CAPÍTULO 5

Matrizes

Introdução

ERNESTO REGHRAN/PULSAR IMAGENS

Em 2010, pouco mais de 9 mil pessoas residiam na zona rural de Manaus, enquanto cerca de 1792 mil residiam na zona urbana. Vista da cidade de Manaus (AM), 2015.

Em jornais, revistas e na internet frequentemente encontramos informações numéricas organizadas em forma de tabelas, com linhas e colunas. Vejamos alguns casos.

População nos Censos Demográficos, segundo as Grandes Regiões, as Unidades da Federação e a situação do domicílio – 1980/2010

Ano	Situação do domicílio	BRASIL	Região Norte	Região Nordeste	Região Sudeste	Região Sul	Região Centro-Oeste
1980[1]	Urbana	82 013 375	3 398 897	17 959 640	43 550 664	12 153 971	4 950 203
	Rural	39 137 198	3 368 352	17 459 516	9 029 863	7 226 155	2 053 312
1991[2]	Urbana	110 875 826	5 931 567	25 753 355	55 149 437	16 392 710	7 648 757
	Rural	36 041 633	4 325 699	16 716 870	7 511 263	5 724 316	1 763 485
2000[2]	Urbana	137 755 550	9 002 962	32 929 318	65 441 516	20 306 542	10 075 212
	Rural	31 835 143	3 890 599	14 763 935	6 855 835	4 783 241	1 541 533
2010[2]	Urbana	160 925 792	11 644 509	38 821 246	74 696 178	23 260 896	12 482 963
	Rural	29 830 007	4 199 945	14 260 704	5 668 232	4 125 995	1 575 131

(1) População recenseada. (2) População residente.

Fonte: IBGE, Censo Demográfico 1980, 1991, 2000 e 2010. Disponível em: <www.censo2010.ibge.gov.br/sinopse/index.php?dados=8>.Acesso em: 10 mar. 2016.

Produção, consumo e importação de feijão (mil toneladas)

Ano	Produção		Consumo		Importação	
	Projeção	Limite superior	Projeção	Limite superior	Projeção	Limite superior
2015/16	3363	4022	3357	3778	150	296
2016/17	3334	4267	3364	3959	149	357
2017/18	3345	4290	3371	4100	149	403
2018/19	3355	4313	3379	4219	149	442
2019/20	3366	4335	3386	4326	149	476
2020/21	3376	4358	3393	4423	148	507
2021/22	3387	4380	3400	4512	148	536
2022/23	3397	4403	3407	4596	148	562
2023/24	3408	4425	3414	4675	147	587
2024/25	3418	4447	3421	4751	147	611

Fonte: Projeções do agronegócio Brasil 2014/15 a 2024/25 — Projeções de longo prazo. jul. 2015. Disponível em: <www.agricultura.gov.br/arq_editor/PROJECOES_DO_AGRONEGOCIO_2025_WEB.pdf>. Acesso em: 10 mar. 2016.

Sejam **m** e **n** números naturais não nulos.

Uma tabela de $m \cdot n$ números reais dispostos em **m** linhas (filas horizontais) e **n** colunas (filas verticais) é uma matriz do tipo (ou formato) $m \times n$, ou simplesmente matriz $m \times n$.

Representamos usualmente uma matriz colocando seus elementos (números reais) entre parênteses ou entre colchetes.

Vejamos alguns exemplos:

- $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ é uma matriz 1×3.
- $B = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ é uma matriz 3×2.
- $C = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ é uma matriz 2×2.
- $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$ é uma matriz 3×4.
- $E = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ é uma matriz 3×1.

UM POUCO DE **HISTÓRIA**

Como surgiram as matrizes

As matrizes teriam surgido com a escola inglesa Trinity College, em um artigo do matemático Arthur Cayley (1821-1895), datado de 1858. Vale lembrar, no entanto, que, bem antes, no século III a.C., os chineses já desenvolviam um processo de resolução de sistemas lineares em que aparecia implícita a ideia das matrizes.

Cayley criou as matrizes no contexto de estrutura algébrica (assunto de Matemática do Ensino Superior), sem pensar em suas aplicações práticas que apareceriam posteriormente, como a representação de informações numéricas em tabelas, organizadas segundo linhas e colunas, a computação gráfica, as imagens digitais etc.

Fonte de pesquisa: BOYER, Carl B. *História da Matemática*. 3ª ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2010.

ALAMY/FOTOARENA

Trinity College, Cambridge, Inglaterra, 2015.

Representação de uma matriz

Consideremos uma matriz **A** do tipo m × n. Um elemento qualquer dessa matriz pode ser representado pelo símbolo $\mathbf{a}_{ij}$, no qual o índice **i** refere-se à linha e o índice **j** refere-se à coluna em que se encontra tal elemento.

Vamos convencionar que as linhas são numeradas de cima para baixo, e as colunas, da esquerda para a direita.

De modo geral, uma matriz **A** do tipo m × n é representada por $A = (a_{ij})_{m \times n}$, em que **i** e **j** são números inteiros positivos tais que $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, e $\mathbf{a}_{ij}$ é um elemento qualquer de **A**. Acompanhe o exemplo a seguir.

EXEMPLO 1

Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$

- O elemento que está na linha 1, coluna 1, é $a_{11} = -1$.
- O elemento que está na linha 1, coluna 2, é $a_{12} = 0$.
- O elemento que está na linha 2, coluna 1, é $a_{21} = -2$.
- O elemento que está na linha 2, coluna 2, é $a_{22} = 5$.
- O elemento que está na linha 3, coluna 1, é $a_{31} = 3$.
- O elemento que está na linha 3, coluna 2, é $a_{32} = 4$.

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

1 Escreva a matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$, em que $a_{ij} = i - j$.

Solução:

A é uma matriz do tipo 2×3 e pode ser genericamente representada por $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$.

Fazendo $a_{ij} = i - j$, temos:

- $a_{11} = 1 - 1 = 0$
- $a_{12} = 1 - 2 = -1$
- $a_{13} = 1 - 3 = -2$
- $a_{21} = 2 - 1 = 1$
- $a_{22} = 2 - 2 = 0$
- $a_{23} = 2 - 3 = -1$

Assim, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Matrizes especiais

Vejamos alguns tipos de matrizes especiais.

