CAPÍTULO 3

Trigonometria em triângulos quaisquer

No estudo dos triângulos retângulos, são definidas as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente para ângulos agudos.

Com a definição de seno, cosseno e tangente na circunferência trigonométrica, é possível relacionar as medidas dos lados e dos ângulos de outros triângulos, como o acutângulo e o obtusângulo. Na última parte deste capítulo, vamos conhecer outro método para calcular a área de um triângulo.

É com esse objetivo que estudaremos agora a lei dos senos e a lei dos cossenos.

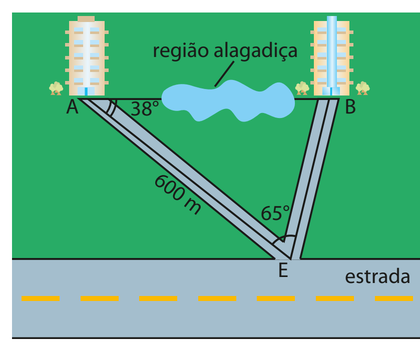
Lei dos senos

Do entroncamento (**E**) de uma rodovia saem dois pequenos trechos retilíneos de estrada, em um terreno plano, que levam aos portões de entrada de dois condomínios, indicados pelas letras **A** e **B**.

Deseja-se determinar a distância entre **A** e **B**, mas a medição direta é difícil, pois há uma região alagadiça entre esses pontos.

Observe o esquema ao lado. Com auxílio de um teodolito, um topógrafo mediu, a partir de **E**, o ângulo entre as retas $\overleftrightarrow{AE}$ e $\overleftrightarrow{EB}$, obtendo 65°. Em seguida, percorreu os 600 metros do trecho $\overline{EA}$ e, a partir do ponto **A**, mediu o ângulo entre as retas $\overleftrightarrow{EA}$ e $\overleftrightarrow{AB}$, obtendo 38°.

Conhecedor de matemática, o topógrafo sabia que já tinha reunido informações suficientes para determinar a distância entre os portões de entrada dos dois condomínios (distância entre **A** e **B**).



CJT/ZAPT

Elementos sem proporção entre si.

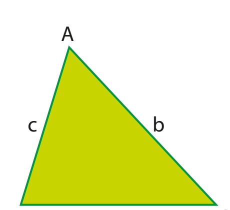
Por meio do teorema que apresentaremos a seguir, conhecido como **lei dos senos**, poderemos resolver esse e outros problemas.

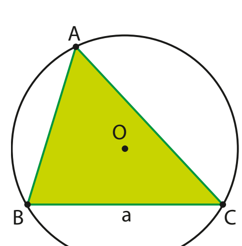
Teorema

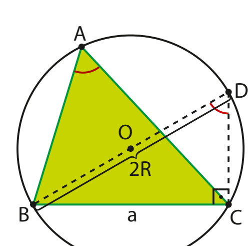
As medidas dos lados de um triângulo são proporcionais aos senos dos respectivos ângulos opostos, e a constante de proporcionalidade é igual à medida do diâmetro da circunferência circunscrita a esse triângulo.

Demonstração:

Dado um triângulo ABC, consideremos a circunferência circunscrita a ele. Sejam **O** e **R**, respectivamente, o centro e a medida do raio dessa circunferência. **Â**, **B̂** e **Ĉ** são os ângulos do triângulo ABC com vértices em **A**, **B** e **C**, respectivamente:





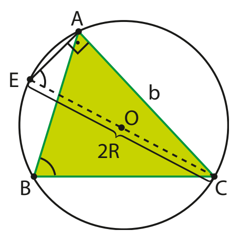


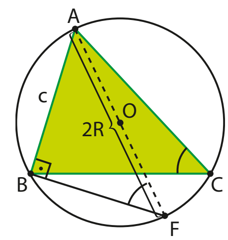
Traçando o diâmetro $\overline{BD}$, temos med($B\hat{A}C$) = med($B\hat{D}C$), pois $B\hat{A}C$ e $B\hat{D}C$, como ângulos inscritos (isto é, seus vértices são pontos da circunferência e seus lados são secantes a ela), veem o arco comum $\overset{\frown}{BC}$ e determinam a mesma corda $\overline{BC}$ na circunferência.

Como o triângulo BDC é inscrito em uma semicircunferência, ele é retângulo em **C**:

$$\text{sen}\,(B\hat{D}C) = \frac{BC}{BD} = \frac{a}{2R} \Rightarrow \text{sen}\,\hat{A} = \frac{a}{2R} \Rightarrow \frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = 2R$$

De modo análogo, temos:





Assim: $\dfrac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} = 2R$ e $\dfrac{c}{\text{sen}\,\hat{C}} = 2R$.

