CAPÍTULO 4

Funções trigonométricas

Introdução

Na tabela abaixo, constam as previsões para a maré alta e para a maré baixa durante três dias consecutivos de maio de 2015, para o porto de Ilhéus, no sul do Estado da Bahia.

Porto de Ilhéus – Malhado (Estado da Bahia)

Latitude: 14°46,8'S **Instituição**: DHN | **Longitude**: 39°01,6'W **40 Componentes** | **Fuso**: +03 **Nível Médio**: 1,12 m | **Ano**: 2015 **Carta**: 01201

JOÁ SOUZA/AG. A TARDE

	Hora	Altura (m)
SÁB 4/5/2015	3 h 41 min	2,0
	9 h 51 min	0,2
	16 h 02 min	2,1
	22 h 06 min	0,2
DOM 5/5/2015	4 h 09 min	2,0
	10 h 21 min	0,2
	16 h 38 min	2,0
	22 h 43 min	0,2
SEG 6/5/2015	4 h 47 min	2,0
	10 h 56 min	0,2
	17 h 09 min	2,0
	23 h 15 min	0,3

Fonte: Marinha do Brasil. Disponível em: <www.mar.mil.br/dhn/chm/box-previsao-mare/tabuas/40145Jan2016.htm>. Acesso em: 10 mar. 2016.

Observe que:

- As marés altas ocorrem de 12 em 12 horas, aproximadamente, como mostram os destaques na cor vermelha da tabela.
- As marés baixas ocorrem, também, de 12 em 12 horas, aproximadamente, como mostra a tabela.
- As alturas da maré alta praticamente se repetem de 12 em 12 horas: com apenas uma exceção, todas as alturas previstas para a maré alta medem 2,0 m.
- As alturas da maré baixa praticamente se repetem de 12 em 12 horas: com apenas uma exceção, todas as alturas previstas para a maré baixa medem 0,2 m = 20 cm.

Neste capítulo, veremos outros fenômenos como o descrito: que se repetem em intervalos de tempo iguais. São os chamados **fenômenos** ou **movimentos periódicos**.

Vamos definir aqui as funções trigonométricas, a partir de uma ampliação na circunferência trigonométrica, em que associaremos a qualquer número real um ponto da circunferência.

Os fenômenos periódicos podem ser descritos, de maneira aproximada, por modelos matemáticos que envolvem, geralmente, funções trigonométricas. Na seção *Aplicações*, deste capítulo, iremos conhecer mais sobre a modelagem matemática de alguns desses fenômenos.

As demais voltas na circunferência trigonométrica

No capítulo 1, quando definimos a circunferência trigonométrica, associamos a cada ponto da circunferência um número real pertencente ao intervalo $[0, 2\pi[$.

Essa associação possui caráter biunívoco, ou seja, além de a cada ponto da circunferência estar relacionado um único número real **x**, $x \in [0, 2\pi[$, também, reciprocamente, a cada número real desse intervalo associa-se um ponto sobre a circunferência trigonométrica.

Vamos estender o intervalo dessa associação:

> A cada número real está associado um ponto da circunferência.

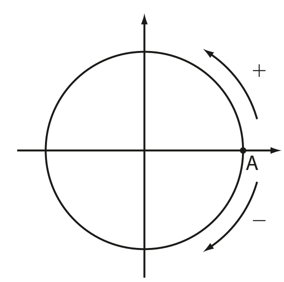
Isso permitirá a definição das funções **trigonométricas** (ou funções **circulares**), além de garantir o seu caráter cíclico (ou periódico).

Até o capítulo anterior trabalhamos apenas na "primeira volta", ou seja, no intervalo $[0, 2\pi[$.

Com a inclusão dos números reais negativos e dos números reais maiores que (ou iguais a) 2π, poderemos ampliar nosso estudo às demais voltas.

Seja $x \in \mathbb{R}$. Como podemos determinar o ponto **P**, imagem de **x**?

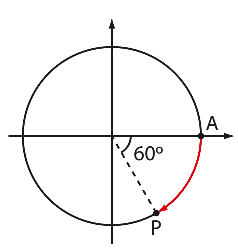
- Se $x > 0$, partimos do ponto A(1, 0) e percorremos, no sentido anti-horário, um arco de comprimento **x** (e medida x rad), cujas extremidades são **A** e **P**.
- Se $x < 0$, partimos do ponto A(1, 0) e percorremos, no sentido horário, um arco de comprimento $|x|$, cujas extremidades são **A** e **P**.
- Se $x = 0$, a imagem **P** é o próprio ponto **A**.



Veja os exemplos a seguir.

EXEMPLO 1

$x = -\dfrac{\pi}{3}$



P é imagem de $-\dfrac{\pi}{3}$.

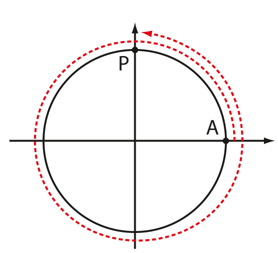
O comprimento do arco $\overset{\frown}{AP}$ é igual a $\left|-\dfrac{\pi}{3}\right| = \dfrac{\pi}{3}$.

EXEMPLO 2

$x = \dfrac{5\pi}{2}$

Observe que

$$\frac{5\pi}{2} = \frac{4\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \underbrace{2\pi}_{\text{uma volta completa}} + \frac{\pi}{2}$$

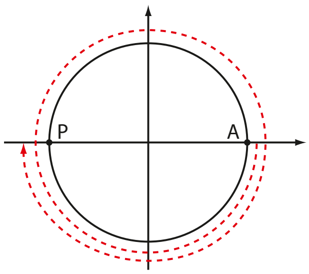


P é imagem de $\dfrac{5\pi}{2}$.

EXEMPLO 3

$x = -3\pi$

Note que $-3\pi = \underbrace{-(2\pi + \pi)}_{\text{uma volta e meia no sentido horário}}$



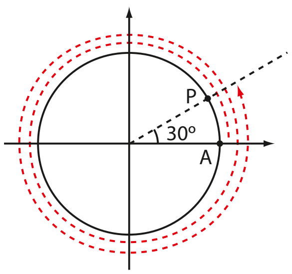
P é imagem de -3π.

EXEMPLO 4

$x = \dfrac{25\pi}{6}$

Observe que

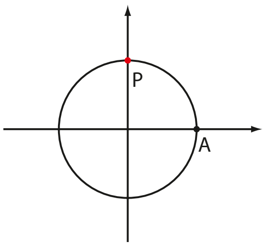
$\dfrac{25\pi}{6} = \dfrac{24\pi}{6} + \dfrac{\pi}{6} = \underbrace{4\pi}_{\text{duas voltas completas}} + \dfrac{\pi}{6}$



P é imagem de $\dfrac{25\pi}{6}$.

Não é difícil perceber que um determinado ponto da circunferência trigonométrica é imagem de infinitos números reais.

Veja, por exemplo, o ponto **P** nesta figura:



Sabemos que **P** é imagem de $\dfrac{\pi}{2}$. Para obter outros números reais cuja imagem também seja **P**, podemos fazer:

- $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi = \dfrac{5\pi}{2}$
- $\dfrac{\pi}{2} + 2 \cdot 2\pi = \dfrac{\pi}{2} + 4\pi = \dfrac{9\pi}{2}$
- $\dfrac{\pi}{2} + 3 \cdot 2\pi = \dfrac{\pi}{2} + 6\pi = \dfrac{13\pi}{2}$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

Percorremos, a partir de **A**, no sentido anti-horário, um arco de comprimento $\dfrac{\pi}{2}$ e, em seguida, demos 1, 2, 3, ... voltas completas, no mesmo sentido.

- $\dfrac{\pi}{2} - 2\pi = -\dfrac{3\pi}{2}$
- $\dfrac{\pi}{2} - 2 \cdot 2\pi = \dfrac{\pi}{2} - 4\pi = -\dfrac{7\pi}{2}$
- $\dfrac{\pi}{2} - 3 \cdot 2\pi = \dfrac{\pi}{2} - 6\pi = -\dfrac{11\pi}{2}$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

Percorremos, a partir de **A**, no sentido anti-horário, um arco de comprimento $\dfrac{\pi}{2}$ e, em seguida, demos 1, 2, 3, ... voltas completas, no outro sentido (horário).

De modo geral, possuem imagem em **P** todos os números reais da forma:

$\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, sendo **k** um número inteiro.

Todos os arcos assim construídos $\left(\ldots, -\frac{11\pi}{2}, -\frac{7\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \frac{13\pi}{2}, \ldots\right)$ têm extremidades em **A** e **P**. Eles são chamados **arcos côngruos**.

PENSE NISTO:

Note que, se dois arcos, de medidas α_1 e α_2 radianos, são côngruos, então $\alpha_1 - \alpha_2 = k \cdot 2\pi$, sendo $k \in \mathbb{Z}$.