- **Matriz linha:** é uma matriz formada por uma única linha.
  - $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ é uma matriz linha 1×3.
  - $B = \begin{bmatrix} 0 & -3 \end{bmatrix}$ é uma matriz linha 1×2.
- **Matriz coluna:** é uma matriz formada por uma única coluna.
  - $A = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \\ -8 \end{bmatrix}$ é uma matriz coluna 4×1.
  - $B = \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz coluna 3×1.
- **Matriz nula:** é uma matriz cujos elementos são todos iguais a zero.
  Pode-se indicar a matriz nula $m \times n$ por $0_{m \times n}$.
  - $0_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ é a matriz nula 2×3.
  - $0_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ é a matriz nula 2×2.
- **Matriz quadrada:** é uma matriz que possui número de linhas igual ao número de colunas.
  - $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ é uma matriz quadrada 2×2. Dizemos que **A** é matriz quadrada de ordem 2.

- $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & \frac{1}{3} \\ -2 & 0 & 7 \\ \sqrt{3} & 1 & 4 \end{pmatrix}$ é uma matriz quadrada 3×3. Dizemos que **B** é quadrada de ordem 3.

Seja **A** uma matriz quadrada de ordem **n**. Temos que:

- os elementos de **A** cujo índice da linha é igual ao índice da coluna constituem a **diagonal principal** de **A**.

  Se **A** é uma matriz quadrada de ordem 3, os elementos $\mathbf{a_{11}}$, $\mathbf{a_{22}}$ e $\mathbf{a_{33}}$ formam a diagonal principal de **A**:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

- os elementos da matriz **A** cuja soma dos índices da linha e da coluna é igual a $n + 1$ constituem a **diagonal secundária** de **A**.

  Retomando o exemplo anterior, os elementos $\mathbf{a_{13}}$, $\mathbf{a_{22}}$ e $\mathbf{a_{31}}$ formam a diagonal secundária de **A**.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Matriz transposta

Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$, chama-se **transposta de A** (indica-se por $\mathbf{A^t}$) a matriz:

$$A^t = (a'_{ji})_{n \times m}$$

tal que $a'_{ji} = a_{ij}$ para todo **i** e todo **j**.

Em outras palavras, a matriz $\mathbf{A^t}$ é obtida a partir de **A** trocando-se, ordenadamente, suas linhas pelas colunas.

- A transposta de $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$ é $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$.

  Para a matriz **A**, observe que: $a_{11} = 1 = a'_{11}$

$$a_{12} = 3 = a'_{21}$$
$$a_{21} = 5 = a'_{12}$$
$$a_{22} = 9 = a'_{22}$$

- A transposta de $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ é $B^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$.

- A transposta de $C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix}$ é $C^t = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$.

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

1 Dê o tipo (formato) de cada uma das seguintes matrizes:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -7 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 & 9 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 4 \\ -2 & 9 & 6 \end{bmatrix}$

e) $E = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

f) $F = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & -3 \\ 2 & 7 & 0 & -1 \\ 3 & 9 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

2 Em cada caso, determine o elemento $\mathbf{a}_{22}$, se existir:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ -5 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 7 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

3 Escreva a matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$, em que $a_{ij} = 3i - 2j$.

4 Determine a matriz $B = (b_{ij})_{3 \times 2}$, sendo $b_{ij} = 2 + i + j$.

5 Qual é a soma dos elementos da matriz $C = (c_{ij})_{2 \times 4}$, em que $c_{ij} = 1 + i - j$?

6 Em cada caso, obtenha a transposta da matriz dada:

a) $A = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -9 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} -8 & 7 & 5 \end{pmatrix}$

e) $E = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 11 \\ 0{,}5 & 7 \\ 3 & 4{,}1 \end{pmatrix}$

f) $F = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

g) $G = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

7 Seja $A = (a_{ij})_{3 \times 2}$, em que $a_{ij} = 2i + 3j$. Escreva a matriz $\mathbf{A}^t$.

8 Qual é o elemento $\mathbf{a}_{46}$ da matriz $A = (a_{ij})_{8 \times 8}$, em que $a_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \frac{2j}{i}$?

9 Seja a matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, em que $a_{ij} = i \cdot j$. Forneça os elementos que pertencem às diagonais principal e secundária de **A**.

10 Na matriz seguinte, estão representadas as quantidades de sorvetes de 1 bola e de 2 bolas comercializados no primeiro bimestre de um ano em uma sorveteria:

$$A = \begin{pmatrix} 1\,320 & 1\,850 \\ 1\,485 & 2\,040 \end{pmatrix}$$


THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Cada elemento $\mathbf{a}_{ij}$ dessa matriz representa o número de unidades do sorvete do tipo **i** (i = 1 representa uma bola e i = 2, duas bolas) vendidas no mês **j** (j = 1 representa janeiro e j = 2, fevereiro).

a) Quantos sorvetes de duas bolas foram vendidos em janeiro?

b) Em fevereiro, quantos sorvetes de duas bolas foram vendidos a mais que os de uma bola?

c) Se o sorvete de uma bola custa R$ 3,00 e o de duas bolas custa R$ 5,00, qual foi a arrecadação bruta da sorveteria no primeiro bimestre com a venda desses dois tipos de sorvete?

11 A matriz **D** seguinte representa as distâncias (em quilômetros) entre as cidades **X**, **Y** e **Z**:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 15 & 27 \\ 15 & 0 & 46 \\ 27 & 46 & 0 \end{bmatrix}$$

Cada elemento $\mathbf{a}_{ij}$ dessa matriz fornece a distância entre as cidades **i** e **j**, com $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3\}$. Se a cidade **X** é representada pelo número 1, **Y** por 2 e **Z** por 3:

a) determine as distâncias entre **X** e **Y**, **Z** e **X**, e **Y** e **Z**.

b) qual é a transposta da matriz **D**?

12 Dê a matriz $A = (a_{ij})_{4 \times 3}$, em que: $a_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ se } i \geqslant j \\ 1, \text{ se } i < j \end{cases}$

13 Seja $A = (a_{ij})_{3 \times 2}$, em que: $a_{ij} = \begin{cases} \cos(\pi i), \text{ se } i \geqslant j \\ \text{sen}(\pi j), \text{ se } i < j \end{cases}$

a) Escreva **A**. **b)** Escreva $\mathbf{A}^t$.