Segue a expressão da lei dos senos:

$$\frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}} = 2R$$

OBSERVAÇÕES

- Se um dos ângulos for reto ($\triangle ABC$ retângulo), a demonstração é análoga; usa-se o fato de que sen 90° = 1.
- Se um dos ângulos for obtuso ($\triangle ABC$ obtusângulo), usa-se raciocínio análogo e a relação: $\text{sen}\,(180° - \hat{A}) = \text{sen}\,\hat{A}$.

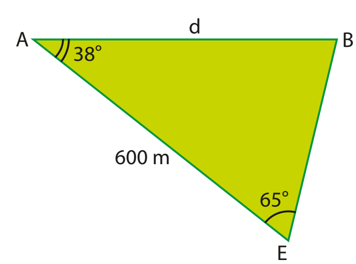
EXEMPLO 1

Voltemos ao problema da distância entre os portões dos dois condomínios apresentado na página anterior.

Vamos construir o modelo geométrico que representa a situação descrita.

Temos:

$$\text{med}(A\hat{B}E) = 180° - (65° + 38°) = 77°$$



A distância **d** entre os pontos **A** e **B** pode ser obtida por meio da lei dos senos:

$$\frac{d}{\text{sen}\,65°} = \frac{600}{\text{sen}\,77°}$$

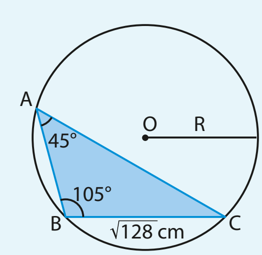
Consultando a tabela trigonométrica da página 276 ou uma calculadora científica, obtemos os valores de sen 65° e de sen 77°:

$$\frac{d}{0{,}90631} = \frac{600}{0{,}97437} \Rightarrow d \simeq 558$$

Logo, a distância entre **A** e **B** é 558 metros.

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

1 No triângulo ABC ao lado, determine as medidas do lado $\overline{AB}$ e do raio da circunferência circunscrita.



Solução:

$\text{med}(\hat{C}) = 180° - (45° + 105°) = 30°$

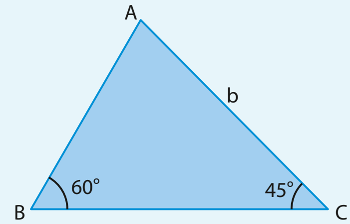
Pela lei dos senos: $\dfrac{BC}{\text{sen}\,\hat{A}} = \dfrac{AB}{\text{sen}\,\hat{C}} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{128}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{AB}{\frac{1}{2}} \Rightarrow AB = \sqrt{64} = 8$

O lado $\overline{AB}$ mede 8 cm.

Usando a constante de proporcionalidade: $2R = \dfrac{AB}{\text{sen}\,\hat{C}} = \dfrac{AB}{\text{sen}\,30°} = \dfrac{8}{\frac{1}{2}} = 16 \Rightarrow R = 8$

O raio da circunferência circunscrita ao triângulo mede 8 cm.

2 Calcule as medidas dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ do triângulo ao lado, em função da medida **b** do lado $\overline{AC}$. Use a tabela trigonométrica ou uma calculadora científica.



Solução:

Observe que $med(\hat{A}) = 180° - 60° - 45° = 75°$

Pela lei dos senos: $\dfrac{b}{\text{sen } 60°} = \dfrac{AB}{\text{sen } 45°} = \dfrac{BC}{\text{sen } 75°}$

Consultando a tabela das razões trigonométricas ou usando a calculadora, temos:

$AB = \underbrace{\dfrac{\text{sen } 45°}{\text{sen } 60°}}_{\simeq 0{,}816} \cdot b$ e $BC = \underbrace{\dfrac{\text{sen } 75°}{\text{sen } 60°}}_{\simeq 1{,}115} \cdot b$, isto é, $AB \simeq 0{,}816b$ e $BC \simeq 1{,}115b$

PENSE NISTO:

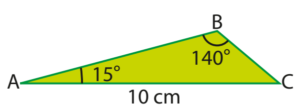
Podemos também escrever $AB = \dfrac{\sqrt{6}}{3} \cdot b$?

EXERCÍCIOS

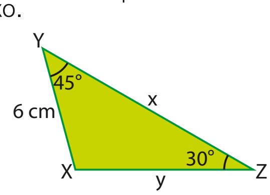
FAÇA NO CADERNO

1 Num triângulo ABC são dados $med(\hat{B}) = 60°$, $med(\hat{C}) = 45°$ e $AB = 8$ cm. Determine o comprimento de $\overline{AC}$.

2 No triângulo ABC da figura, determine as medidas de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$. Use a tabela trigonométrica da página 276 ou uma calculadora científica.