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

1 Represente, na circunferência trigonométrica, as imagens dos números reais **x** tais que $x = \frac{k\pi}{2}$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Solução:

Atribuímos valores inteiros para **k**:

$\vdots$

$k = -2 \Rightarrow x = -\pi$; a imagem é **C**

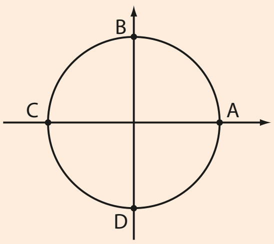
$k = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2}$; a imagem é **D**

$k = 0 \Rightarrow x = 0$; a imagem é **A**

$k = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$; a imagem é **B**

$k = 2 \Rightarrow x = \pi$; a imagem é **C**

$\vdots$



Assim, as imagens correspondentes aos números reais da forma $\frac{k\pi}{2}$, para **k** inteiro, são os pontos: **A**, **B**, **C** ou **D**.

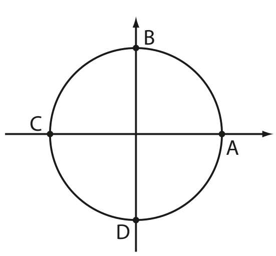
EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

1 Agrupe os seguintes números reais de acordo com os quadrantes em que se encontram suas imagens na circunferência trigonométrica.

$-\frac{3\pi}{4}, \frac{22\pi}{3}, \frac{17\pi}{4}, -\frac{19\pi}{6}, \frac{26\pi}{3}, -\frac{5\pi}{4}, -0{,}5, \frac{41\pi}{5}, -\frac{11\pi}{3}, 10, -\frac{49\pi}{10}$ e $\frac{15\pi}{4}$

2 Indique, na circunferência trigonométrica, as imagens dos seguintes números reais: $13\pi, -\frac{5\pi}{2}, 40\pi, \frac{7\pi}{2}, \frac{17\pi}{2}, -21\pi, -14\pi, -\frac{11\pi}{2}, -7\pi, -\frac{25\pi}{2}$ e 800π.



3 Represente, na circunferência trigonométrica, as imagens dos números reais que pertencem aos seguintes conjuntos:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$

b) $B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $C = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{5} + k \cdot 2\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = -\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

e) $E = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

4 As imagens dos números reais pertencentes ao conjunto $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{k \cdot \pi}{3};\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ são os vértices de um polígono regular na circunferência trigonométrica.

a) Como se chama esse polígono?

b) Obtenha seu perímetro e sua área.

Funções periódicas

No dia a dia, é comum encontrarmos diversos fenômenos que se repetem após o mesmo intervalo de tempo:

- os dias da semana repetem-se de 7 em 7 dias, de 14 em 14 dias, de 21 em 21 dias etc.;
- os meses do ano repetem-se de 12 em 12 meses, de 24 em 24 meses, de 36 em 36 meses etc.;
- as horas cheias, em um relógio analógico, repetem-se de 12 em 12 horas, de 24 em 24 horas, de 36 em 36 horas etc.

O menor intervalo de tempo em que ocorre a repetição de um determinado fato ou fenômeno é chamado de **período**.

Outros exemplos de fenômenos periódicos são as fases da Lua; a altura das marés; o movimento dos braços (para frente e para trás) dos praticantes de *cooper* em uma corrida; o fluxo de ar através da traqueia, durante a inspiração ou expiração, no processo de respiração humana etc.

Na Matemática também existem funções que apresentam um comportamento periódico. Vejamos os exemplos a seguir.

EXEMPLO 5

Seja $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida pela lei $f(x) = (-1)^x$. Acompanhe na tabela alguns valores que **f** assume à medida que **x** varia em $\mathbb{N}$:

x	f(x)
0	1
1	−1
2	1
3	−1
4	1
5	−1
⋮	⋮

Não é difícil perceber que:

- se **x** é par, $f(x) = 1$;
- se **x** é ímpar, $f(x) = -1$.

Observe que:

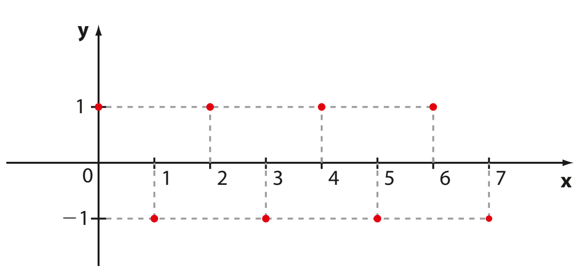
- $f(0) = f(2) = f(4) = f(6) = f(8) = \ldots$
- $f(1) = f(3) = f(5) = f(7) = f(9) = \ldots$

Nos dois casos, quando **x** varia por duas unidades, o valor de f(x) se repete:

$$f(x) = f(x + 2) = f(x + 4) = f(x + 6) = \ldots$$

O menor valor positivo de **p** para o qual $f(x) = f(x + p)$ é 2. Dizemos então que o período dessa função é 2.

Observe o gráfico de **f**:



PENSE NISTO:

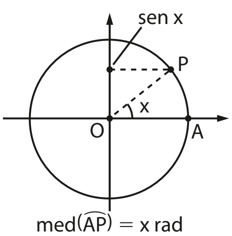
A função $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida por $f(x) = 2 \cdot (-1)^x$ é periódica?

Uma função f: A $\rightarrow$ B é periódica se existir um número real positivo **p** tal que $f(x) = f(x + p)$, $\forall x \in A$.
O menor valor positivo de **p** é chamado de **período** de **f**.

Como veremos a seguir, as funções trigonométricas são exemplos de funções periódicas e podem modelar vários fenômenos periódicos.

Estudaremos duas funções trigonométricas: a **função seno** e a **função cosseno**.

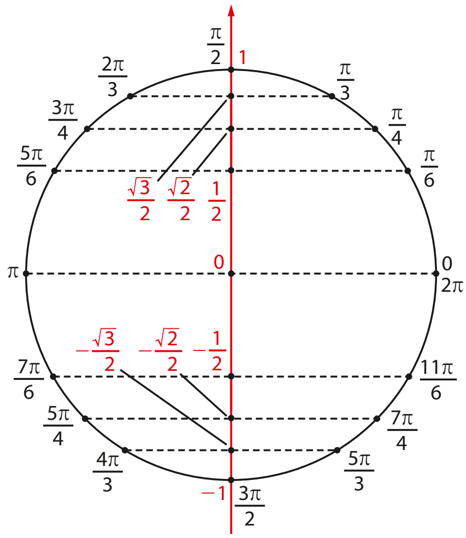
Função seno



Seja **x** um número real e **P** sua imagem na circunferência trigonométrica.

Denominamos de **função seno** a função f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada número real **x** o seu seno, isto é, $f(x) = \text{sen } x$.

Observe que **f** associa a cada número real **x** a ordenada do ponto correspondente à sua imagem **P** na circunferência trigonométrica. É importante lembrar que a ordenada de qualquer ponto pertencente à circunferência trigonométrica varia entre -1 e 1, isto é, $-1 \leqslant \text{sen } x \leqslant 1$.



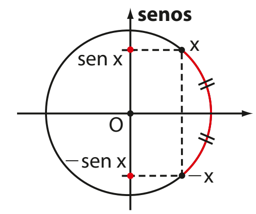
Utilizando valores já conhecidos representados na circunferência trigonométrica ao lado, podemos identificar algumas propriedades da função seno:

- O **sinal** da função **f** dada por $f(x) = \text{sen } x$ é positivo se **x** pertence ao 1º ou ao 2º quadrantes; e é negativo se **x** pertence ao 3º ou ao 4º quadrantes.
- No 1º quadrante, a função **f** é crescente, pois, à medida que **x** aumenta, os valores de sen x aumentam de 0 até 1; no 2º e no 3º quadrantes, **f** é decrescente: à medida que **x** aumenta, os valores de $y = \text{sen } x$ diminuem de 1 (valor máximo) até -1 (valor mínimo); no 4º quadrante, a função retoma o crescimento e seus valores aumentam de -1 a 0.

  Em resumo, no 1º e no 4º quadrantes **f** é **crescente** e no 2º e no 3º quadrantes **f** é **decrescente**.
- A função seno é **periódica** e seu período é 2π.

  De fato, os números reais **x** e $x + k \cdot 2\pi$, para **k** inteiro, têm a mesma imagem na cirfunferência trigonométrica e, portanto, $\text{sen } x = \text{sen } (x + k \cdot 2\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Assim, **f** é periódica e seu período **p** corresponde ao menor valor positivo de $k \cdot 2\pi$, que é 2π.

