos: $\cos A\hat{O}P = \cos \alpha = \frac{OP'}{OP} = \frac{OP'}{1} = OP' = \text{med}(\overline{OP'})$



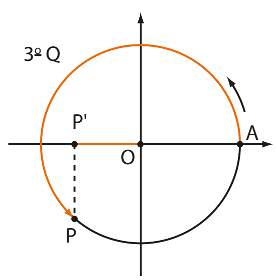
O mesmo procedimento é utilizado quando **P** (imagem do número real α) ocupa posições nos demais quadrantes. Lembre-se de que o sentido positivo do eixo dos cossenos é para a direita.

PENSE NISTO:

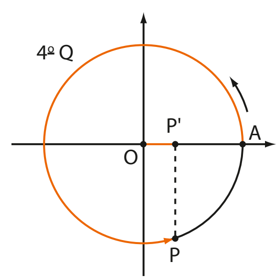
Qual é o sinal da medida algébrica do segmento $\overline{OP'}$ quando **P** está no 2º quadrante? E no 3º?



abscissa de **P** < 0
$\cos \alpha < 0$



abscissa de **P** < 0
$\cos \alpha < 0$



abscissa de **P** > 0
$\cos \alpha > 0$

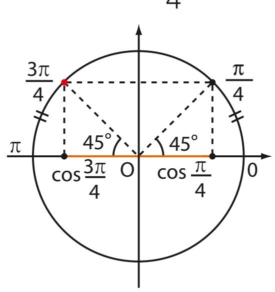
Observe que o cosseno de um arco qualquer, na circunferência trigonométrica, varia entre -1 e 1 (a exemplo do seno), isto é, $-1 \leqslant \cos \alpha \leqslant 1$.

Valores notáveis

Utilizando os valores dos ângulos notáveis, é possível obter, por simetria, o cosseno de outros números reais.

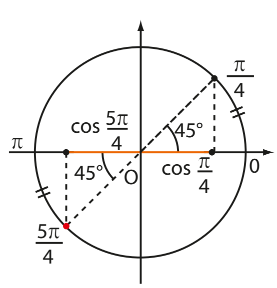
EXEMPLO 1

A partir de $\cos \frac{\pi}{4} = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, vamos obter os valores de $\cos \frac{3\pi}{4}$, $\cos \frac{5\pi}{4}$ e $\cos \frac{7\pi}{4}$.



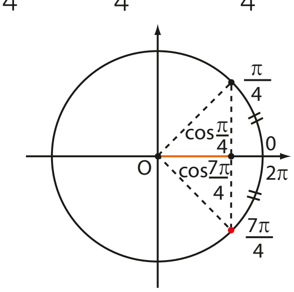
$$\cos \frac{3\pi}{4} = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 135° = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$\cos \frac{5\pi}{4} = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

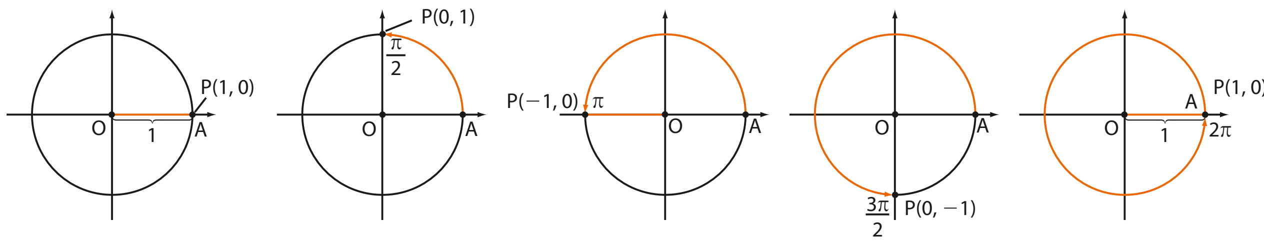
$$\cos 225° = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$\cos \frac{7\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 315° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Vamos, agora, obter o valor do cosseno de números reais cujas imagens **P** coincidem com os pontos de interseção da circunferência trigonométrica com os eixos coordenados:



A e **P** coincidem
$\begin{cases} \cos 0 = 1 \\ \cos 0° = 1 \end{cases}$
A abscissa de **P** é 1.

$\begin{cases} \cos \frac{\pi}{2} = 0 \\ \cos 90° = 0 \end{cases}$
A abscissa de **P** é 0.