3 Dado $\text{sen } 75° = \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$, determine **x** e **y** na figura abaixo.

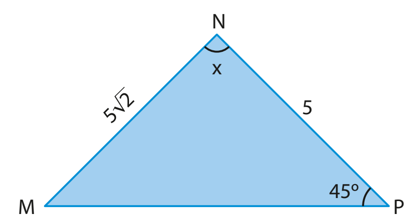


4 O proprietário de um terreno deseja conhecer a distância entre sua casa e a nascente de um rio. O caminho da casa à nascente, porém, é de difícil acesso.

A partir da frente da casa e com auxílio de um teodolito, mediu o ângulo através do qual avistava a nascente e o pomar, obtendo 48°. Caminhou, então, 420 metros em linha reta até o pomar, de onde mirou a nascente e a casa segundo um ângulo de 64°. Quantos metros separam sua casa da nascente? Use a tabela trigonométrica da página 276 ou uma calculadora científica.


GRAPHORAMA

5 Determine a medida **x** do ângulo $M\hat{N}P$.



6 Determine a medida do raio da circunferência circunscrita a um triângulo ABC, sendo $BC = 15$ cm e $med(\hat{A}) = 30°$.

7 Entre os pontos **A** e **B**, extremidades do lado de um terreno, existe uma região plana alagadiça, cuja extensão deseja-se estimar. Um topógrafo, situado em **A**, avistou um posto rodoviário situado na estrada sob um ângulo de 40° em relação a $\overline{AB}$. Dirigiu-se, então, ao posto, situado a 1500 metros de **A**, e avistou as extremidades do terreno sob um ângulo de 85°. Considere: $\text{sen } 55° \simeq 0{,}82$; $\text{sen } 85° \simeq 0{,}99$ e $\text{sen } 40° \simeq 0{,}64$.

GRAPHORAMA

a) Qual é a extensão da região alagadiça?

b) Qual é a distância entre o posto e o ponto **B**?

8 Um triângulo possui dois ângulos com medidas 30° e 70° e está inscrito numa circunferência de raio 12 m. Usando a tabela trigonométrica da página 276 ou uma calculadora científica, determine a medida de seu lado:

a) menor. **b)** maior.

9 Duas casas de veraneio **X** e **Y** estão situadas na mesma margem de um rio. De **X** avistam-se a casa **Y** e a entrada de um clube particular na outra margem, sob um ângulo de 56°. De **Y** avistam-se a entrada do clube e a casa **X**, sob um ângulo de 42°.

GRAPHORAMA

Sabendo que a distância entre **X** e a entrada do clube é de 600 metros, determine o número inteiro mais próximo que representa:

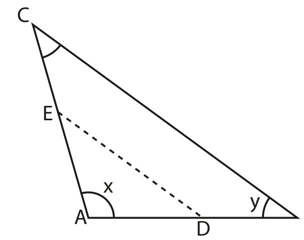
a) a distância entre a entrada do clube e **Y**.

b) a distância entre as casas **X** e **Y**.

c) a largura do rio.

Admita que, nesse trecho, as margens do rio são paralelas e use os valores: sen 42° $\simeq$ 0,67; sen 56° $\simeq$ 0,83 e sen 82° $\simeq$ 0,99.

10 (Unesp-SP) Cinco cidades, **A**, **B**, **C**, **D** e **E**, são interligadas por rodovias conforme mostra a figura.

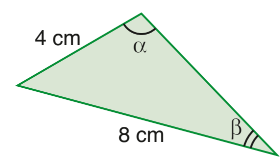


A rodovia $\overline{AC}$ tem 40 km, a rodovia $\overline{AB}$ tem 50 km, os ângulos **x**, entre $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, e **y**, entre $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, são tais que sen x $= \frac{3}{4}$ e sen y $= \frac{3}{7}$. Deseja-se construir uma nova rodovia ligando as cidades **D** e **E** que, dada a disposição destas cidades, será paralela a $\overline{BC}$.

a) Use a lei dos senos para determinar quantos quilômetros tem a rodovia $\overline{BC}$.

b) Sabendo que $\overline{AD}$ tem 30 km, determine quantos quilômetros terá a rodovia $\overline{DE}$.