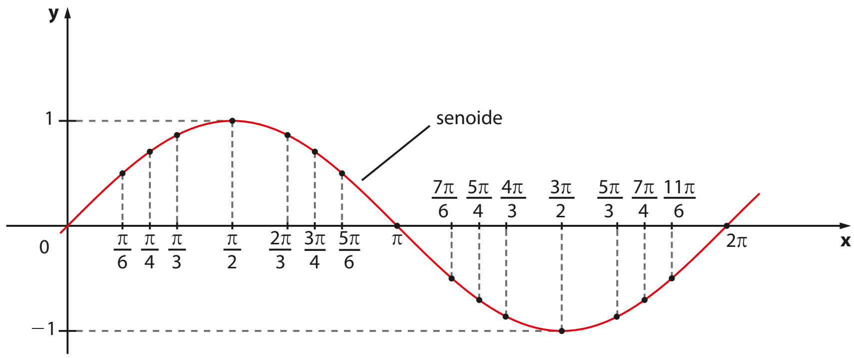
- O domínio e o contradomínio de **f** são iguais a $\mathbb{R}$. No entanto, o conjunto imagem da função seno é o intervalo real $[-1, 1]$, pois $\forall x \in \mathbb{R}$, temos que: $-1 \leqslant \text{sen } x \leqslant 1$.
- **f** é uma função **ímpar**, pois $\forall x \in \mathbb{R}$, $\text{sen }(-x) = -\text{sen } x$.



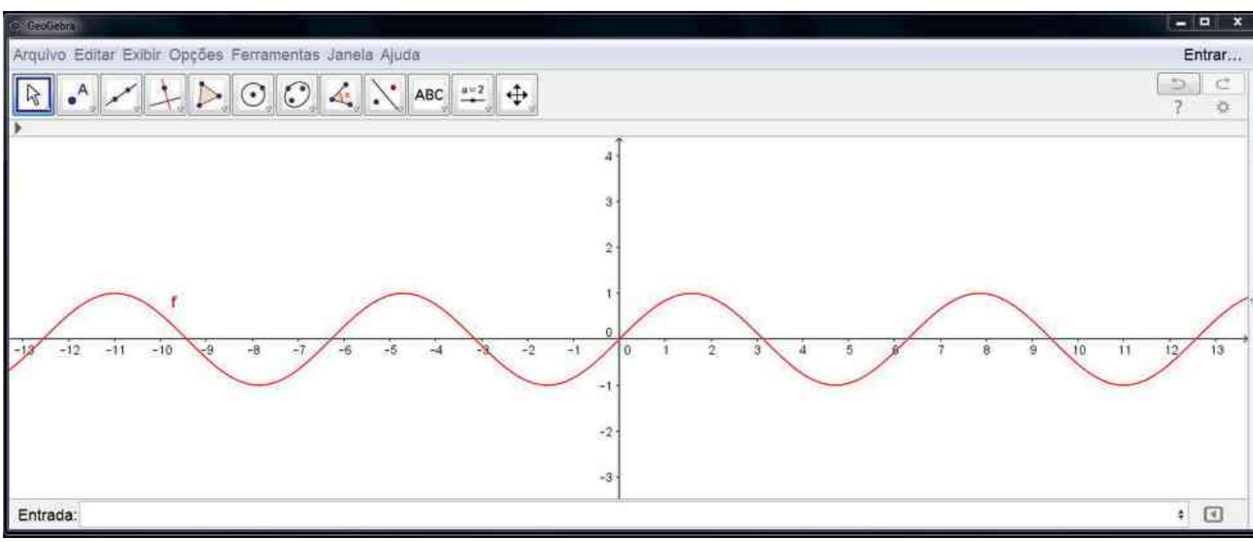
PENSE NISTO:

Se $x_1 \neq x_2$, então $\text{sen } x_1 \neq \text{sen } x_2$?

Levando em consideração todas as propriedades anteriores, construímos o gráfico de **f**, dado por $f(x) = \text{sen } x$, que recebe o nome de **senoide**.



Representamos no gráfico apenas um período de **f**. A senoide, no entanto, continua para a esquerda de 0 e para a direita de 2π, pois o domínio de **f** é $\mathbb{R}$. Note que, de -2π a 0, de 2π a 4π etc., encontraríamos "cópias" do gráfico representado, devido à periodicidade de **f**.



GEOGEBRA

Observe o gráfico acima. Ele foi construído com o *software* livre GeoGebra. Nesse gráfico é possível visualizar quatro períodos completos da função $y = \text{sen } x$ (de -4π a -2π, de -2π a 0, de 0 a 2π e de 2π a 4π; observe que $2\pi \simeq 6{,}28$ e $4\pi \simeq 12{,}56$).

A partir da senoide, é possível construir o gráfico de outras funções. Acompanhe os exemplos que seguem.

EXEMPLO 6

Para construir o gráfico de um período da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3 \cdot \text{sen } x$, podemos fazer uma tabela em três etapas:

- atribuímos valores convenientes para **x**;
- associamos a **x** os correspondentes valores de sen x;

• multiplicamos sen x por 3 a fim de obter a imagem correspondente a cada **x**.

x	**sen x**	**y = 3 · sen x**
0		
$\frac{\pi}{2}$		
π		
$\frac{3\pi}{2}$		
2π		

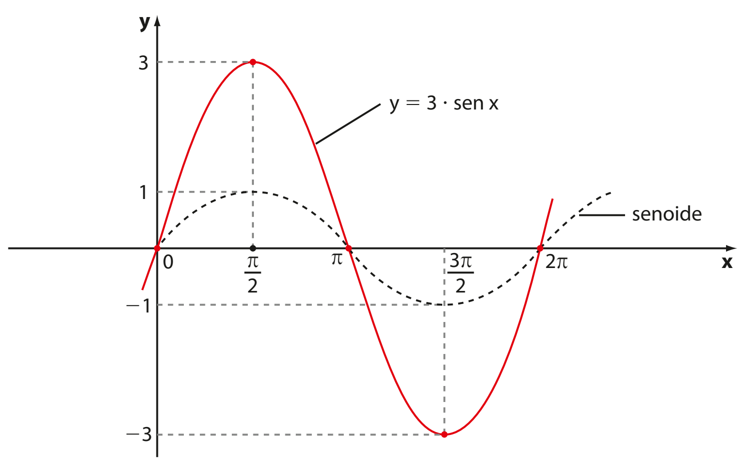
➡

x	**sen x**	**y = 3 · sen x**
0	0	
$\frac{\pi}{2}$	1	
π	0	
$\frac{3\pi}{2}$	-1	
2π	0	

➡

x	**sen x**	**y = 3 · sen x**
0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	1	3
π	0	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1	-3
2π	0	0

Observe que o período de **f** é 2π, e seu conjunto imagem é Im $= [-3, 3]$.



PENSE NISTO:

Observe que, no gráfico de y = 3 · sen x, para cada **x** corresponde uma ordenada **y** que é o triplo da ordenada na senoide (y = sen x).

EXEMPLO 7

Vamos construir o gráfico de um período da função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por y = sen 2x.
Há três etapas na construção da tabela:

• atribuímos valores convenientes para t = 2x;

• associamos a cada **t** (t = 2x) o correspondente sen t (sen 2x);

• calculamos os valores de **x** a partir dos valores de **t** $\left(x = \frac{t}{2}\right)$.

x	**t = 2x**	**y**
	0	
	$\frac{\pi}{2}$	
	π	
	$\frac{3\pi}{2}$	
	2π	

➡

x	**t = 2x**	**y = sen 2x**
	0	0
	$\frac{\pi}{2}$	1
	π	0
	$\frac{3\pi}{2}$	-1
	2π	0

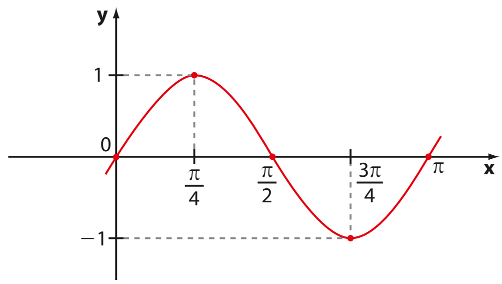
➡

x	**t = 2x**	**y = sen 2x**
0	0	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{\pi}{2}$	π	0
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	-1
π	2π	0

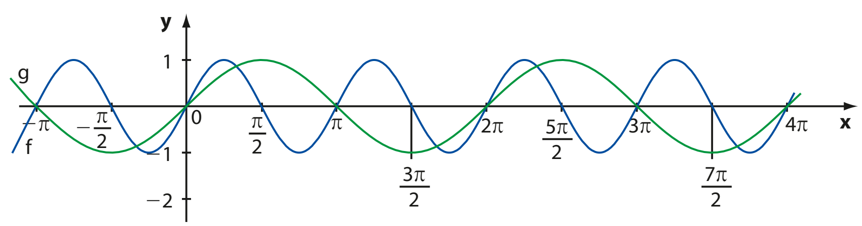
Como sabemos, para que sen t complete um período, é necessário que **t** varie de 0 a 2π.

Temos: $0 \leqslant t \leqslant 2\pi \Leftrightarrow 0 \leqslant 2x \leqslant 2\pi \Rightarrow 0 \leqslant x \leqslant \pi$, isto é, $x \in [0, \pi]$.

Assim, o período da função **f** dada por $y = \text{sen } 2x$ corresponde ao comprimento do intervalo $[0, \pi]$, que é $\pi - 0 = \pi$. O comprimento de um intervalo real $[a, b]$ é igual à diferença $b - a$. Observe, ao lado, um período completo do gráfico de **f**.