$\begin{cases} \cos \pi = -1 \\ \cos 180° = -1 \end{cases}$
A abscissa de **P** é −1.

$\begin{cases} \cos \frac{3\pi}{2} = 0 \\ \cos 270° = 0 \end{cases}$
A abscissa de **P** é 0.

A e **P** coincidem
$\begin{cases} \cos 2\pi = 1 \\ \cos 360° = 1 \end{cases}$
A abscissa de **P** é 1.

Na obtenção dos valores do cosseno de um arco qualquer, medido em graus ou radianos, valem todos os comentários apresentados para o seno. Na calculadora científica, a tecla usada para obtenção dos valores do cosseno é cos.

Por exemplo, no cálculo de $\cos \frac{11\pi}{12}$ (lembre que o número $\frac{11\pi}{12}$ tem imagem no 2º quadrante), ajustamos a calculadora na configuração RAD e pressionamos:

cos → (→ 1 1 → x → π → ÷ → 1 2 →) → = ⟶ −0.965925826

Obtemos o valor aproximado −0,965925826.

PENSE NISTO:

Na figura central (considerando as cinco acima), qual é a medida algébrica de $\overline{OP}$?

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

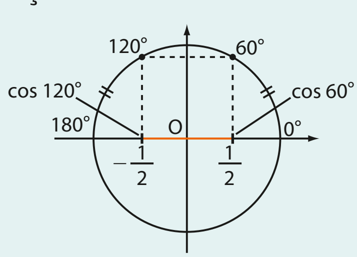
4 Obtenha, por redução ao primeiro quadrante, os valores abaixo.

a) cos 120°

b) $\cos \frac{4\pi}{3}$

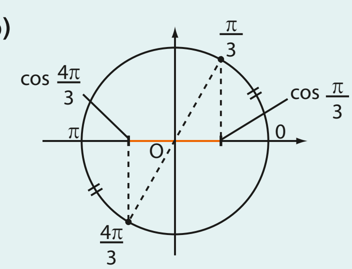
Solução:

a)



$\cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$

b)



$\cos \frac{4\pi}{3} = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

11 Calcule o valor de cada expressão seguinte:

a) $y = \dfrac{\cos 90° - \cos 180°}{\cos 60° \cdot \cos 0° + \cos 90°}$

b) $x = \cos \dfrac{\pi}{4} \cdot \cos \dfrac{\pi}{2} + \cos \pi \cdot \cos \dfrac{\pi}{6}$

12 Localize a imagem de cada um dos números reais $\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{5\pi}{6}$, $\dfrac{7\pi}{6}$ e $\dfrac{11\pi}{6}$ na circunferência trigonométrica. Em seguida, forneça o cosseno de cada um deles.

13 Localize a imagem de cada um dos números reais: $\dfrac{\pi}{5}$, $\dfrac{4\pi}{5}$, $\dfrac{6\pi}{5}$ e $\dfrac{9\pi}{5}$ na circunferência trigonométrica. Em seguida, forneça o sinal do cosseno de cada um deles.

14 Calcule:

a) cos 330°

b) cos 90°

c) cos 120°

d) cos π

e) $\cos \dfrac{3\pi}{2}$

f) $\cos \dfrac{5\pi}{4}$

g) $\cos \dfrac{5\pi}{3}$

h) cos 0

15 Sem usar a tabela trigonométrica, compare os seguintes pares de valores:

a) cos 65° e cos 85°

b) cos 91° e cos 89°

c) cos 50° e cos 340°

d) cos 190° e cos 170°

16 Se $k \in \mathbb{N}$ e $k < 4$, qual é a soma dos números reais da forma $\cos\left(k \cdot \dfrac{\pi}{2}\right)$?

17 Sabendo que $\cos \dfrac{12\pi}{7} = m$, determine:

a) o sinal de **m**;

b) o valor de $\cos \dfrac{9\pi}{7}$ em função de **m**.

18 Classifique como verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**) as afirmações seguintes e corrija as falsas.

a) cos 90° − cos 30° = cos 60°

b) $\left(\operatorname{sen} \dfrac{\pi}{3}\right)^2 + \left(\cos \dfrac{\pi}{3}\right)^2 = 1$

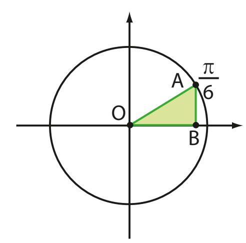
c) cos 2 < cos 1

d) sen 100° + cos 100° < 0

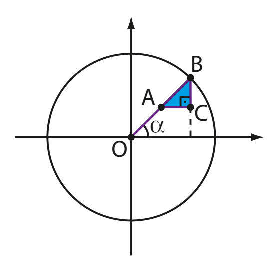
e) cos 6 < 0

f) Existe um número real **a**, tal que cos a = 2.