14 O quadrangular final de um torneio panamericano de futebol feminino reúne as seleções de Argentina, Brasil, Canadá e México, que jogam entre si no sistema "todos contra todos" uma única vez. Na matriz **Q** seguinte está representada a quantidade de gols que a seleção do país **i** marcou no jogo contra a seleção do país **j**, com $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$, sendo que os índices 1, 2, 3 e 4 representam, respectivamente, as seleções de Argentina, Brasil, Canadá e México. (Se $i = j$, o elemento $\mathbf{q}_{ij}$ será indicado por **x**.)

$$Q = \begin{pmatrix} x & 0 & 2 & 2 \\ 1 & x & 3 & 2 \\ 3 & 3 & x & 0 \\ 1 & 2 & 1 & x \end{pmatrix}$$

No futebol, a vitória vale 3 pontos, o empate vale 1 e a derrota não pontua.

a) Qual foi o placar de Canadá × México?

b) Qual seleção terminou com a menor pontuação? Qual foi essa pontuação?

15 Na tabela a seguir, estão representadas as quantidades de proteínas, colesterol, cálcio e carboidrato encontradas em alguns tipos de queijos.

Composição por 100 g

	Proteínas (g)	Colesterol (mg)	Cálcio (mg)	Carboidrato (g)
Queijo minas frescal	17,4	62	579	3,2
Queijo mozarela	22,6	80	875	3,0
Queijo parmesão	35,6	106	992	1,7

Fonte: Tabela Brasileira de Composição de Alimentos (TACO) 4ª edição revisada e ampliada. 2011. Disponível em: <www.unicamp.br/nepa/taco/contar/taco_4_edicao_ampliada_e_revisada.pdf?arquivo=taco_4_versao_ampliada_e_revisada.pdf>. Acesso em: 10 mar. 2016.

a) A essa tabela é possível associar uma matriz $Q = (q_{ij})_{m \times n}$. Quais são os valores de **m** e **n**?

b) Obtenha os valores de $\mathbf{q}_{23}$ e $\mathbf{q}_{31}$, explicando seus respectivos significados.

c) Danilo consome, semanalmente, duas porções de 500 g de queijo mozarela cada uma. Substituindo-o por queijo minas frescal, quantos miligramas a menos de colesterol ele terá ingerido ao fim de um ano? Considere o ano com 52 semanas.

d) Uma amostra de queijo parmesão apresenta mais ou menos que a metade de carboidratos presente em uma amostra de mesma massa de queijo frescal?

16 Chama-se **traço** de uma matriz quadrada a soma dos elementos de sua diagonal principal.

a) Determine os traços de cada uma das matrizes seguintes:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}; \; B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & 3 \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = (c_{ij})_{4 \times 4} \text{ em que } c_{ij} = 3i + j - 1.$$

b) Determine $0 \leqslant \theta < 2\pi$, de modo que o traço da matriz $M = \begin{pmatrix} \text{sen}\,\theta & -1 \\ 4 & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$ seja igual a 1.

Matrizes e imagens digitais

Você sabia que uma imagem na tela de um computador ou uma foto tirada em uma câmera digital podem ser representadas por matrizes?

SHUTTERSTOCK

Uma imagem digital é formada por um grande número de pontos. Cada um desses pontos é chamado ***pixel*** (do inglês "picture element"). O *pixel* é a menor unidade (elemento) de uma imagem digital. Em linguagem informal, *pixels* são minúsculos "pontinhos" coloridos que, reunidos, compõem uma imagem. O **megapixel** é um múltiplo do *pixel* e corresponde a 1 milhão de *pixels*. Por exemplo, uma imagem digital obtida por uma câmera com resolução de 3 840 *pixels* na horizontal e 2 400 *pixels* na vertical ($3\,840 \times 2\,400$) corresponde a um total de 9 216 000 *pixels* (pois $3\,840 \cdot 2\,400 = 9\,216\,000$), ou seja, aproximadamente 9 *megapixels*. A título de curiosidade, para compartilhamento de fotos na internet ou envio por *e-mail*, são suficientes câmeras de 1 ou 2 *megapixels*.

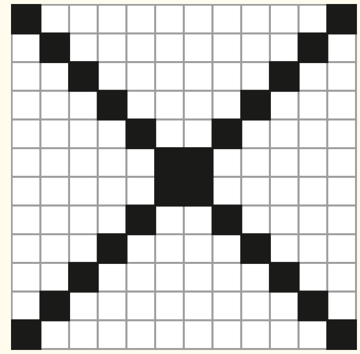
Quanto maior o número de *pixels*, maior será o número de detalhes disponíveis no momento da captura da foto e, desse modo, maior é a chance de uma melhor resolução de imagem no momento que a foto for impressa (a resolução depende também da capacidade de captação do sensor da câmera).

Para compreender o modo pelo qual uma imagem digital é processada e digitalizada, vamos iniciar com um exemplo simples, no qual serão usadas apenas duas cores (imagens binárias): preto e branco.

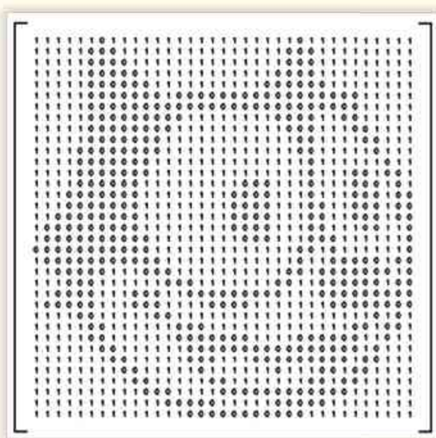
Uma determinada imagem pode ser associada por meio de um algoritmo computacional a uma matriz cujos elementos são os números 0 e 1. Convencionaremos que 0 indica a cor preta e 1 indica a cor branca.

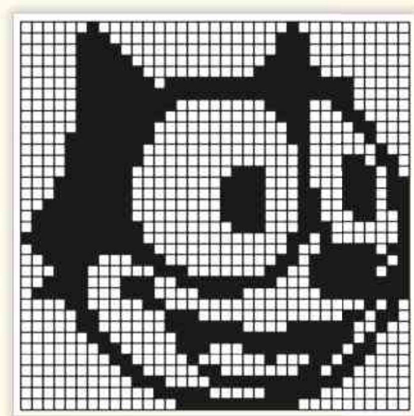
Seja **M** a matriz 12 × 12 dada a seguir; a imagem à direita correspondente a essa matriz **M**.

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



No exemplo seguinte, a matriz 35 × 35 à esquerda fornece a imagem digital do gato Félix, à direita.