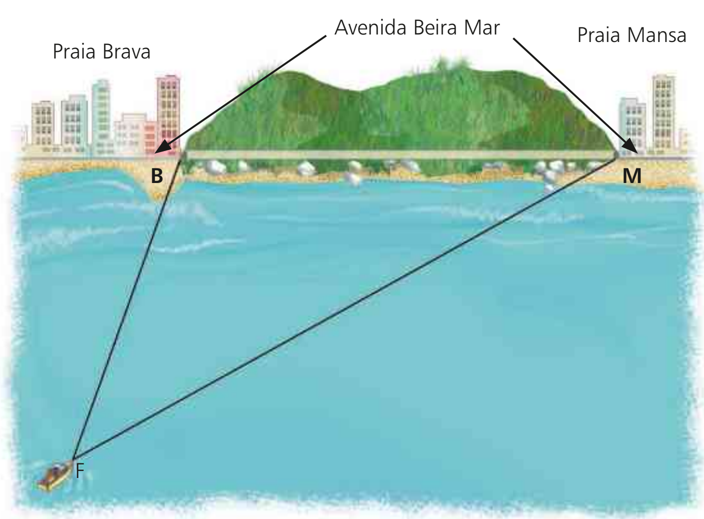
11 Na figura a seguir, sabe-se que $\cos \alpha = -\frac{1}{4}$. Determine o valor de sen β.



Lei dos cossenos

A prefeitura de uma cidade litorânea está estudando a viabilidade de construir um túnel com traçado retilíneo para atravessar um trecho montanhoso. Esse túnel ligaria diretamente as praias Brava e Mansa pela avenida Beira Mar, que está interrompida entre elas. Vamos supor que todo o terreno ao redor dos morros seja plano.

Em uma pequena embarcação e munido de aparelhos de medição, um funcionário especializado avistou, do ponto **F**, o último condomínio residencial na avenida Beira Mar, no final da praia Brava, representado pelo ponto **B**, e um outro condomínio, logo no começo da praia Mansa, na avenida Beira Mar, representado pelo ponto **M**. Observe a figura ao lado.



ALBERTO DE STEFANO

Feitas as medições, o funcionário verificou que, naquele momento, estava a 1,5 km de **B** e a 3,2 km de **M**; além disso, mediu o ângulo formado pelas retas $\overleftrightarrow{FB}$ e $\overleftrightarrow{FM}$, obtendo med$(B\hat{F}M) = 41°$.

Se o projeto for aprovado, quantos quilômetros de extensão terá o túnel de traçado retilíneo, considerando a medida do segmento $\overline{BM}$ como base para a determinação da extensão desse túnel?

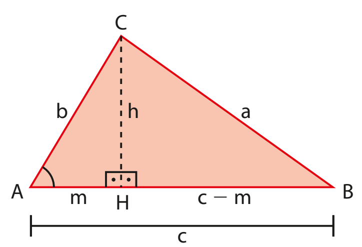
Por meio do teorema a seguir, denominado **lei dos cossenos**, podemos resolver esse e outros problemas.

Teorema

Em todo triângulo, o quadrado da medida de qualquer lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois, menos o dobro do produto da medida desses lados pelo cosseno do ângulo por eles formado.

Demonstração:

- Sejam o triângulo **acutângulo** ABC, e CH = h, a medida da altura relativa ao lado $\overline{AB}$.



$$\left.\begin{array}{l}\triangle BCH\text{: } a^2 = h^2 + (c - m)^2 \\ \triangle ACH\text{: } h^2 = b^2 - m^2\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 - m^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot m + m^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot m \quad (1)$$

$$\triangle ACH\text{: } \cos \hat{A} = \frac{m}{b} \Rightarrow m = b \cdot \cos \hat{A} \quad (2)$$

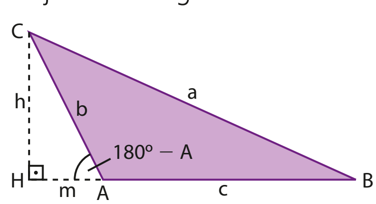
Substituindo (2) em (1), obtemos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

Analogamente, podemos obter:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B} \qquad \text{e} \qquad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$

- Sejam o triângulo ABC **obtusângulo** em **Â**, e CH = h, a medida da altura relativa ao lado $\overline{AB}$.



$$\left.\begin{array}{l}\triangle BCH\text{: } a^2 = h^2 + (c + m)^2 \\ \triangle ACH\text{: } h^2 = b^2 - m^2\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 - m^2 + c^2 + 2 \cdot c \cdot m + m^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2 \cdot c \cdot m \quad (1)$$

$$\triangle CHA\text{: } \cos (180° - A) = \frac{m}{b}\text{, isto é, } m = b \cdot \cos (180° - A) =$$

$$= b \cdot (-\cos \hat{A}) = -b \cdot \cos \hat{A}$$

$$m = -b \cos \hat{A} \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1), obtemos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

Analogamente, podemos obter:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B} \qquad \text{e} \qquad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$

- No caso de o triângulo ABC ser **retângulo** (em **Â**, por exemplo), como cos 90° = 0, verifica-se a igualdade $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos 90°$, que se reduz à expressão do teorema de Pitágoras. Para cada um dos dois ângulos agudos do triângulo (**B̂** e **Ĉ**), a igualdade decorre também do teorema de Pitágoras.