19 Observando a figura abaixo, encontre o perímetro e a área do triângulo OAB situado no 1º quadrante da circunferência trigonométrica.



20 Na circunferência trigonométrica abaixo, **A** é ponto médio de $\overline{OB}$ e **B** é a imagem do número real α. Encontre, em função de α, a área do triângulo ABC.



21 Resolva as equações seguintes, considerando U = [0, 2π[.

a) cos x = 0

b) $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

c) cos x = 1

d) $\cos x = -\dfrac{1}{2}$

e) $3 \cdot \cos x + 6 = 0$

f) $4 \cdot \cos^2 x = 3$

22 Na calculadora científica de Juliana, a tecla 4 está quebrada. Ela deseja obter o valor de $\cos \dfrac{4\pi}{5}$, sem converter $\dfrac{4\pi}{5}$ radianos para graus. Encontre uma maneira de ela resolver esse problema.

Relações entre seno e cosseno

Relação fundamental da trigonometria

Do estudo da trigonometria no triângulo retângulo, temos a relação fundamental da trigonometria:

$$\boxed{\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1},$$

sendo α a medida de um dos ângulos agudos do triângulo.

Vamos agora ampliar essa relação para a circunferência trigonométrica, mostrando que ela é válida para todo número real pertencente ao intervalo $[0, 2\pi]$.

Seja **P** a imagem de um número real $\alpha \in [0, 2\pi]$.

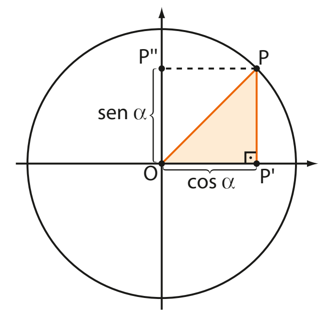
- Se **P** pertence ao primeiro quadrante, temos que:

  $$OP = 1; \quad OP' = \cos\alpha; \quad OP'' = \text{sen}\,\alpha$$

  Aplicando o teorema de Pitágoras no $\triangle OP'P$, temos:

  $(OP)^2 = (OP')^2 + (PP')^2 \Rightarrow 1 = (\cos\alpha)^2 + (\text{sen}\,\alpha)^2$,

  isto é, $\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

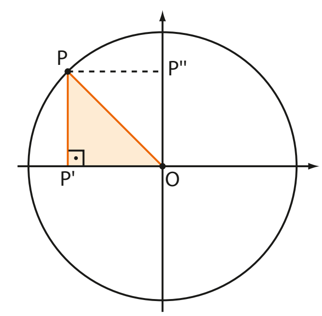


- Se **P** pertence ao segundo quadrante, temos:

  $$OP = 1; \quad PP' = OP'' = \text{sen}\,\alpha; \quad OP' = -\cos\alpha$$

  Daí:

  $1^2 = (\text{sen}\,\alpha)^2 + (-\cos\alpha)^2 \Rightarrow \text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$



- Se **P** pertence ao terceiro ou quarto quadrante, procedemos de modo semelhante ao que foi feito para o 2º quadrante.
- Se **P** coincide com algum dos pontos **A**, **B**, **C** ou **D** seguintes, temos:
  - **P** coincide com A(1, 0):

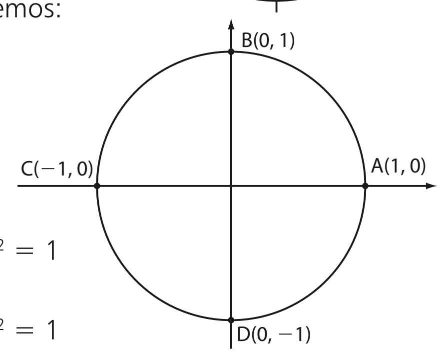
    $\cos\alpha = 1$ e $\text{sen}\,\alpha = 0$, então $\cos^2\alpha + \text{sen}^2\,\alpha = 1^2 + 0^2 = 1$
  - **P** coincide com B(0, 1):