Reprodução de imagem disponível em: <www.uff.br/cdme/matrix/matrix-html/matrix_boolean/matrix_boolean_br.html>. Acesso em: 10 mar. 2016.

As imagens digitais são representações processadas por um computador ou adquiridas por meio de um dispositivo de captura e processadas, posteriormente, por algoritmos computacionais. Como informação digital, elas podem ser armazenadas, processadas e transformadas por qualquer sistema de informação multimídia.

Na computação, a menor unidade de informação que pode ser transmitida ou armazenada é 1 *bit* (do inglês "binary digit" ou "dígito binário"). O *bit* pode assumir apenas dois valores: 0 e 1. Normalmente, em imagens 2D (duas dimensões) capturadas em uma câmera digital, os programas computacionais associam a cada unidade de imagem um valor inteiro não negativo correspondente a 1 *byte* = 8 *bits*.

- O 1º *bit* pode ser 0 ou 1; temos 2 possibilidades;
- O 2º *bit* pode ser 0 ou 1; temos 2 possibilidades;

⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮

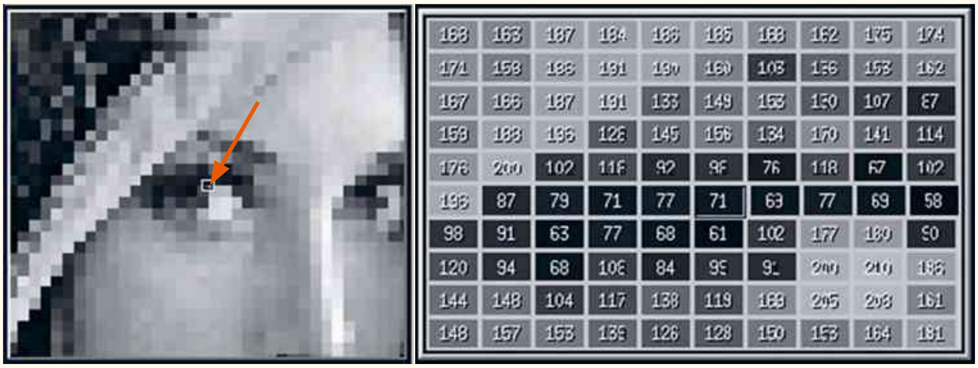
- O 8º *bit* pode ser 0 ou 1; temos 2 possibilidades.

Assim, o número de valores distintos possíveis que podem ser associados a um *pixel* é $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{\text{8 fatores}} = 2^8 = 256$.

Nessas condições, 0 passa a indicar a cor preta (ausência total de intensidade luminosa) e 255 passa a indicar a cor branca (intensidade luminosa máxima), sendo que os valores intermediários 1, 2, 3, ..., 252, 253 e 254 passam a indicar as inúmeras tonalidades de cinza. Do cinza muito escuro ao cinza muito claro há 254 tonalidades distintas!

É através dessa codificação que são formadas as imagens digitais em preto e branco, com as tonalidades intermediárias de cinza.

Observe estas duas imagens.



Reprodução de imagens disponível em: <www.ic.unicamp.br/~cpg/material-didatico/mo815/9802/curso/node6.html>. Acesso em: 10 mar. 2016.

A imagem digital da esquerda mostra um rosto feminino e há um destaque em uma pequena parte do olho. A imagem da direita mostra uma matriz 10×10 (são 100 *pixels*, pois $10 \cdot 10 = 100$) associada a essa parte destacada. Observe que cada um dos elementos dessa matriz guarda um número inteiro entre 0 e 255, correspondente à tonalidade de cinza utilizada em cada *pixel*, que está indicada na própria matriz.

Por fim, para as imagens coloridas, no modelo mais usado de câmera, cada *pixel* pode ser decomposto em três cores primitivas — vermelho, verde e azul —, representadas pelas suas iniciais em inglês ("red" para vermelho, "green" para verde e "blue" para azul). Esse sistema é conhecido como RGB.

A cada *pixel* está associada uma tripla ordenada de valores, indicando, nessa ordem, a intensidade de vermelho, verde e azul no ponto de imagem considerado. Assim, por exemplo, temos as seguintes correspondências:

vermelho: RGB (255, 0, 0)

verde: RGB (0, 255, 0)

azul: RGB (0, 0, 255)

amarelo: RGB (255, 255, 0)

abóbora: RGB (255, 117, 24)

azul cobalto: RGB (0, 71, 171)

cobre: RGB (184, 115, 51)

laranja: $\text{RGB}\ (\underbrace{255}_{\text{intensidade de vermelho}}, \underbrace{165}_{\text{intensidade de verde}}, \underbrace{0}_{\text{intensidade de azul}})$

Está curioso para saber a quantidade de tonalidades coloridas distintas que podem ser obtidas em um *pixel*? Esse número é superior a 16 milhões! Entenda o porquê:

- O primeiro elemento da tripla RGB, que dá a intensidade de vermelho, pode assumir 256 valores distintos.
- O segundo elemento da tripla RGB, que dá a intensidade de verde, pode assumir 256 valores distintos.
- O terceiro elemento da tripla RGB, que dá a intensidade de azul, pode assumir 256 valores distintos.

Assim, o número de tonalidades coloridas distintas em cada *pixel* é:

$$256 \cdot 256 \cdot 256 = 16\,777\,216$$

Fontes de pesquisa: Matrizes e imagens digitais. Disponível em: <www.uff.br/cdme/matrix/matrix-html/matrix/br.html>. Acesso em: 10 mar. 2016.; Fundamentos de processamento de imagem digital. Disponível em: <www.ic.unicamp.br/~cpg/material-didatico/mo815/9802/curso/curso.html>. Acesso em: 10 mar. 2016.

Igualdade de matrizes

Duas matrizes **A** e **B** de mesmo tipo $m \times n$ são iguais se todos os seus elementos correspondentes são iguais, isto é, sendo $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, temos que $A = B$ se $a_{ij} = b_{ij}$, para todo **i** ($i = 1, 2, \dots, m$) e para todo **j** ($j = 1, 2, \dots, n$).

OBSERVAÇÃO

Dizemos que elementos de mesmo índice (linha e coluna) são correspondentes.