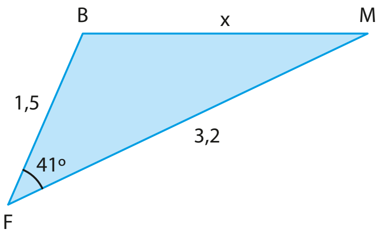
Como pudemos perceber nos três casos, em qualquer triângulo ABC, temos:

$$\begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B} \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C} \end{array}$$

Cada uma das relações acima é conhecida como **lei dos cossenos**.

EXEMPLO 2

Considerando o problema sobre a extensão do túnel, proposto na introdução da lei dos cossenos, podemos construir um modelo geométrico para representar a situação descrita:



$\overline{BF}$: distância entre o ponto **F** e o condomínio **B**.
$\overline{MF}$: distância entre o ponto **F** e o condomínio **M**.
$\overline{BM}$: extensão do futuro túnel.

Aplicando a lei dos cossenos, temos:

$$x^2 = 1{,}5^2 + 3{,}2^2 - 2 \cdot 1{,}5 \cdot 3{,}2 \cdot \cos 41°$$

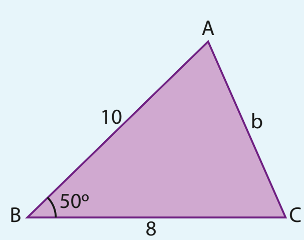
Considerando $\cos 41° \simeq 0{,}75$, temos:

$$x^2 = 2{,}25 + 10{,}24 - 9{,}6 \cdot 0{,}75$$
$$x^2 = 12{,}49 - 7{,}2$$
$$x^2 = 5{,}29 \Rightarrow x = 2{,}3$$

Assim, o futuro túnel terá 2,3 km (ou 2 300 m) de extensão.

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

3 Na figura seguinte, determine a medida do lado $\overline{AC}$ e a medida do ângulo com vértice em **A**. Use a tabela trigonométrica da página 276 ou a calculadora.



Solução:

Determinando a medida AC:

$b^2 = 8^2 + 10^2 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \cos 50°$

$b^2 = 164 - 160 \cdot \cos 50°$

$b^2 = 164 - 160 \cdot 0{,}64279$

$b \simeq 7{,}82$

Para determinar a medida do ângulo com vértice em **A**, podemos usar:

- a lei dos cossenos:

$$8^2 = 10^2 + 7{,}82^2 - 2 \cdot 10 \cdot 7{,}82 \cdot \cos \hat{A}$$
$$64 = 161{,}1524 - 156{,}4 \cdot \cos \hat{A}$$
$$\cos \hat{A} \simeq 0{,}62$$

Consultando a tabela trigonométrica encontramos o ângulo cujo cosseno é mais próximo de 0,62, o ângulo 52°.

med($\hat{A}$) $\simeq$ 52°

ou

- a lei dos senos:

$$\frac{8}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{7{,}82}{\text{sen } 50°} \Rightarrow \text{sen } \hat{A} \simeq 0{,}7837$$

Como $B\hat{A}C$ é agudo (pois opõe-se a $\overline{BC}$, que não é o maior lado do triângulo ABC), temos que med($\hat{A}$) $\simeq$ 52° (pela tabela trigonométrica).

PENSE NISTO:

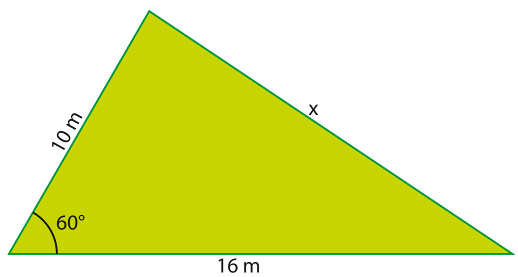
Como podemos obter a medida do ângulo com vértice em **A** a partir de seu seno usando a calculadora científica?