Veja a seguir a construção, no mesmo plano cartesiano, dos gráficos das funções **f** e **g**, dadas por $f(x) = \text{sen } 2x$ e $g(x) = \text{sen } x$.



Veja que o gráfico de **f** (quando comparado ao gráfico de **g**) sofreu uma "compressão" na horizontal, causada pela redução do período: o período de $g(x) = \text{sen } x$ é igual a 2π e o período de $f(x) = \text{sen } 2x$ é igual a π.

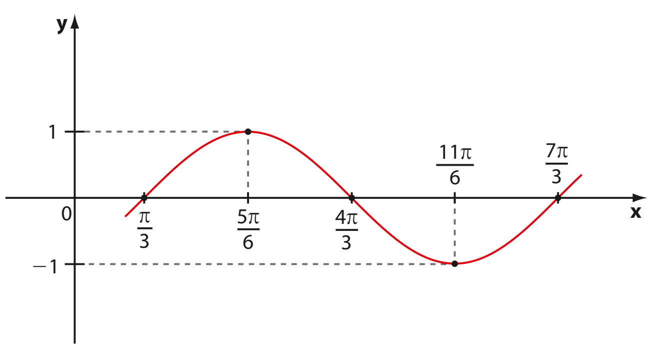
Note ainda que o conjunto imagem de ambas é $[-1, 1]$.

EXEMPLO 8

Vamos construir o gráfico de um período da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $y = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$. Seguimos o procedimento descrito nos exemplos anteriores:

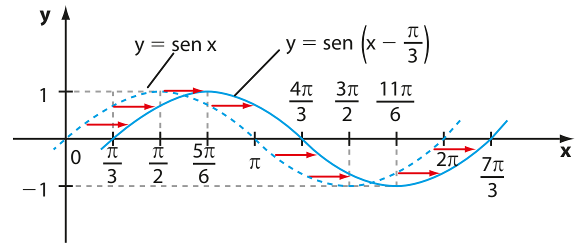
- atribuímos valores convenientes para $t = x - \frac{\pi}{3}$;
- associamos a cada **t** $\left(t = x - \frac{\pi}{3}\right)$ o correspondente $\text{sen } t = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$;
- calculamos os valores de **x** a partir dos valores de **t** $\left(x = t + \frac{\pi}{3}\right)$.

x	$t = x - \frac{\pi}{3}$	$y = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$
$\frac{\pi}{3}$	0	0
$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{4\pi}{3}$	π	0
$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	−1
$\frac{7\pi}{3}$	2π	0



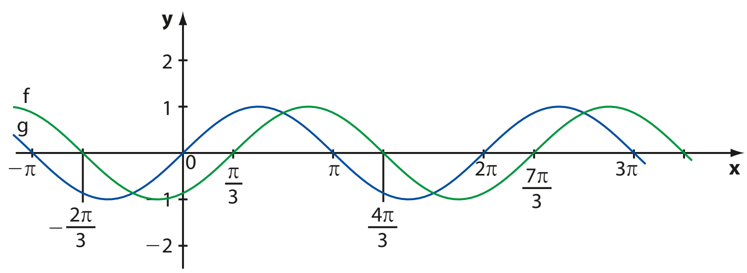
No exemplo 8, note que:

- Im $= [-1, 1]$, pois $\forall x \in \mathbb{R}$,
  $-1 \leqslant \text{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) \leqslant 1$;
- o período de **f** corresponde ao comprimento do intervalo $\left[\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{7\pi}{3}\right]$, que é:
  $p = \dfrac{7\pi}{3} - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{6\pi}{3} = 2\pi$;



- o gráfico de $y = \text{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$ corresponde ao gráfico da senoide (definida por $y = \text{sen}\ x$), transladado de $\dfrac{\pi}{3}$ unidades para a direita, como podemos observar no gráfico acima, em que adicionamos $\dfrac{\pi}{3}$ a cada abscissa dos pontos do gráfico da senoide.

Observe os dois gráficos, $f(x) = \text{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$ e $g(x) = \text{sen}\ x$, traçados no mesmo plano cartesiano.



Período da função seno

Sejam **c** e **d** números reais, com $c \neq 0$. A função definida por $y = \text{sen}\ (cx + d)$ tem período **p** dado por $p = \dfrac{2\pi}{|c|}$.

De fato, fazendo $t = cx + d$, para que $\text{sen}\ t$ complete um período, é necessário que **t** varie de 0 a 2π:

$$0 \leqslant t \leqslant 2\pi \Leftrightarrow 0 \leqslant cx + d \leqslant 2\pi \Leftrightarrow -d \leqslant cx \leqslant -d + 2\pi$$

- Para $c > 0$, temos: $-\dfrac{d}{c} \leqslant x \leqslant \dfrac{-d + 2\pi}{c}$, isto é, $x \in \left[-\dfrac{d}{c}, \dfrac{-d + 2\pi}{c}\right]$, e o período **p** é:
$$\frac{-d + 2\pi}{c} - \left(-\frac{d}{c}\right) = \frac{2\pi}{c}$$
- Para $c < 0$, temos: $-\dfrac{d}{c} \geqslant x \geqslant \dfrac{-d + 2\pi}{c}$, isto é, $x \in \left[\dfrac{-d + 2\pi}{c}, -\dfrac{d}{c}\right]$, e o período **p** é:
$$-\frac{d}{c} - \left(\frac{-d + 2\pi}{c}\right) = -\frac{2\pi}{c} > 0$$

Reunindo os dois casos, teremos $p = \dfrac{2\pi}{|c|}$.

Assim:

- no exemplo 6, para a função dada por $f(x) = 3 \cdot \text{sen}\ x$, temos o período $\dfrac{2\pi}{|1|} = 2\pi$;
- no exemplo 7, para a função dada por $f(x) = \text{sen}\ 2x$, o período pode ser determinado por $p = \dfrac{2\pi}{|2|} = \pi$;
- no exemplo 8, para a função definida por $f(x) = \text{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$, temos o período $p = \dfrac{2\pi}{|1|} = 2\pi$.

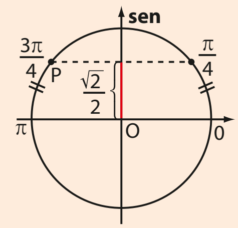
EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

2 Calcule o valor de

a) sen $\frac{19\pi}{4}$ **b)** sen 1 980° **c)** sen $\frac{19\pi}{2}$

Solução:

a) Note que $\frac{19\pi}{4} = \frac{16\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \underbrace{4\pi}_{\text{duas voltas completas}} + \frac{3\pi}{4}$;



assim, $\frac{19\pi}{4}$ e $\frac{3\pi}{4}$ têm mesma imagem **P** na circunferência trigonométrica e, portanto, sen $\frac{19\pi}{4}$ = sen $\frac{3\pi}{4}$.

Como sen $\frac{3\pi}{4}$ = sen $\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, conclui-se que sen $\frac{19\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

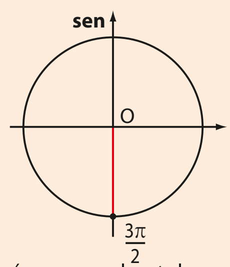
b) Dividindo 1 980° por 360°, temos:

$$\begin{array}{l|l} 1\,980^\circ & 360^\circ \\ \hline \downarrow & 5 \end{array}$$

resto = 180°

Assim, 1 980° = 360° · 5 + 180° e, desse modo, 1 980° e 180° são arcos côngruos. Daí, sen 1 980° = sen 180° = 0.

c) $\frac{19\pi}{2} = \frac{16\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} = \underbrace{8\pi}_{\text{quatro voltas completas}} + \frac{3\pi}{2}$



Assim, sen $\frac{19\pi}{2}$ = sen $\frac{3\pi}{2} = -1$.

PENSE NISTO:

Se **k** é um número inteiro, qual é o valor de sen $\left(\frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi\right)$?

E de sen $\left(\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi\right)$?

3 Para quais valores reais de **m** existe o número real α tal que sen $\alpha = 2m - 1$?

Solução:

Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, temos $-1 \leqslant \text{sen}\,\alpha \leqslant 1$, isto é, $-1 \leqslant 2m - 1 \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant 2m \leqslant 2 \Rightarrow 0 \leqslant m \leqslant 1$.

Assim, a resposta é: $\{m \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant m \leqslant 1\}$.

4 Seja f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $y = 1 + 3 \cdot \text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{5}\right)$.

Obtenha o domínio, o conjunto imagem e o período de **f**.