    $\cos\alpha = 0$ e $\text{sen}\,\alpha = 1$, então $\cos^2\alpha + \text{sen}^2\,\alpha = 0^2 + 1^2 = 1$
  - **P** coincide com C(−1, 0):

    $\cos\alpha = -1$ e $\text{sen}\,\alpha = 0$, então $\cos^2\alpha + \text{sen}^2\,\alpha = (-1)^2 + 0^2 = 1$
  - **P** coincide com D(0, −1):

    $\cos\alpha = 0$ e $\text{sen}\,\alpha = -1$, então $\cos^2\alpha + \text{sen}^2\,\alpha = 0^2 + (-1)^2 = 1$

  Logo:



$$\boxed{\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1}, \text{ para todo } \alpha \in [0, 2\pi]$$

Essa relação permite obter o seno de um número real a partir do cosseno desse mesmo número, e vice-versa.

PENSE NISTO:

É verdade que $\text{sen}^2\,\alpha = (\text{sen}\,\alpha)^2$ para todo $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$?

E $\text{sen}^2\,\alpha = \text{sen}\,\alpha^2$?

EXEMPLO 2

Dado $\text{sen}\,x = \frac{1}{3}$, com $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, para obtermos cos x, usamos a relação fundamental

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \Rightarrow \cos x = \pm\sqrt{\frac{8}{9}} = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Como $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, notamos que **x** está no 2º quadrante e, consequentemente, $\cos x < 0$.

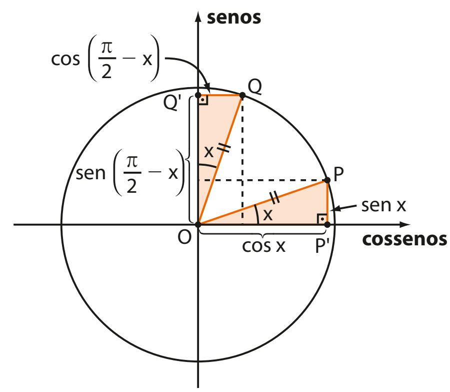
Assim, temos $\cos x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Arcos complementares

Quando estudamos os triângulos retângulos no volume 1 desta coleção, vimos que, se α e β são as medidas dos ângulos agudos de um triângulo retângulo ($\alpha + \beta = 90°$), então sen α = cos β e sen β = cos α.

Vamos agora estudar essa relação na circunferência trigonométrica.

Seja $x \in \mathbb{R}$, com $0 < x < \frac{\pi}{2}$.



Na circunferência trigonométrica ao lado, **P** é a imagem do número real **x** (ou do arco de medida **x** radianos), e **Q** é imagem do número real $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

Temos:

$$\begin{cases} OP' = \cos x \ \text{ e } \ PP' = \text{sen } x \\ QQ' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \ \text{ e } \ OQ' = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \end{cases}$$

Observando que:

$$\text{med}(P\hat{O}P') = \text{med}(Q\hat{O}Q')$$
$$OP = OQ = 1 \text{ (medida do raio)}$$

concluímos que os triângulos retângulos destacados são congruentes. Daí, temos:

$$PP' = QQ' \Rightarrow \text{sen } x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad \text{e} \quad OP' = OQ' \Rightarrow \cos x = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

23 Verifique a validade da relação fundamental para os seguintes números reais:

a) $\frac{\pi}{3}$ **b)** $\frac{\pi}{4}$ **c)** $\frac{2\pi}{3}$

24 Sendo $\cos x = \frac{3}{5}$, com **x** no 4º quadrante, determine sen x.

25 Um número real $\alpha \in [0, 2\pi]$ pode satisfazer simultaneamente sen $\alpha = \frac{1}{3}$ e $\cos \alpha = \frac{2}{3}$?

26 Se sen $x = -\frac{12}{13}$, com **x** no 3º quadrante, determine cos x.

27 Considerando sen $74° \simeq \frac{24}{25}$, calcule:

a) cos 74° **c)** cos 16° **e)** cos 164°
b) sen 16° **d)** sen 254°

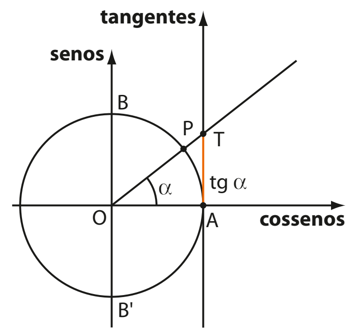
28 Sabendo que $\text{sen}^2\, \alpha = \frac{4}{9}$, $\alpha \in [0, 2\pi]$, obtenha o valor de cos α.