Por exemplo, para que as matrizes $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 2 & b \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & d \\ c & -5 \end{pmatrix}$ sejam iguais, devemos ter: $\begin{cases} a = 3 \\ 1 = d \\ 2 = c \\ b = -5 \end{cases}$

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

17 Determine os números reais **a**, **b**, **c** e **d** para que se tenha $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 4 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & b \\ d & 6 \end{pmatrix}$

18 Determine **x**, **y** e **z** reais que satisfaçam

$$\begin{pmatrix} x + y & 2 \\ 4 & x - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & z \\ z^2 & 1 \end{pmatrix}$$

19 Em cada item determine, caso exista, o número real **m** que satisfaz a igualdade:

a) $\begin{pmatrix} m - 1 & 0 \\ 1 - m & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2m \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 9 - m^2 & 1 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ m & 7 \end{pmatrix}$

20 Determine os números reais **p** e **q** de modo que as matrizes $\begin{pmatrix} p + q & -2 \\ 0 & 2p - q \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ sejam iguais.

21 Determine os números reais **a**, **b**, **c**, **d**, **e** e **f** que tornam verdadeira a igualdade:

$$\begin{bmatrix} a + 3 & b + 2 & c + 1 \\ d & 5 - e & 2f \end{bmatrix}^t = 0_{3 \times 2}$$

22 Uma matriz quadrada **A** é dita simétrica se $A = A^t$.

a) Entre as matrizes seguintes, quais são simétricas?

$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} \text{sen } \pi & \cos \pi \\ \text{sen } \frac{3\pi}{2} & \cos \frac{3\pi}{2} \end{pmatrix}$

b) Sabendo que a matriz $\begin{pmatrix} 3 & 2 & y \\ x & -2 & 5 \\ 3 & z & 1 \end{pmatrix}$ é simétrica, qual é o valor de $x + 2y - z$?

Adição de matrizes

As tabelas abaixo representam o número de unidades vendidas, em uma concessionária, de dois veículos 0 km, modelos **A** e **B**, de acordo com o tipo de combustível, durante os dois primeiros meses de determinado ano:

Janeiro

Modelo \ Combustível	Flex	Gasolina	Álcool
A	4453	1985	415
B	2693	1378	289

Fevereiro

Modelo \ Combustível	Flex	Gasolina	Álcool
A	5893	2031	531
B	3412	1597	402

De que maneira podemos determinar as vendas de cada tipo de veículo no primeiro bimestre desse ano? Intuitivamente, sabemos que é preciso somar os elementos correspondentes das tabelas anteriores. Usando matrizes, temos:

$$\begin{bmatrix} 4453 & 1985 & 415 \\ 2693 & 1378 & 289 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5893 & 2031 & 531 \\ 3412 & 1597 & 402 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10346 & 4016 & 946 \\ 6105 & 2975 & 691 \end{bmatrix}$$

Assim, por exemplo, 4016 é o número total de veículos do modelo **A**, a gasolina, vendidos no primeiro bimestre.

Dadas duas matrizes do mesmo tipo, $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, a soma de **A** com **B** (representa-se por $A + B$) é a matriz $C = (c_{ij})_{m \times n}$, em que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para $1 \leqslant i \leqslant m$ e $1 \leqslant j \leqslant n$.

Em outras palavras, a matriz soma **C** é do mesmo tipo que **A** e **B** e é tal que cada um de seus elementos é a soma de elementos correspondentes de **A** e **B**.

- $\begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ -3 & -4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 & \frac{5}{2} \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

- $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1{,}2 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}2 & -3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

2 Resolva a equação matricial $A + X = B$, sendo $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -4 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 7 \end{bmatrix}$.

Solução:

Uma equação matricial é aquela em que a incógnita é uma matriz.

A matriz procurada é do tipo 2×3 e podemos representá-la por $X = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$.

Temos:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

Daí:

$$\begin{bmatrix} 3 + a & 2 + b & 1 + c \\ -1 + d & -4 + e & 2 + f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

Do conceito de igualdade, temos:

- $3 + a = 7 \Rightarrow a = 4$
- $-1 + d = 1 \Rightarrow d = 2$
- $2 + b = 5 \Rightarrow b = 3$
- $-4 + e = 6 \Rightarrow e = 10$
- $1 + c = 1 \Rightarrow c = 0$
- $2 + f = 7 \Rightarrow f = 5$

Logo, $X = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & 10 & 5 \end{bmatrix}$.

Propriedades

Sendo **A**, **B** e **C** matrizes do mesmo tipo ($m \times n$) e $0_{m \times n}$ a matriz nula, do tipo $m \times n$, valem as seguintes propriedades para a adição de matrizes:

I. **Comutativa:** $A + B = B + A$

II. **Associativa:** $(A + B) + C = A + (B + C)$

III. **Existência do elemento neutro:** existe **M** tal que $A + M = A$, qualquer que seja a matriz $A_{m \times n}$.

Observe que, nesse caso, **M** é a matriz nula do tipo $m \times n$.

IV. **Existência do oposto (ou simétrico):** existe **A'** tal que $A + A' = 0_{m \times n}$.

Para exemplificar, vejamos a demonstração das propriedades II e III.

- Para a propriedade II, dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n}$ e $C = (c_{ij})_{m \times n}$, temos:

  $(A + B) + C = D = (d_{ij})_{m \times n}$ e $A + (B + C) = E = (e_{ij})_{m \times n}$

  Queremos mostrar que $D = E$.

  Para todo $i \in \{1, 2, ..., m\}$ e para todo $j \in \{1, 2, ..., n\}$, temos:

  $$d_{ij} = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}$$

  Usando a propriedade associativa da adição de números reais, podemos escrever:

  $d_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) = e_{ij}$ e, então, $D = E$, isto é, $(A + B) + C = A + (B + C)$

- Para a propriedade III, como $A + M = A$, então $a_{ij} + m_{ij} = a_{ij} \Rightarrow m_{ij} = 0$, para todo **i** e todo **j**. Assim $M = 0_{m \times n}$, ou seja, o elemento neutro da adição é a matriz nula.

Matriz oposta

Seja a matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$. Chama-se **oposta de A** a matriz representada por $-A$, tal que $A + (-A) = 0_{m \times n}$, sendo $0_{m \times n}$ a matriz nula do tipo $m \times n$.

Observe que a matriz $-A$ é obtida de **A** trocando-se o sinal de cada um de seus elementos:

- $A = \begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{3} & -1 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$; então, $-A = \begin{bmatrix} -3 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$.

- $B = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 0,5 & 5 \end{bmatrix}$; então, $-B = \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ -0,5 & -5 \end{bmatrix}$.