Solução:

- Inicialmente, observe que o domínio de **f** é $\mathbb{R}$, pois $\forall x \in \mathbb{R}$, o número $1 + 3 \cdot \text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{5}\right)$ é real.
- Sabemos que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) \leqslant 1 \Rightarrow -3 \leqslant 3 \cdot \text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) \leqslant 3 \Rightarrow$

  $\Rightarrow -3 + 1 \leqslant 1 + 3\,\text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) \leqslant 3 + 1$, isto é, $-2 \leqslant y \leqslant 4$; logo, Im = [−2, 4].
- Para que sen t complete um período, sendo $t = 2x - \frac{\pi}{5}$, devemos ter $0 \leqslant t \leqslant 2\pi \Rightarrow 0 \leqslant 2x - \frac{\pi}{5} \leqslant 2\pi \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow \frac{\pi}{5} \leqslant 2x \leqslant \underbrace{2\pi + \frac{\pi}{5}}_{\frac{11\pi}{5}} \Leftrightarrow \frac{\pi}{10} \leqslant x \leqslant \frac{11\pi}{10}$, isto é, $x \in \left[\frac{\pi}{10}, \frac{11\pi}{10}\right]$, e o período **p** é $\frac{11\pi}{10} - \frac{\pi}{10} = \pi$.

Também poderíamos ter aplicado a relação $p = \frac{2\pi}{|c|}$, sendo $c = 2 \Rightarrow p = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$.

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

5 Dê o sinal de:

a) sen $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

b) sen $\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$

c) sen $\frac{10\pi}{3}$

d) sen 850°

e) sen 3 816°

f) sen $\frac{67\pi}{8}$

6 Qual é o valor de:

a) sen 4π

b) sen $\frac{17\pi}{2}$

c) sen $\frac{19\pi}{3}$

d) sen 1 290°

e) sen $\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

f) sen $\frac{29\pi}{4}$

7 Classifique os itens a seguir como verdadeiros (**V**) ou falsos (**F**).

a) O valor de sen $\left(\frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi\right)$, para **k** inteiro, é $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) sen $(k \cdot \pi) = 0$, para **k** inteiro.

c) sen $1\,000° > 0$.

d) O seno do número real 10 é negativo.

e) sen $\left(-\frac{\pi}{9}\right) =$ sen $\frac{\pi}{9}$.

8 Determine o período e o conjunto imagem, construindo o gráfico de um período completo para cada função dada.

a) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que f(x) = 2 sen x.

b) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por f(x) = −sen x.

c) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por f(x) = sen 3x.

d) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por f(x) = 3 + sen x.

e) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por f(x) = 2 + sen $\left(\frac{x}{2}\right)$.

9 Para quais valores reais de **t** temos sen $\alpha = \frac{t+1}{2}$, sendo α um número real qualquer?

10 O número real α é tal que $\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \pi$, com sen $\alpha = 2m - 3$. Quais são os possíveis valores reais de **m**?

11 Seja f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por f(x) = 3 + 2 · sen 4x.

a) Qual é o período de **f**?

b) Qual é o valor máximo que **f** assume?

12 Em uma pequena roda-gigante, a altura (em metros) em que um passageiro se encontra no instante **t** (em segundos) é dada pela lei:

$$h(t) = 6 + 4 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right), \text{ para } t \in [0, 270].$$

a) No início do passeio, a que altura se encontra o passageiro?

b) A que altura se encontra o passageiro após 9 s do início? Use $\sqrt{2} \simeq 1{,}4$.

c) Qual é a altura mínima que esse passageiro atinge no passeio?

d) Qual é o tempo necessário para a roda-gigante dar uma volta completa?

e) Quantas voltas completas ocorrem no passeio?

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

A trigonometria e a roda-gigante

A roda-gigante é uma das atrações mais tradicionais dos parques de diversões.

Imagine uma roda-gigante, como a mostrada na figura 1 ao lado, que tenha 12 cadeiras igualmente distribuídas ao longo da circunferência, cujo raio mede 9m. Uma estrutura de ferro sustenta a roda-gigante a partir do seu centro, mantendo-a presa ao solo. A distância do centro da roda-gigante ao solo é 10 m.

A roda gira, lentamente, com velocidade praticamente constante de 3° por segundo, completando a volta em 120 s. Um passageiro sentado em uma das cadeiras observa que sua altura em relação ao solo varia de maneira periódica ao longo do passeio, de forma que uma determinada altura é atingida algumas vezes à medida que a roda executa as várias voltas do passeio.

Como podemos expressar a altura em que se encontra uma determinada cadeira a cada instante do passeio?

Imagine que, no início da contagem do tempo, um passageiro se encontra na cadeira **A** (figura 2). Como a velocidade de giro é de 3°/s, em 10 s cada cadeira percorre 30°. Na figura 2 estão representadas as posições que esse passageiro vai ocupar a cada 10 s ao longo de uma volta completa da roda.

Elementos sem proporção entre si.

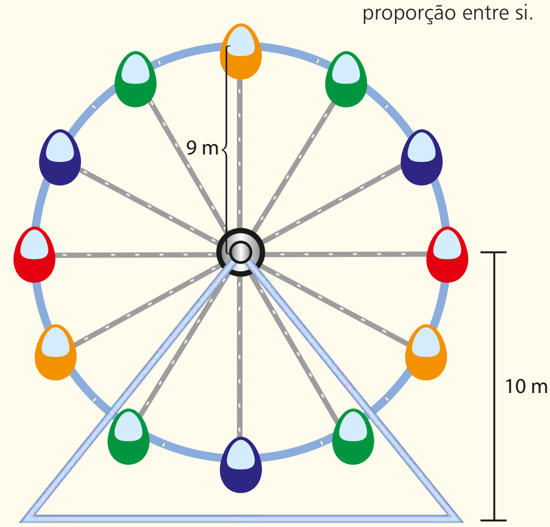


figura 1

Velocidade de giro: 3°/s $\left(\text{ou } \frac{\pi}{60} \text{ rad/s}\right)$

$\triangle$BOB': $\text{sen } 30° = \frac{BB'}{OB} \Rightarrow$

$\Rightarrow BB' = 9 \cdot \text{sen } (10 \cdot 3°) = 9 \cdot \text{sen}\left(10 \cdot \frac{\pi}{60}\right)$

$\triangle$COC': $\text{sen } 60° = \frac{CC'}{OC} \Rightarrow$

$\Rightarrow CC' = 9 \cdot \text{sen } (20 \cdot 3°) = 9 \cdot \text{sen}\left(20 \cdot \frac{\pi}{60}\right)$

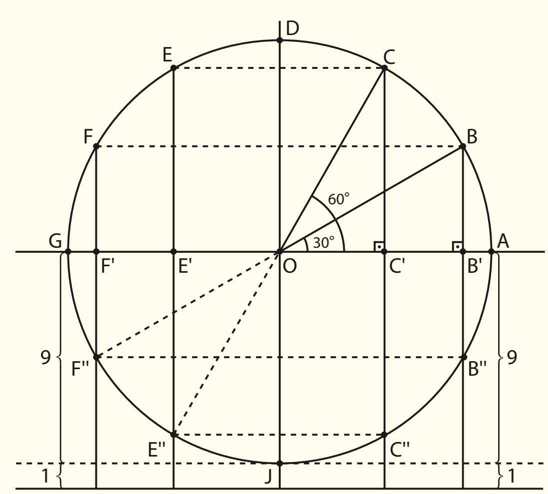


figura 2

Observe que são iguais as alturas correspondentes aos seguintes pares de posições: **A** e **G**, **B** e **F**, **C** e **E**, **F**'' e **B**'' e **E**'' e **C**''.

Além disso, os segmentos $\overline{BB'}$, $\overline{FF'}$, $\overline{F'F''}$ e $\overline{B'B''}$ são congruentes (Atenção, porém, para a diferença das alturas correspondentes a **B** e **B**'' e também a **F** e **F**''!), ocorrendo o mesmo com os segmentos $\overline{CC'}$, $\overline{EE'}$, $\overline{E'E''}$ e $\overline{C'C''}$.

Temos as seguintes posições para uma volta completa na roda, considerando intervalos de tempo de dez em dez segundos:

Tempo (s)	Posição	Altura (m)
0	A	$10 + 9 \cdot \text{sen}\left(0 \cdot \frac{\pi}{60}\right) = 10 + 0 = 10$
10	B	$10 + 9 \cdot \text{sen}\left(10 \cdot \frac{\pi}{60}\right) = 10 + 4{,}5 = 14{,}5$
20	C	$10 + 9 \cdot \text{sen}\left(20 \cdot \frac{\pi}{60}\right) \simeq 10 + 7{,}8 \simeq 17{,}8$
30	D	$10 + 9 \cdot \text{sen}\left(30 \cdot \frac{\pi}{60}\right) = 10 + 9 = 19$
40	E	$10 + 9 \cdot \text{sen}\left(40 \cdot \frac{\pi}{60}\right) \simeq 10 + 7{,}8 \simeq 17{,}8$
⋮	⋮	⋮
70	F''	$10 + 9 \cdot \text{sen}\left(70 \cdot \frac{\pi}{60}\right) = 10 + (-4{,}5) = 5{,}5$
⋮	⋮	⋮
90	J	$10 + 9 \cdot \text{sen}\left(90 \cdot \frac{\pi}{60}\right) = 10 + (-9) = 1$
⋮	⋮	⋮
110	B''	$10 + 9 \cdot \text{sen}\left(110 \cdot \frac{\pi}{60}\right) = 10 + (-4{,}5) = 5{,}5$
120	A	$10 + 9 \cdot \text{sen}\left(120 \cdot \frac{\pi}{60}\right) = 10 + 0 = 10$

OBSERVAÇÃO

Note que a altura relativa ao ponto **F**'', por exemplo, também pode ser expressa por: $10 - \overline{F'F''} = 10 - 9 \cdot \text{sen } 30° =$
$= 10 + 9 \cdot \text{sen } 210° = 10 + 9 \cdot \text{sen}\left(70 \cdot \frac{\pi}{60}\right)$.
Raciocínio análogo pode ser usado para os pontos **E**'', **C**'' e **B**''.