29 Determine os possíveis valores reais de **m** para que se tenha, simultaneamente, sen $\alpha = \frac{m}{2}$ e $\cos \alpha = m - 1$.

30 É verdade que $\text{sen}^2\, 20° + \text{sen}^2\, 70° = 1$? Explique, sem consultar a tabela trigonométrica.

31 Sabendo que sen $\alpha = -3 \cdot \cos \alpha$, com $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, obtenha o valor de $y = \text{sen } \alpha + \cos \alpha$.

Tangente



Para definirmos a tangente de um número real α, vamos acrescentar à circunferência trigonométrica um terceiro eixo.

Esse eixo, denominado **eixo das tangentes**, é obtido ao se tangenciar, por uma reta vertical, a circunferência no ponto A(1, 0). O ponto **A** é a origem do eixo das tangentes, e seu sentido positivo (para cima) coincide com o do eixo dos senos.

Unindo-se o centro **O** à extremidade **P** ($P \neq B$ e $P \neq B'$) de um arco de medida **α** radianos (em que **P** é imagem do número real α), construímos a reta $\overleftrightarrow{OP}$, que intersecta o eixo das tangentes no ponto **T**.

Por definição, a **medida algébrica** do segmento $\overline{AT}$ é a **tangente** do arco de α rad (ou tangente do número real **α**). Indicamos:

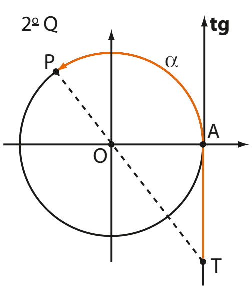
$$\text{tg}\ \alpha = \text{med}(\overline{AT})$$

PENSE NISTO:

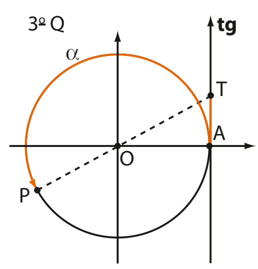
É verdade que tg α possui valor mínimo -1 e valor máximo igual a 1?

Considerando o sentido positivo do eixo das tangentes, temos, para **P** pertencente ao primeiro quadrante: $\text{tg}\ \alpha > 0$.

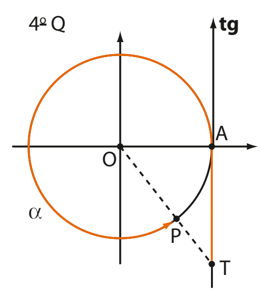
Façamos variar a posição de **P** nos demais quadrantes:



P é imagem de α.
T está abaixo de **A**.
$\text{tg}\ \alpha < 0$



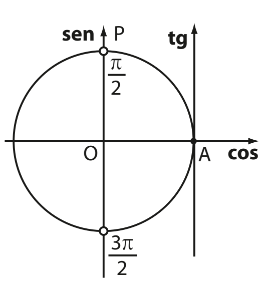
P é imagem de α.
T está acima de **A**.
$\text{tg}\ \alpha > 0$



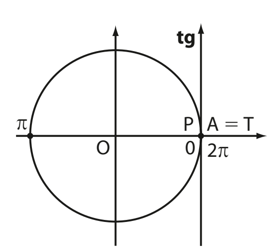
P é imagem de α.
T está abaixo de **A**.
$\text{tg}\ \alpha < 0$

OBSERVAÇÕES

- Se $\alpha = \frac{\pi}{2}$, o ponto **P** pertence ao eixo dos senos, e a reta $\overleftrightarrow{OP}$ é paralela ao eixo das tangentes. Neste caso, não se define $\text{tg}\ \frac{\pi}{2}$. Analogamente, não se define $\text{tg}\ \frac{3\pi}{2}$.



- Se $\alpha = 0$ ou $\alpha = \pi$ ou $\alpha = 2\pi$, a reta $\overleftrightarrow{OP}$ intersecta o eixo das tangentes em sua origem **A**. Assim $\text{med}(\overline{AT}) = 0$ e $\text{tg}\ 0 = 0$, $\text{tg}\ \pi = 0$ e $\text{tg}\ 2\pi = 0$.