PENSE NISTO:

Note que, se $B = (b_{ij})_{m \times n}$ é a oposta de $A = (a_{ij})_{m \times n}$, então $b_{ij} = -a_{ij}$, para todo $i \in \{1, 2, ..., m\}$ e $j \in \{1, 2, ..., n\}$.

Subtração de matrizes

Dadas duas matrizes do mesmo tipo $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, chama-se diferença entre **A** e **B** (representa-se por $A - B$) a matriz soma de **A** com a oposta de **B**, isto é:

$$A - B = A + (-B)$$

Observe os exemplos a seguir:

- $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 6 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 6 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & -5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

3 Resolva a equação X − A + B = C, sendo $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Solução:

1º modo:

A matriz **X** procurada é do tipo 3 × 1, e a representaremos por $X = \begin{pmatrix} m \\ n \\ p \end{pmatrix}$.

Temos:

$$X - A + B = C \Rightarrow \begin{pmatrix} m \\ n \\ p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} m-1 \\ n+1 \\ p-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} m - 1 = 2 \Rightarrow m = 3 \\ n + 1 = -2 \Rightarrow n = -3 \\ p - 3 = 3 \Rightarrow p = 6 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

2º modo:

Recorrendo às propriedades da adição de matrizes, podemos "isolar" a matriz **X** procedendo da mesma forma se **X**, **A**, **B** e **C** fossem números reais. Obtemos:

$$X = C - B + A$$

Assim:

$$X = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

PENSE NISTO:

Use propriedades da adição de matrizes para obter outra solução para o exercício resolvido 2.

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

23 Efetue:

a) $\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 9 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11 & 17 \\ 0 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 6 & 8 & 7 \end{pmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & -7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

24 Sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{10 \times 12}$, em que $a_{ij} = 2i - j$, e $B = (b_{ij})_{10 \times 12}$, em que $b_{ij} = i + j$. Seja C = A + B, em que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

a) Obtenha os valores dos elementos $\mathbf{c_{78}}$ e $\mathbf{c_{95}}$.

b) Obtenha a fórmula que fornece o valor de um elemento genérico $\mathbf{c_{ij}}$ em função de **i** e **j**.

25 Resolva as seguintes equações matriciais:

a) $X + \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 3 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

b) $X - \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 11 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = X - \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

26 As tabelas a seguir indicam o número de faltas de três alunos (**A**, **B** e **C**) em cinco disciplinas (Português, Matemática, Biologia, História e Física, representadas por suas iniciais), nos meses de março e abril.

Março

	P	M	B	H	F
Aluno A	2	1	0	4	2
Aluno B	1	0	2	1	1
Aluno C	5	4	2	2	2

Abril

	P	M	B	H	F
Aluno A	1	2	0	1	3
Aluno B	0	1	1	3	1
Aluno C	3	1	3	2	3

a) Qual é a matriz que representa o número de faltas desses alunos no primeiro bimestre em cada disciplina?

b) No primeiro bimestre, qual aluno teve o maior número de faltas em Português? E em Matemática? E em História?

27 Uma matriz quadrada **A** é dita antissimétrica se $A = -A^t$.

a) A matriz $\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$ é antissimétrica? E a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$?

b) Existe algum valor real de **m** para o qual a matriz $\begin{bmatrix} 0 & m \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ é antissimétrica? Determine-o, se existir.

28 Determine a matriz **X**, tal que $(X + A)^t = B$, sendo:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Multiplicação de um número real por uma matriz

Seja a matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e **k** um número real. O produto de **k** pela matriz **A** (indica-se: $k \cdot A$) é a matriz $B = (b_{ij})_{m \times n}$, em que $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$, para todo $i \in \{1, 2, ..., m\}$ e para todo $j \in \{1, 2, ..., n\}$.

Isso significa que **B** é obtida de **A** multiplicando-se por **k** cada um dos elementos de **A**.

Observe os exemplos a seguir:

- Se $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$, então $3 \cdot A = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 21 \end{pmatrix}$.
- Se $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}$, então $\frac{1}{2} \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.
- Se $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & \sqrt{2} \\ \frac{1}{2} & -3 & 0 \end{pmatrix}$, então $(-2) \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -8 & -2\sqrt{2} \\ -1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$.

Propriedades

Sejam **k** e **ℓ** números reais e **A** e **B** matrizes do mesmo tipo. Valem as seguintes propriedades:

I. $k \cdot (\ell \cdot A) = (k \cdot \ell) \cdot A$

II. $k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B$

III. $(k + \ell) \cdot A = k \cdot A + \ell \cdot A$

IV. $1 \cdot A = A$

A título de exemplo, vamos provar a propriedade II. As demais são análogas.

Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$ e sendo $k \in \mathbb{R}$, temos:

$$k \cdot (A + B) = C = (c_{ij})_{m \times n};\quad k \cdot A = D = (d_{ij})_{m \times n} \text{ e } k \cdot B = E = (e_{ij})_{m \times n}$$

Vamos mostrar que $C = D + E$.

Para todo $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ e todo $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, temos que:

$$c_{ij} = k \cdot (a_{ij} + b_{ij})$$

Usando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, para números reais, obtemos:

$$c_{ij} = k \cdot a_{ij} + k \cdot b_{ij} = d_{ij} + e_{ij}$$

Daí, podemos concluir que $C = D + E$, isto é: $k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B$

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

29 Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$, obtenha as matrizes:

a) $4 \cdot A$ **b)** $\frac{1}{3} \cdot A$ **c)** $-2 \cdot A$

30 Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 6 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$.

Determine as seguintes matrizes:

a) $3A + B$ **b)** $A - 3B$ **c)** $2 \cdot A^t + 3 \cdot B^t$

31 Resolva a equação matricial:

$$\begin{pmatrix} -7 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & -3 \end{pmatrix} + 2 \cdot X = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 3 \\ 8 & 12 & 5 \end{pmatrix}$$

32 Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, determine a matriz **X** que verifica a equação $2A + B = X + 2C$.

33 Determine a matriz **X** que satisfaz a equação:

$$2 \cdot X^t + A = B,$$

sendo $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -6 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$.

Multiplicação de matrizes

A tabela abaixo representa as notas obtidas em um curso de espanhol pelos alunos **X**, **Y** e **Z**, em cada bimestre do ano letivo.