Observando a primeira e a última coluna da tabela, vemos que, para cada instante **t** (em segundos), corresponde uma altura **h** (em metros), dada por:

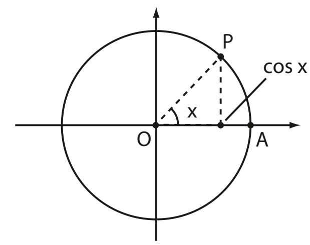
$$h(t) = 10 + 9 \cdot \text{sen}\left(t \cdot \frac{\pi}{60}\right)$$

O período dessa função é $\frac{2\pi}{\left|\frac{\pi}{60}\right|} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{60}} = 120$. Note que 120 s é o tempo de execução de uma volta completa.

A diferença entre a maior e a menor altura atingida nesse movimento é $\underbrace{19 \text{ m}}_{h_{máx}} - \underbrace{1 \text{ m}}_{h_{mín}} = 18$ m.

Fonte de pesquisa: VERBYTSKA, Oksana. *Matemática no dia a dia*. Universidade de Lisboa. Dissertação de mestrado. Disponível em: <repositorio.ul.pt/bitstream/10451/16037/1/ulfc112046_tm_Oksana_Verbytska.pdf>. Acesso em: 10 mar. 2016.

Função cosseno



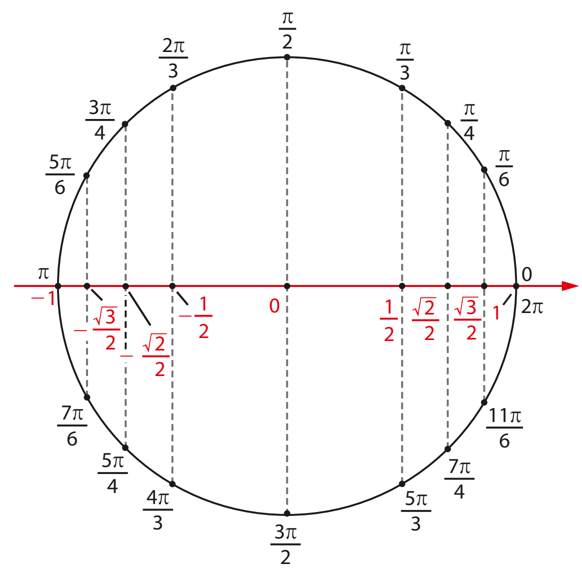
$med(\widehat{AP}) = x$ rad

Seja **x** um número real e **P** sua imagem na circunferência trigonométrica. Chama-se **função cosseno** a função f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada número real **x** o seu cosseno, ou seja, $f(x) = \cos x$.

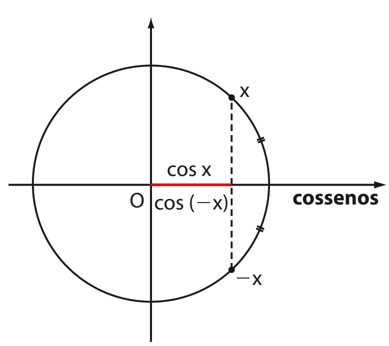
Observe que **f** associa a cada número real **x** a abscissa do ponto correspondente à sua imagem **P** na circunferência.

Vamos usar alguns valores já conhecidos representados na circunferência trigonométrica a seguir para reconhecer algumas propriedades da função cosseno.

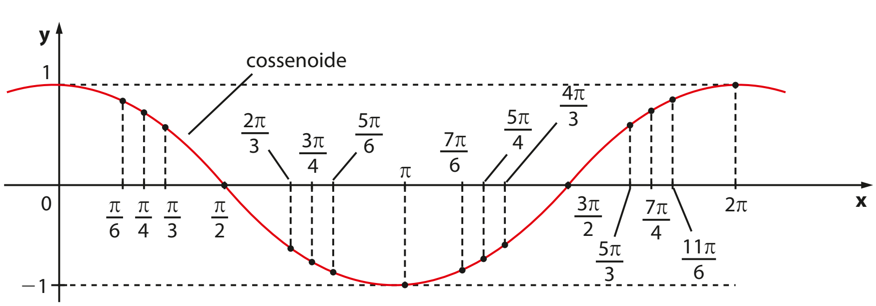
- O **sinal** da função cosseno é positivo se **x** pertence ao 1º ou ao 4º quadrantes, e é negativo se **x** pertence ao 2º ou ao 3º quadrantes.
- No 1º e no 2º quadrantes, **f** é **decrescente** (observe que os valores de cos x diminuem de 1 até -1 à medida que **x** aumenta); no 3º e no 4º quadrantes, os valores de cos x aumentam de -1 a 1, à medida que **x** aumenta, o que significa que **f** é **crescente**.
- A função cosseno é **periódica** e seu período é 2π. Como vimos, os números reais **x** e $x + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, têm a mesma imagem na circunferência trigonométrica e, portanto, $\cos x = \cos (x + k \cdot 2\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. O período de **f** é o menor valor positivo de $k \cdot 2\pi$, que é 2π.
- O domínio e o contradomínio de **f** são iguais a $\mathbb{R}$; o conjunto imagem de **f** é $[-1, 1]$, pois, $\forall x \in \mathbb{R}$, temos $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, já que o raio da circunferência trigonométrica é unitário e as abscissas dos pontos da circunferência variam de -1 até 1.



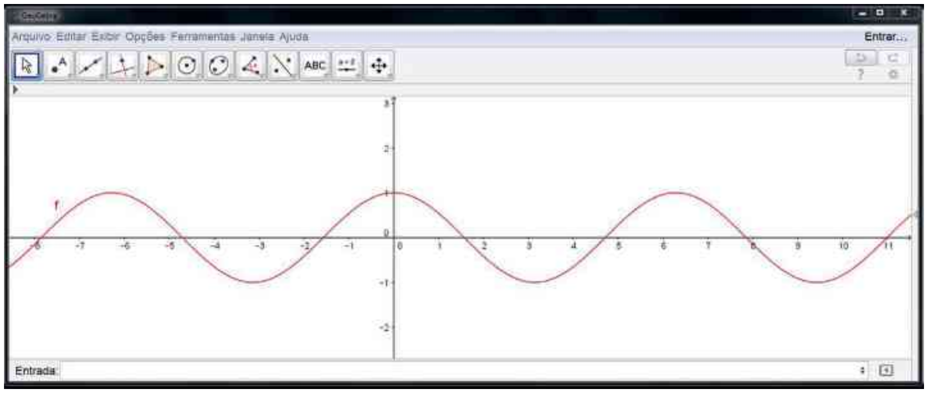
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos (-x) = \cos x$; isso significa dizer que a função cosseno é uma **função par**.



Com as considerações anteriores, traçamos o gráfico de um período da função **f** definida por $f(x) = \cos x$. Esse gráfico recebe o nome de **cossenoide**.



Observe a seguir o gráfico de $y = \cos x$ construído com o GeoGebra.



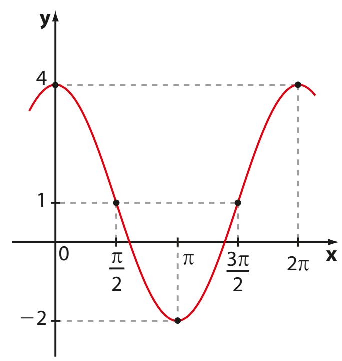
GEOGEBRA

Seguindo o mesmo processo apresentado para a construção de outros gráficos similares à senoide, vamos construir dois gráficos obtidos a partir da cossenoide.