Valores notáveis

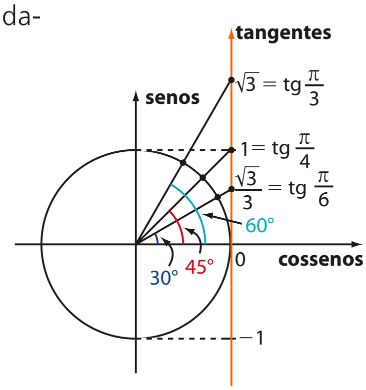
Já conhecemos os valores da tangente de ângulos notáveis quando estudamos a trigonometria do triângulo retângulo.

Observe esses valores na circunferência trigonométrica ao lado:

$\text{tg}\,\frac{\pi}{6} = \text{tg}\,30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\text{tg}\,\frac{\pi}{4} = \text{tg}\,45° = 1$

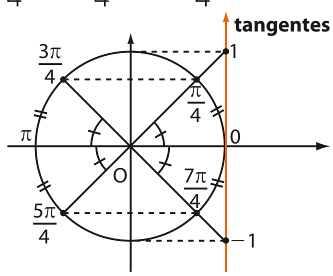
$\text{tg}\,\frac{\pi}{3} = \text{tg}\,60° = \sqrt{3}$



Com esses valores é possível determinar, por simetria, a tangente de outros arcos.

EXEMPLO 3

Na circunferência trigonométrica seguinte, a partir de $\text{tg}\,\frac{\pi}{4} = 1$, vamos encontrar os valores de $\text{tg}\,\frac{3\pi}{4}$, $\text{tg}\,\frac{5\pi}{4}$ e $\text{tg}\,\frac{7\pi}{4}$. Observe a congruência entre os ângulos assinalados.



Assim:

$\text{tg}\,\frac{3\pi}{4} = \text{tg}\,\frac{7\pi}{4} = -1$

$\text{tg}\,\frac{5\pi}{4} = \text{tg}\,\frac{\pi}{4} = 1$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

5 Com o auxílio da tabela trigonométrica da página 276, encontre o valor de tg 290°.

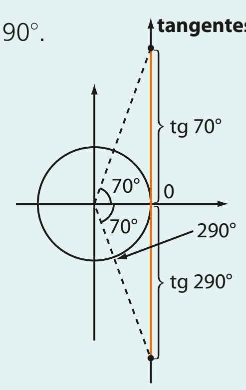
Solução:

Observe que $360° - 70° = 290°$.

Da figura, concluímos que $\text{tg}\,290° = -\text{tg}\,70°$.

Consultando a tabela trigonométrica, temos:

$$\text{tg}\,290° = -2{,}74748$$



EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

32 Calcule, se existir:

a) tg 120°
b) tg 180°
c) tg 210°
d) tg 90°
e) tg 240°

33 Calcule, se existir:

a) $\text{tg}\,\frac{3\pi}{2}$
b) tg 0
c) $\text{tg}\,\frac{5\pi}{3}$
d) $\text{tg}\,\frac{3\pi}{4}$
e) $\text{tg}\,\frac{11\pi}{6}$

34 Sendo $x = 30°$, calcule o valor da expressão:

$$y = \frac{2 \cdot \text{sen } x - 4 \cdot \cos x + \text{tg } (2x)}{\cos (4x) - \text{sen } (2x)}$$

35 Dê o sinal de:

a) tg 200° **c)** tg 4 **e)** tg 1

b) tg 310° **d)** tg 2

36 Classifique como verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**) as afirmações seguintes:

a) tg 100° < tg 105°

b) tg 20° > tg 25°

c) Existem dois números reais no intervalo $[0, 2\pi[$ cuja tangente vale 3.

d) tg 80° < sen 80°

e) tg 250° > 0

f) tg 2π não existe.

37 Mostre, geometricamente, que $\text{tg } \frac{\pi}{4} = 1$.

38 Considerando tg 22° ≃ 0,4, obtenha os valores de:

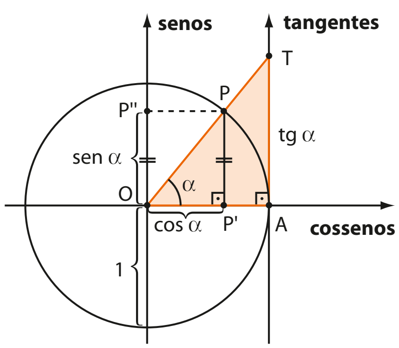
a) tg 158° **c)** tg 338°

b) tg 202°

Relação entre tangente, seno e cosseno

Vamos estabelecer uma importante relação da trigonometria envolvendo as três razões apresentadas: seno, cosseno e tangente.