	1º bimestre	2º bimestre	3º bimestre	4º bimestre
Aluno X	7	8	6	8
Aluno Y	4	5	5	7
Aluno Z	8	7	9	10

Para calcular a nota final do ano, o professor deve fazer uma média ponderada usando como pesos, respectivamente, 1, 2, 3 e 4. Assim, a média de cada aluno será determinada pela fórmula:

$$\frac{(\text{nota}_{1^{\underline{o}}\text{ bim.}} \cdot 1) + (\text{nota}_{2^{\underline{o}}\text{ bim.}} \cdot 2) + (\text{nota}_{3^{\underline{o}}\text{ bim.}} \cdot 3) + (\text{nota}_{4^{\underline{o}}\text{ bim.}} \cdot 4)}{1 + 2 + 3 + 4}$$

que equivale a fazer:

$$(\text{nota}_{1^{\underline{o}}\text{ bim.}} \cdot 0{,}1) + (\text{nota}_{2^{\underline{o}}\text{ bim.}} \cdot 0{,}2) + (\text{nota}_{3^{\underline{o}}\text{ bim.}} \cdot 0{,}3) + (\text{nota}_{4^{\underline{o}}\text{ bim.}} \cdot 0{,}4)$$

Podemos representar a tabela das notas bimestrais pela matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 6 & 8 \\ 4 & 5 & 5 & 7 \\ 8 & 7 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

Vamos representar os pesos dos bimestres (expressos na forma decimal, em relação à soma dos pesos) pela matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}2 \\ 0{,}3 \\ 0{,}4 \end{bmatrix}$$

Vamos calcular as médias de cada aluno:

- aluno **X**: $(7 \cdot 0{,}1) + (8 \cdot 0{,}2) + (6 \cdot 0{,}3) + (8 \cdot 0{,}4) = 7{,}3$
- aluno **Y**: $(4 \cdot 0{,}1) + (5 \cdot 0{,}2) + (5 \cdot 0{,}3) + (7 \cdot 0{,}4) = 5{,}7$
- aluno **Z**: $(8 \cdot 0{,}1) + (7 \cdot 0{,}2) + (9 \cdot 0{,}3) + (10 \cdot 0{,}4) = 8{,}9$

Essas médias podem ser registradas em uma matriz **C**, que é o produto da matriz **A** (notas) pela matriz **B** (pesos):

$$C = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 6 & 8 \\ 4 & 5 & 5 & 7 \\ 8 & 7 & 9 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}2 \\ 0{,}3 \\ 0{,}4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7{,}3 \\ 5{,}7 \\ 8{,}9 \end{bmatrix}$$

A ideia utilizada para obter a matriz **C** será usada agora para definirmos matematicamente a multiplicação de matrizes.

Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{jk})_{n \times p}$, chama-se **produto de A por B**, e se indica por $A \cdot B$, a matriz $C = (c_{ik})_{m \times p}$, em que $c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + a_{i3} \cdot b_{3k} + a_{i4} \cdot b_{4k} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nk}$; para todo $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ e todo $k \in \{1, 2, \ldots, p\}$.

Acompanhe o procedimento que devemos seguir para obter o elemento $\mathbf{c_{ik}}$ da matriz **C**:

1º) Tomamos ordenadamente os **n** elementos da linha **i** da matriz **A**: $\mathbf{a_{i1}}, \mathbf{a_{i2}}, \ldots, \mathbf{a_{in}}$. 1

2º) Tomamos ordenadamente os **n** elementos da coluna **k** da matriz **B**: $\mathbf{b_{1k}}, \mathbf{b_{2k}}, \ldots, \mathbf{b_{nk}}$. 2

3º) Multiplicamos o 1º elemento de 1 pelo 1º elemento de 2, o 2º elemento de 1 pelo 2º elemento de 2, e assim sucessivamente.

4º) Somamos os produtos obtidos.

Assim:

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nk}$$

OBSERVAÇÕES

- A definição garante a existência do produto $A \cdot B$ se o número de colunas de **A** é igual ao número de linhas de **B**.
- A matriz produto $C = A \cdot B$ é uma matriz cujo número de linhas é igual ao número de linhas de **A** e o número de colunas é igual ao número de colunas de **B**. Observemos o esquema abaixo:

$$A_{(m \times \mathbf{n})} \cdot B_{(\mathbf{n} \times p)} = C_{(m \times p)}$$

garante a existência do produto

EXEMPLO 2

Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, vamos determinar, se existirem, $A \cdot B$ e $B \cdot A$.

- Como **A** é do tipo 2×3 e **B** é do tipo 3×2, segue que $C = A \cdot B$ existe e é do tipo 2×2.

  Escrevendo os elementos de **C** em sua forma genérica, temos $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}_{2 \times 2}$.

  Da definição, temos:

  - $\mathbf{c_{11}}$ (linha 1 de **A** e coluna 1 de **B**): $c_{11} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 4 = 6$

  $$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2 & 3 & 1 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 0 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array}$$

  - $\mathbf{c_{12}}$ (linha 1 de **A** e coluna 2 de **B**): $c_{12} = 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 1 = 12$

  $$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2 & 3 & 1 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|c|}\hline -2 \\ \hline 5 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}$$

  - $\mathbf{c_{21}}$ (linha 2 de **A** e coluna 1 de **B**): $c_{21} = (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 4 = 7$

  $$\begin{array}{|c|c|c|}\hline -1 & 0 & 2 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 0 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array}$$

  - $\mathbf{c_{22}}$ (linha 2 de **A** e coluna 2 de **B**): $c_{22} = (-1) \cdot (-2) + 0 \cdot 5 + 2 \cdot 1 = 4$

  $$\begin{array}{|c|c|c|}\hline -1 & 0 & 2 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|c|}\hline -2 \\ \hline 5 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}$$

Logo, $C = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$.

- Como **B** é do tipo 3×2 e **A** é do tipo 2×3, segue que $D = B \cdot A$ existe e é do tipo 3×3.

  Assim, $D = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix}$.