EXEMPLO 9

Vamos construir o gráfico de $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $y = 3 \cdot \cos x + 1$.

x	cos x	y = 3 · cos x + 1
0	1	$3 \cdot 1 + 1 = 4$
$\frac{\pi}{2}$	0	$3 \cdot 0 + 1 = 1$
π	-1	$3 \cdot (-1) + 1 = -2$
$\frac{3\pi}{2}$	0	$3 \cdot 0 + 1 = 1$
2π	1	$3 \cdot 1 + 1 = 4$

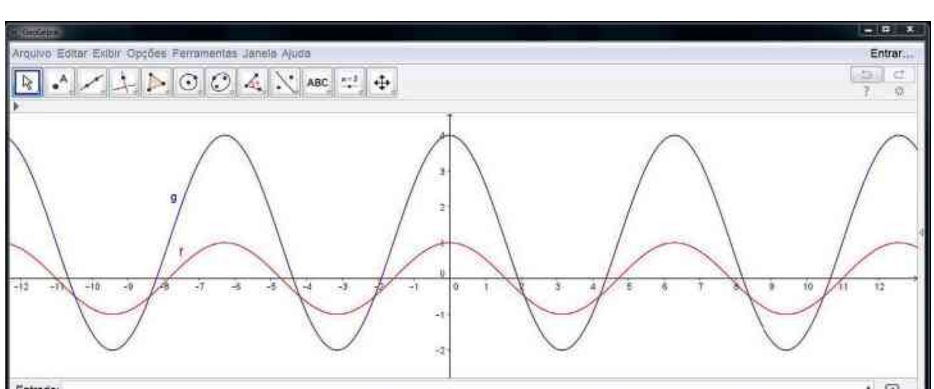


Observe, no exemplo 9, que:

- o período dessa função é 2π, pois, para que $\cos x$ complete um período, **x** deve variar de 0 a 2π.
- o conjunto imagem dessa função é $[-2, 4]$, pois, $\forall x \in \mathbb{R}$, temos:

$$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \Rightarrow -3 \leqslant 3 \cdot \cos x \leqslant 3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -3 + 1 \leqslant 3 \cdot \cos x + 1 \leqslant 3 + 1 \Rightarrow -2 \leqslant y \leqslant 4$$

A seguir é possível ver os gráficos das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dadas por $f(x) = \cos x$ e $g(x) = 3 \cdot \cos x + 1$ no mesmo plano cartesiano construído no GeoGebra.



GEOGEBRA

Observe o "alongamento na vertical" no gráfico de **g** comparado ao gráfico de **f**. O conjunto imagem de **f** é $[-1, 1]$ de comprimento $1 - (-1) = 2$ e o conjunto imagem de **g** é $[-2, 4]$ de comprimento $4 - (-2) = 6$. O período de ambas as funções é 2π.

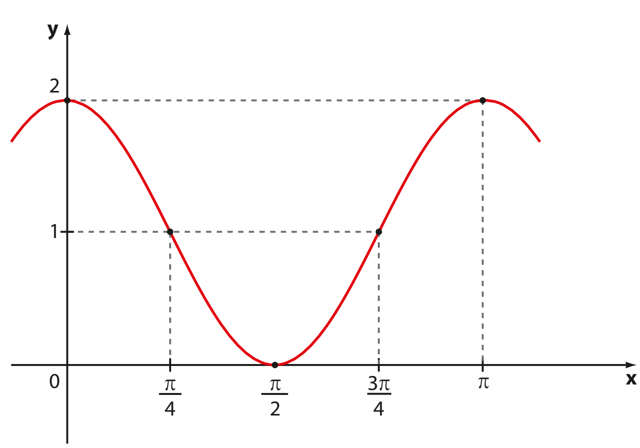
EXEMPLO **10**

Vamos construir o gráfico de $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $y = 1 + \cos 2x$.

x	2x	cos 2x	y = 1 + cos 2x
	0	1	
	$\frac{\pi}{2}$	0	
	π	-1	
	$\frac{3\pi}{2}$	0	
	2π	1	

x	2x	cos 2x	y = 1 + cos 2x
	0	1	$1 + 1 = 2$
	$\frac{\pi}{2}$	0	$1 + 0 = 1$
	π	-1	$1 + (-1) = 0$
	$\frac{3\pi}{2}$	0	$1 + 0 = 1$
	2π	1	$1 + 1 = 2$

x	2x	cos 2x	y = 1 + cos 2x
0	0	1	2
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	0	1
$\frac{\pi}{2}$	π	-1	0
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	0	1
π	2π	1	2



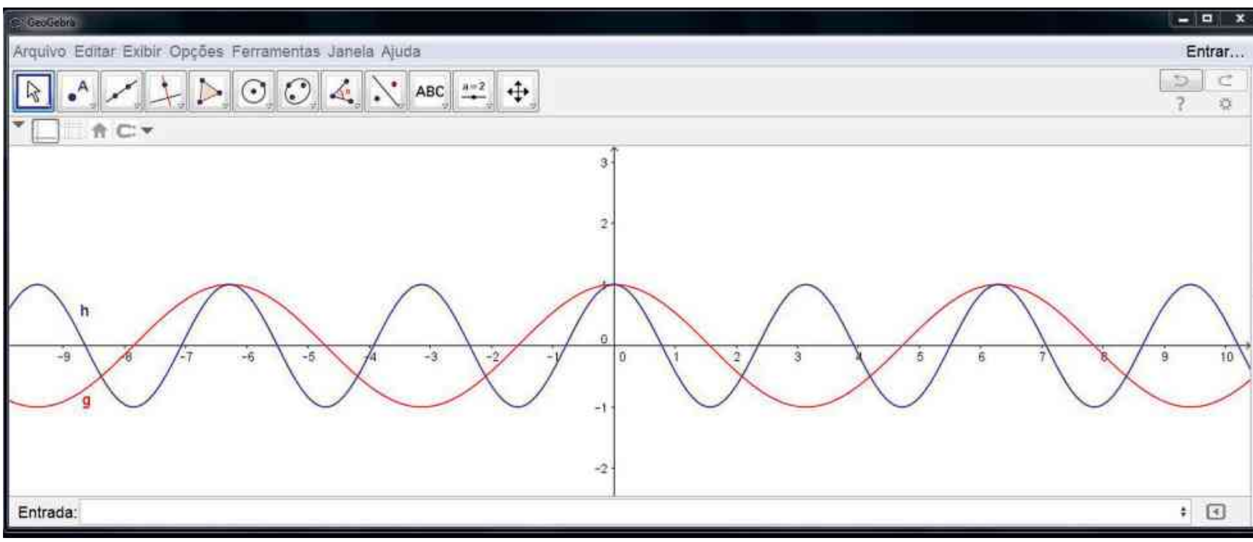
Note que $Im = [0, 2]$ e o período da função é $p = \pi$, pois, para que cos 2x complete um período, é necessário que 2x varie de 0 a 2π: $0 \leqslant 2x \leqslant 2\pi \Rightarrow 0 \leqslant x \leqslant \pi$, isto é, $x \in [0, \pi]$ e o período é $\pi - 0 = \pi$.

OBSERVAÇÃO

Por meio de raciocínio idêntico ao apresentado no item anterior, temos que o período **p** da função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por f(x) = cos (cx + d), sendo **c** e **d** números reais, com $c \neq 0$, é $p = \dfrac{2\pi}{|c|}$.

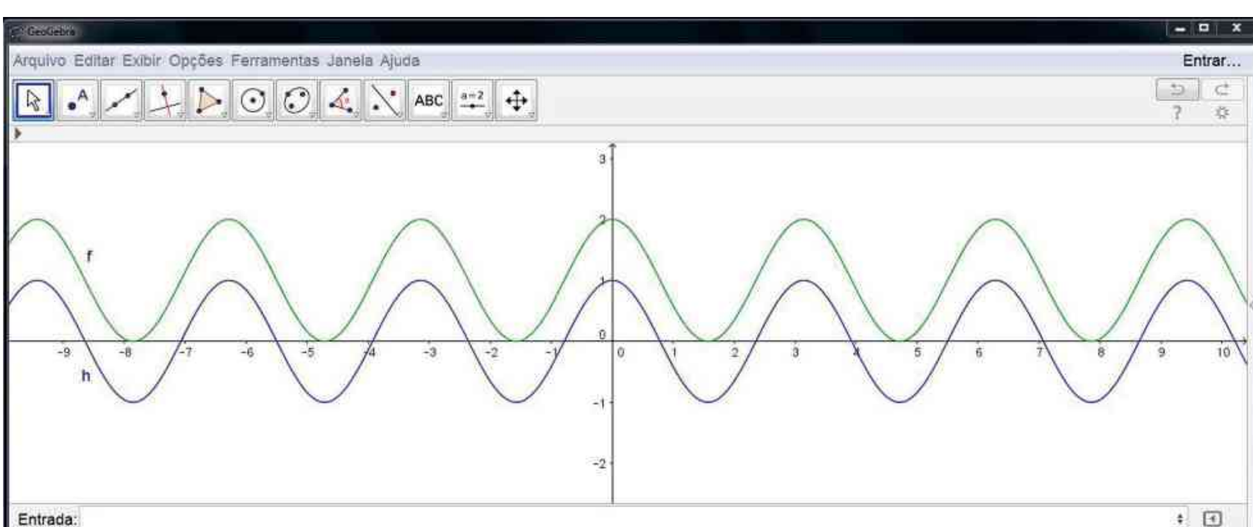
Compare inicialmente os gráficos das funções **g** e **h**, dados respectivamente por g(x) = cos x e h(x) = cos (2x), traçados em um mesmo sistema de coordenadas, com auxílio do GeoGebra.