EXERCÍCIOS

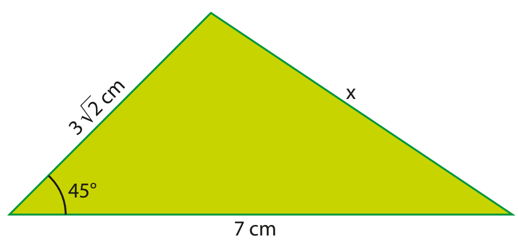
FAÇA NO CADERNO

12 Determine o valor de **x** em cada caso:

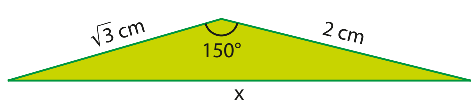
a)



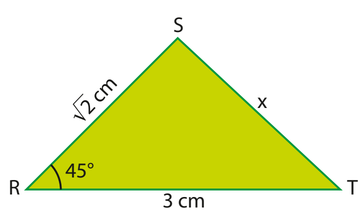
b)



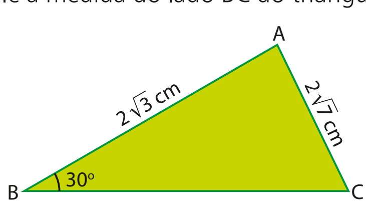
c)



13 Obtenha o perímetro do triângulo RST abaixo.

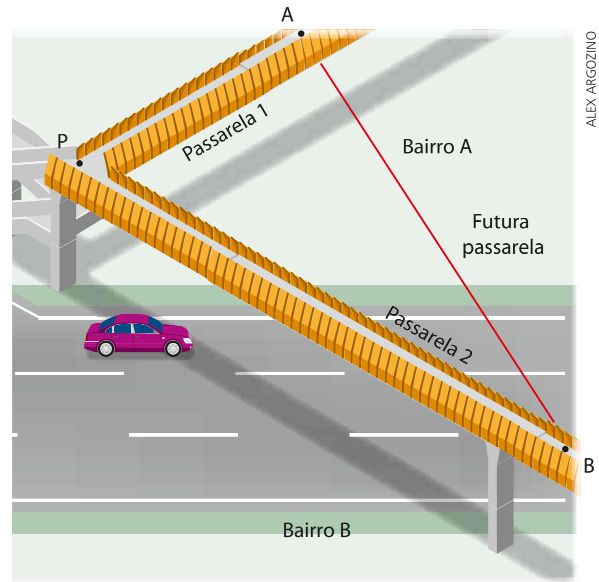


14 Calcule a medida do lado $\overline{BC}$ do triângulo abaixo.



15 O acesso ao aeroporto de uma cidade é feito por duas vias de contorno retilíneo que se cruzam segundo um ângulo de 53°. A primeira tem 2,1 km de extensão, e a outra, 3,5 km de extensão. As vias têm origem em dois postos de gasolina. Qual é a distância entre esses postos? Use $\cos 53° \simeq 0{,}6$.

16 A prefeitura de uma cidade está estudando a viabilidade de construir uma terceira passarela sobre a rodovia, ligando os bairros **A** e **B** diretamente, a partir das passarelas já construídas.



Elementos sem proporção entre si.

O acesso atual é feito pelas passarelas 1 e 2, que ligam os bairros **A** e **B**, respectivamente, ao ponto **P**. Medições feitas pela empresa contratada mostram que as passarelas 1 e 2 medem, respectivamente, 130 m e 220 m. O ângulo formado pelas passarelas 1 e 2 mede 60°.

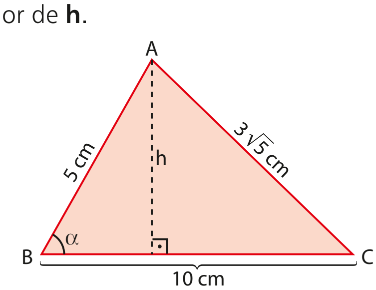
Se o projeto for aprovado, quantos metros de extensão terá a passarela que ligará diretamente os dois bairros? Admita que as extremidades **A**, **P** e **B** estejam na mesma altura em relação ao solo.

17 Na figura, sendo $\text{med}(A\hat{B}C) = \alpha$, determine:

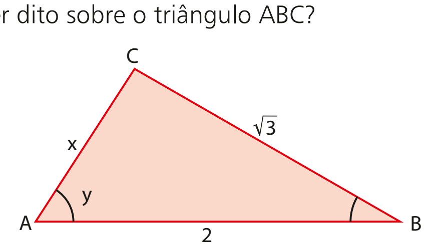
a) $\cos \alpha$.

b) o valor de **h**.

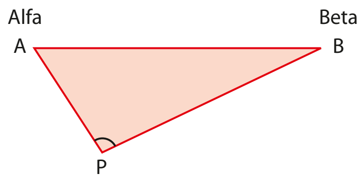
c) a área do triângulo ABC.



18 Encontre os valores de **x** e **y** na figura. O que pode ser dito sobre o triângulo ABC?

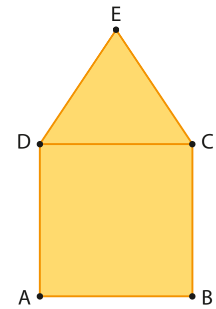


19 Um motorista de caminhão precisa fazer entregas nas cidades Alfa e Beta, distantes $10\sqrt{13}$ km (aproximadamente 36 km) entre si. Do ponto **P** em que se encontra, na bifurcação de uma estrada, ele sabe que a distância a Beta é o triplo da distância a Alfa.