Seja α um número real, com $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ e $\alpha \neq \frac{3\pi}{2}$.



- Vamos supor que α seja distinto de 0, π e 2π. O número real α tem imagem em **P**, extremidade do arco de α rad.

  Observando a figura ao lado, temos:

  $OP' = \cos \alpha$ $AT = \text{tg } \alpha$

  $OP'' = PP' = \text{sen } \alpha$ $OP = 1$ (raio)

Os triângulos OP'P e OAT são semelhantes, pois possuem em comum, além de um ângulo reto, também o ângulo de medida α. Podemos, então, estabelecer a proporção:

$$\frac{OP'}{OA} = \frac{P'P}{AT} \Rightarrow \frac{\cos \alpha}{1} = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{tg } \alpha} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$$

Se o ponto **P** pertence ao 2º, 3º ou 4º quadrantes, chega-se à mesma relação, usando procedimento similar.

- Se $\alpha \in \{0, \pi, 2\pi\}$, temos que $\text{tg } \alpha = 0$, $\text{sen } \alpha = 0$ e $\cos \alpha \neq 0$; daí $\text{tg } \alpha = 0 = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$.
- Se $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ou $\alpha = \frac{3\pi}{2}$, não se define a tangente.

Desse modo, se $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ e $\alpha \neq \frac{3\pi}{2}$, vale a relação:

$$\boxed{\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}}$$

OBSERVAÇÃO

Quando estudamos a trigonometria no triângulo retângulo, definimos, para um ângulo agudo α:

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}$$

Note que essa definição é compatível com a relação apresentada anteriormente. De fato, considerando o triângulo retângulo OPP' da figura anterior, temos:

$$\text{tg } \alpha = \frac{\overbrace{PP'}^{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}}{\underbrace{OP'}_{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}} = \frac{OP''}{OP'} = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$$

EXEMPLO 4

Os valores da tangente de ângulos notáveis e de outros ângulos podem ser obtidos usando a relação apresentada:

- Se $\alpha = \frac{\pi}{3}$, então $\text{tg}\,\frac{\pi}{3} = \frac{\text{sen}\,\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$.
- Se $\alpha = \frac{\pi}{4}$, então $\text{tg}\,\frac{\pi}{4} = \frac{\text{sen}\,\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$.
- Se $\alpha = 40°$, então $\text{tg}\,40° = \frac{\text{sen}\,40°}{\cos 40°}$.

Consultando a tabela trigonométrica, obtemos:

$$\text{tg}\,40° = \frac{0{,}64279}{0{,}76604} = 0{,}83910762\ldots$$

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

6 Seja α um número real pertencente ao intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. Sabendo que $\text{tg}\,\alpha = 2$, qual é o valor de $\text{sen}\,\alpha$? E de $\cos\alpha$?

Solução:

De $\text{tg}\,\alpha = 2$, podemos escrever $\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = 2 \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = 2 \cdot \cos\alpha$.

Aplicando a relação fundamental da trigonometria ($\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$), temos:

$(2\cos\alpha)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow 4 \cdot \cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow 5 \cdot \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{5}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$

Como $\alpha \in$ 1º quadrante, temos $\cos\alpha > 0$ e, assim, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ e $\text{sen}\,\alpha = 2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

39 Sabendo que $\text{sen}\,\alpha = \frac{1}{3}$ e $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, determine o valor de $\text{tg}\,\alpha$.

40 Se $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ e $\cos\alpha = 0{,}2$, qual é o valor de $\text{tg}\,\alpha$?

41 Se $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ e $\text{tg}\,x = -4$, obtenha o valor de:

a) $\text{sen}\,x$ **b)** $\cos x$

42 Considerando $\text{tg}\,58° \simeq \frac{8}{5}$, determine o valor de:

a) $\text{sen}\,58°$ **b)** $\text{sen}\,32°$ **c)** $\text{tg}\,302°$ **d)** $\text{tg}\,122°$

DESAFIO

Resolva as equações seguintes, considerando $U = [0, 2\pi[$:

a) $\cos^2 x - \text{sen}^2\,x = 0$

b) $\cos^2 x + 2 - 3 \cdot \text{sen}^2\,x = 0$