Observe que, ao "se comprimir na horizontal" o gráfico de **g**, obtém-se o gráfico de **h**: o período de **g** é 2π e o período de **h** é π.



GEOGEBRA

A seguir, observe que o gráfico da função pedida no exemplo 10, f(x) = 1 + cos (2x), é obtido a partir do gráfico de h(x) = cos (2x) transladando-o uma unidade para cima, na vertical.



GEOGEBRA

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

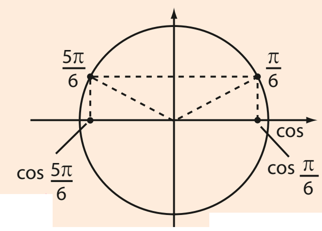
5 Calcule:

a) $\cos \frac{29\pi}{6}$

b) $\cos 100\pi$

Solução:

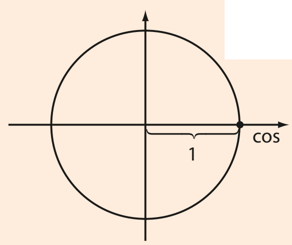
a) $\frac{29\pi}{6} = \frac{24\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} = \underbrace{4\pi}_{\text{duas voltas completas}} + \frac{5\pi}{6}$



Assim, $\frac{29\pi}{6}$ e $\frac{5\pi}{6}$ têm a mesma imagem na circunferência trigonométrica e $\cos \frac{29\pi}{6} = \cos \frac{5\pi}{6} = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $100\pi = 50 \cdot 2\pi$

$\cos 100\pi = \cos 2\pi = \cos 0 = 1$



PENSE NISTO:

Para $k \in \mathbb{Z}$, qual é o valor de $\cos (k \cdot 2\pi)$? E de $\cos (k \cdot \pi)$?

6 Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2 + \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$. Qual é o período de **f**?

Solução:

Façamos $t = \frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}$; para que $\cos t$ complete um período, **t** deve variar de 0 a 2π:

$0 \leqslant t \leqslant 2\pi \Rightarrow 0 \leqslant \frac{x}{2} - \frac{\pi}{6} \leqslant 2\pi \Rightarrow \frac{\pi}{6} \leqslant \frac{x}{2} \leqslant \frac{13\pi}{6} \Rightarrow \frac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{13\pi}{3}$; assim $x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{13\pi}{3}\right]$ e o período **p** de **f** é igual ao comprimento desse intervalo, que é igual a: $p = \frac{13\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{12\pi}{3} = 4\pi$.

Também podemos usar a relação $p = \frac{2\pi}{|c|} = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|} = 4\pi$.

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

13 Calcule o valor de:

a) $\cos 11\pi$

b) $\cos 10\pi$

c) $\cos \frac{13\pi}{2}$

d) $\cos \frac{27\pi}{2}$

e) $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

f) $\cos (-7\pi)$

14 Calcule o valor de:

a) $\cos 1\,560°$

b) $\cos 1\,035°$

c) $\cos \frac{19\pi}{6}$

d) $\cos \frac{22\pi}{3}$

e) $\cos (-270°)$

f) $\cos \frac{43\pi}{4}$

15 Calcule o valor de **y** na expressão:

$$y = \frac{\cos \frac{9\pi}{2} - \text{sen } \frac{9\pi}{2}}{\cos \frac{17\pi}{4} + 3 \cdot \text{sen } \frac{17\pi}{4}}$$

16 Sabendo que **x** é um número real pertencente ao intervalo $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, determine os possíveis valores reais de **m** de modo que tenhamos $\cos x = \frac{2m}{5}$.

17 Se $x \in \mathbb{R}$, quais são os possíveis valores inteiros de **m** que satisfazem à igualdade $\cos x = \frac{3m}{2} - \frac{1}{3}$?

18 Determine o período e o conjunto imagem e construa o gráfico de um período completo para cada função dada:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2 \cdot \cos x$

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2 - \cos x$

c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$

d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \cos 3x$

e) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2 + \cos 3x$

19 Indique como verdadeira (**V**) ou falsa (**F**) as afirmações a seguir e corrija as que são falsas.

a) $\cos\left(\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi\right) = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$, para **k** inteiro.

b) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi\right) = 0$, para **k** inteiro.

c) A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2 \cdot \cos x$ tem valor mínimo igual a -1.

d) A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x \cdot \cos \pi$ é periódica.

e) O período de $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{8}x\right)$ é 16.

f) $\cos\left(-\frac{3\pi}{20}\right) > 0$

20 Um artigo publicado em um caderno de economia prevê que as exportações de um certo país (em milhões de dólares), no ano de $2020 + x$, em que $x \in \{0, 1, 2, ..., 19, 20\}$, serão dadas pela lei:

$$f(x) = 400 + 18 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)$$

Supondo que isso realmente ocorra, determine:

a) o valor das exportações desse país nos anos de 2020, 2025 e 2030, em milhões de dólares;

b) quantas vezes, entre 2020 e 2040, **f** atingirá seu valor mínimo e qual é esse valor?

21 Para cada função **f** seguinte, especifique seu domínio, seu conjunto imagem e seu período:

a) $f(x) = \cos 3x$

b) $f(x) = 3 \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

c) $f(x) = -1 + 2 \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$

d) $f(x) = x + \cos \frac{\pi}{5}$

e) $f(x) = -4 \text{ sen } 6x$

22 Em um mesmo plano cartesiano, construa, em cada caso, os gráficos das funções **f** e **g** definidas por:

a) $f(x) = \cos x$ e $g(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

b) $f(x) = \cos x$ e $g(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

23 (Enem-MEC) Um satélite de telecomunicações, **t** minutos após ter atingido sua órbita, está a **r** quilômetros de distância do centro da Terra. Quando **r** assume seus valores máximo e mínimo, diz-se que o satélite atingiu o apogeu e o perigeu, respectivamente. Suponha que, para esse satélite, o valor de **r** em função de **t** seja dado por

$$r(t) = \frac{5\,865}{1 + 0{,}15 \cdot \cos(0{,}06t)}$$

Um cientista monitora o movimento desse satélite para controlar o seu afastamento do centro da Terra. Para isso, ele precisa calcular a soma dos valores de **r**, no apogeu e no perigeu, representada por **S**.

O cientista deveria concluir que, periodicamente, **S** atinge o valor de:

a) 12 765 km

b) 12 000 km

c) 11 730 km

d) 10 965 km

e) 5 865 km

DESAFIO

Sejam **f** e **g** funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definidas por $f(x) = \text{sen } x$ e $g(x) = -x + \frac{\pi}{2}$.

Qual é o número de soluções reais da equação $f(x) = g(x)$?

TROQUE IDEIAS

A trigonometria e o fenômeno das marés

RICARDO RIBAS/FOTOARENA

Praia de Serra Grande, Ilhéus (BA), 2014.

Vamos retomar a situação proposta na introdução deste capítulo, sobre as previsões para as marés nos dias 4, 5 e 6 de maio de 2015 no porto de Ilhéus, Bahia.

- As marés altas ocorrem de 12 em 12 horas e, para facilitar a modelagem, vamos admitir 2,0 m o valor comum previsto nos três dias;
- As marés baixas ocorrem de 12 em 12 horas; vamos adotar o valor 0,2 m como o valor de referência da altura da maré baixa prevista para os três dias.

1ª parte: Considerando as observações anteriores e lembrando que as previsões referem-se a três dias seguidos, podemos preencher (com algumas aproximações nos horários) a tabela que relaciona a altura da maré (em metros) e o tempo (em horas), contado a partir do primeiro horário de previsão (3 h 41 min), que será considerado o instante inicial ($t = 0$).

Tempo (h)	0	6	12	18	24	30	36	42	48
Altura da maré (m)									

2ª parte: Vamos supor que a relação entre a altura (**h**) da maré, em metros, e o tempo (**t**), em horas, se estabeleça por meio de uma função do tipo $h(t) = A + B \cos (wt)$, em que **A**, **B** e **w** são constantes reais positivas.

Nesta atividade, você vai determinar a lei da função que relaciona a altura (**h**) da maré e o tempo (**t**), construir seu gráfico e resolver um problema. Para isso, é preciso, primeiro, encontrar os valores das constantes **A**, **B** e **w**.

a) Determine o valor de **w**, lembrando que o período dessa função é dado por $p = \dfrac{2\pi}{|w|}$.

b) Com o valor de **w** obtido no item *a* escreva a lei (parcial) dessa função. Para determinar os valores de **A** e **B**, a sugestão é utilizar a informação sobre o conjunto imagem dessa função.

c) Escreva a lei da função que relaciona **h** com **t**.

d) Por meio da lei obtida, é possível prever a altura da maré em outros momentos, além dos de baixa e alta. Determine a altura da maré para $t = 10$ (aproximadamente 14 horas do 1º dia) e para $t = 28$ (aproximadamente 8 horas do 2º dia).

e) Construa o gráfico da função obtida no item c.