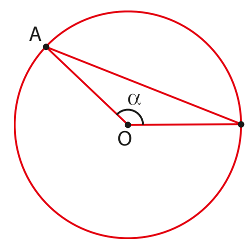


Sabendo que med$(A\hat{P}B) = 120°$ e que a velocidade máxima permitida no trecho de **P** a Beta é de 50 km/h, determine o tempo mínimo que será gasto para chegar a Beta, onde será feita a primeira entrega.

20 Na figura, o perímetro do quadrado ABCD mede 24 cm e o triângulo DEC é equilátero. Determine a medida de $\overline{AE}$.



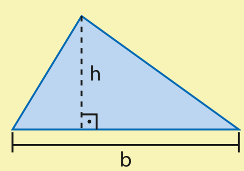
21 Na figura abaixo, a medida de $\overline{AB}$ é 60% maior que a medida do raio da circunferência de centro **O**. Determine tg α.



TROQUE **IDEIAS**

Área de um triângulo

Já sabemos, da Geometria Plana, que a área da superfície limitada por um triângulo (ou, simplesmente, área de um triângulo) é dada pelo semiproduto da medida da base pela medida da altura relativa a essa base:

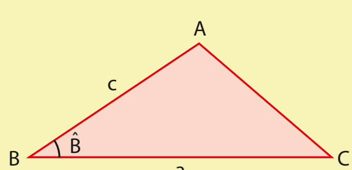


$$\text{Área} = \frac{b \cdot h}{2}$$

Vamos considerar agora uma situação particular: conhecemos as medidas de dois lados do triângulo e do ângulo formado por esses lados. Nessa situação, existe uma maneira mais prática para o cálculo da área.

Propriedade:

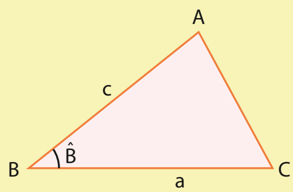
Em qualquer triângulo, a área é igual ao semiproduto das medidas de dois lados pelo seno do ângulo por eles formado.



$$\text{Área} = \frac{a \cdot c \cdot \text{sen}\,\hat{B}}{2} \quad (1)$$

- Nessa atividade você está convidado a demonstrar essa propriedade e, na sequência, resolver problemas utilizando essa fórmula.

a) No $\triangle ABC$ acutângulo seguinte, são conhecidas as medidas **a** e **c** dos lados $\overline{BC}$ e $\overline{AB}$, respectivamente, e a medida do ângulo $A\hat{B}C$.



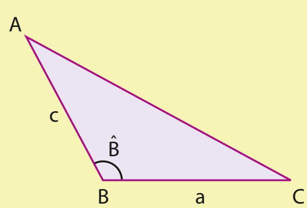
Prove a validade da fórmula (1).

Sugestão: Utilize a fórmula geral da área de um triângulo; considere $\overline{BC}$ como base e trace a altura $\overline{AH}$ relativa a $\overline{BC}$.

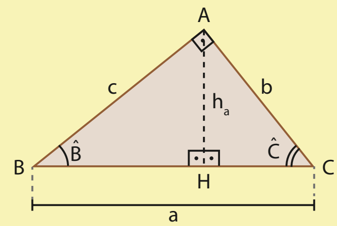
b) Prove a validade da fórmula (1), considerando o $\triangle ABC$ obtusângulo em $\hat{\mathbf{B}}$.

Dados: **a**, **c** e $\hat{\mathbf{B}}$.

Sugestão: Utilize o mesmo procedimento do item *a*; você precisará usar a relação entre os senos de ângulos suplementares.



Observação: No caso do $\triangle ABC$ ser retângulo em **A**, por exemplo, considerando a hipotenusa $\overline{BC}$ como base, temos:



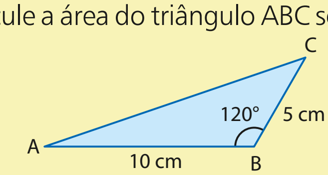
$$\text{Área} = \frac{a \cdot h_a}{2}$$

Como $h_a = c \cdot \text{sen}\,\hat{B} = b \cdot \text{sen}\,\hat{C}$, segue (1).

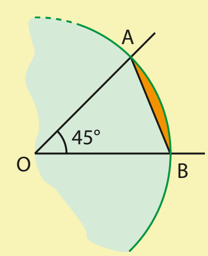
c) Considerando agora um dos catetos como base, por exemplo $\overline{AB}$, explique como se obtém a fórmula $\dfrac{b \cdot c \cdot \text{sen}\,\hat{A}}{2}$.

d) Agora é hora de aplicar os resultados obtidos nos itens anteriores! Resolva os dois problemas a seguir.

i) Calcule a área do triângulo ABC seguinte:



ii) Na figura, AOB é um setor circular de 45° contido em um círculo de raio 4 cm. Qual é o valor da área destacada em laranja?

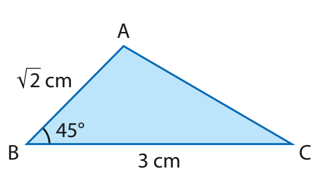


EXERCÍCIOS

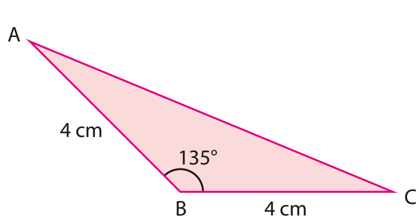
FAÇA NO CADERNO

22 Calcule, em cada caso, a área do triângulo ABC:

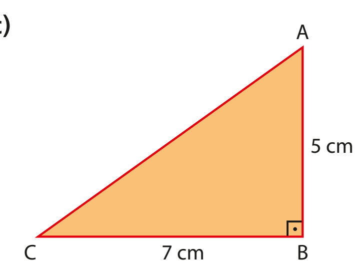
a)



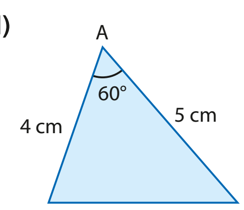
b)



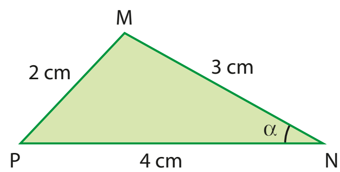
c)



d)



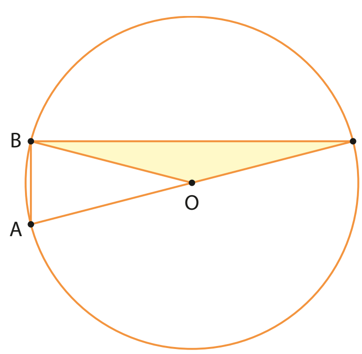
23 Dado o triângulo MNP abaixo, determine:



a) o valor de cos α, utilizando a lei dos cossenos;
b) o valor de sen α, utilizando a relação fundamental da trigonometria;
c) a área do triângulo MNP.

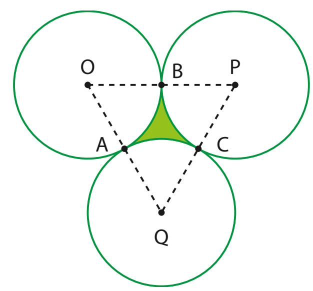
24 Um terreno triangular tem frentes de 6 m e 8 m em ruas que formam entre si um ângulo de 65°. Qual é a área do terreno? Quanto mede o terceiro lado do terreno?
Considere sen 65° $\simeq$ 0,9 e $\sqrt{19} \simeq 4{,}4$.

25 Na figura, **O** é o centro da circunferência cujo comprimento é 10 π cm.
Sabendo que med$(A\hat{B}O) = 75°$, determine:
a) a área do triângulo BOC;
b) a medida do ângulo $A\hat{B}C$.



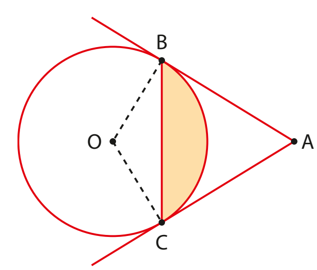
26 As medidas de dois lados consecutivos de um paralelogramo são 5 cm e $2\sqrt{3}$ cm. O ângulo agudo formado por esses lados mede 30°.
a) Quanto medem as diagonais desse paralelogramo?
b) Qual é a área desse paralelogramo?

27 Na figura, as três circunferências têm centros em **O**, **P** e **Q** e raio com medida 2 cm. Elas são, duas a duas, tangentes externamente, nos pontos **A**, **B** e **C**. Calcule a área:



a) do triângulo AOB;
b) da região colorida.

28 Na figura seguinte, temos OA = 6 cm e OB = 3 cm. As retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ são tangentes à circunferência de centro **O** nos pontos **B** e **C**, respectivamente.



Qual é a área da região colorida?
Sugestão: Lembre que toda reta tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio no ponto de tangência.

DESAFIO

O hexágono ABCDEF é regular e seu perímetro é 48 cm.
Do vértice **A** saem 3 diagonais. Qual é a soma das medidas dessas três diagonais?