  Aplicando a definição, obtemos:

  - $\mathbf{d_{11}}$ (linha 1 de **B** e coluna 1 de **A**): $d_{11} = 1 \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) = 4$

  $$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & -2 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|c|}\hline 2 \\ \hline -1 \\ \hline \end{array}$$

  - $\mathbf{d_{12}}$ (linha 1 de **B** e coluna 2 de **A**): $d_{12} = 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 0 = 3$

  $$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & -2 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|c|}\hline 3 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}$$

  - $\mathbf{d_{13}}$ (linha 1 de **B** e coluna 3 de **A**): $d_{13} = 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 = -3$

  $$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & -2 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$$

- $\mathbf{d_{21}}$ (linha 2 de **B** e coluna 1 de **A**): $d_{21} = 0 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) = -5$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 5 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|c|}\hline 2 \\ \hline -1 \\ \hline \end{array}$$

- $\mathbf{d_{22}}$ (linha 2 de **B** e coluna 2 de **A**): $d_{22} = 0 \cdot 3 + 5 \cdot 0 = 0$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 5 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|c|}\hline 3 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}$$

- $\mathbf{d_{23}}$ (linha 2 de **B** e coluna 3 de **A**): $d_{23} = 0 \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 10$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 5 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$$

- $\mathbf{d_{31}}$ (linha 3 de **B** e coluna 1 de **A**): $d_{31} = 4 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) = 7$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 4 & 1 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|c|}\hline 2 \\ \hline -1 \\ \hline \end{array}$$

- $\mathbf{d_{32}}$ (linha 3 de **B** e coluna 2 de **A**): $d_{32} = 4 \cdot 3 + 1 \cdot 0 = 12$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 4 & 1 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|c|}\hline 3 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}$$

- $\mathbf{d_{33}}$ (linha 3 de **B** e coluna 3 de **A**): $d_{33} = 4 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 6$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 4 & 1 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$$

Logo, $D = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ -5 & 0 & 10 \\ 7 & 12 & 6 \end{pmatrix}$.

Observe, neste exemplo, que $C = A \cdot B$ é uma matriz 2×2 e $D = B \cdot A$ é uma matriz 3×3.

EXEMPLO 3

Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, vamos determinar, se existirem, $A \cdot B$ e $B \cdot A$.

Como **A** é do tipo 2×2 e **B** também, concluímos que existem $A \cdot B$ e $B \cdot A$, pois:

$$A_{2 \times 2} \cdot B_{2 \times 2} \Rightarrow A \cdot B \text{ é do tipo } 2 \times 2$$

$$B_{2 \times 2} \cdot A_{2 \times 2} \Rightarrow B \cdot A \text{ é do tipo } 2 \times 2$$

Temos:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

- $c_{11} = (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 1$
- $c_{12} = (-1) \cdot (-3) + 2 \cdot 2 = 7$
- $c_{21} = 0 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 5$
- $c_{22} = 0 \cdot (-3) + 5 \cdot 2 = 10$

Daí, $A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$

PENSE NISTO:

É sempre possível multiplicar duas matrizes quadradas de mesma ordem? O que se pode afirmar em relação ao tipo da matriz produto?

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}$$

- $d_{11} = 1 \cdot (-1) + (-3) \cdot 0 = -1$
- $d_{12} = 1 \cdot 2 + (-3) \cdot 5 = -13$
- $d_{21} = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 = -1$
- $d_{22} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 = 12$

Daí, $B \cdot A = \begin{bmatrix} -1 & -13 \\ -1 & 12 \end{bmatrix}$

Observe, neste exemplo, que $A \cdot B \neq B \cdot A$.

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

4 Sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{6 \times 3}$, em que $a_{ij} = i - j$, e $B = (b_{jk})_{3 \times 8}$, em que $b_{jk} = j + k$. Sendo $C = A \cdot B =$ $= (c_{ik})_{6 \times 8}$, qual é o valor do elemento $\mathbf{c_{35}}$?

Solução:

O elemento $\mathbf{c_{35}}$ da matriz produto **C** será obtido multiplicando-se ordenadamente os elementos da linha 3 de **A** e os da coluna 5 de **B** e, em seguida, somando os produtos obtidos.

Dessa forma, usamos a "regra de formação" dos elementos de **A** e **B** para determinar apenas as filas procuradas:

$$A = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}_{6 \times 3} ; B = \begin{pmatrix} \cdots & b_{15} & \cdots \\ \cdots & b_{25} & \cdots \\ \cdots & b_{35} & \cdots \end{pmatrix}_{3 \times 8} = \begin{pmatrix} \cdots & 6 & \cdots \\ \cdots & 7 & \cdots \\ \cdots & 8 & \cdots \end{pmatrix}$$

Assim, $c_{35} = 2 \cdot 6 + 1 \cdot 7 + 0 \cdot 8 = 19$.

5 Resolva a equação matricial $A \cdot X = B$, sendo $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Solução:

Precisamos, inicialmente, determinar o tipo da matriz **X**.

Temos:

$$\begin{matrix} A & \cdot & X & = & B \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (2 \times 2) & & (n \times p) & & (2 \times 1) \end{matrix}$$

Devemos ter:

- $n = 2$, para garantir a existência do produto;
- $p = 1$, pois o número de colunas de **X** é igual ao número de colunas de **B**.

Assim, $X = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$

Daí, $\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Efetuando a multiplicação, obtemos:

$\begin{pmatrix} 5r + 7s \\ 2r + 3s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, donde resulta o sistema $\begin{cases} 5r + 7s = 4 \\ 2r + 3s = 1 \end{cases}$, cuja solução é $r = 5$ e $s = -3$.

Assim, $X = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$.

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

34 Determine, se existirem, os produtos:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} -5 & 0 \\ -1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -2 & 8 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

35 Sejam as matrizes:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

Determine, se existir:

a) $A \cdot B$ **b)** $B \cdot A$ **c)** $A \cdot C$ **d)** $B^t \cdot C$ **e)** $B \cdot A^t$

Matriz identidade

Seja **A** uma matriz quadrada de ordem **n**.

A é denominada **matriz identidade de ordem n** (indica-se por $\mathbf{I_n}$) se os elementos de sua diagonal principal são todos iguais a 1, e os demais elementos são iguais a zero. Assim:

- $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ é a matriz identidade de ordem 2.
- $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ é a matriz identidade de ordem 3.

$\vdots$

- $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$ é a matriz identidade de ordem **n**.

Propriedades

Vamos observar, por meio de exemplos, algumas propriedades relativas à multiplicação de matrizes envolvendo a matriz identidade.

I. **A** é uma matriz quadrada de ordem **n**.

- Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$.

$A \cdot I_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = A$

$I_2 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = A$

PENSE NISTO:

Seja $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ -3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Verifique que $B \cdot I_3 = B$ e $I_3 \cdot B = B$.

II. **A** não é uma matriz quadrada, isto é, $\mathbf{A}_{m \times n}$, com $m \neq n$:

- Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$. Temos:

$$I_2 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

Note que $A \cdot I_2$ não existe.

$$A \cdot I_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

Note que $I_3 \cdot A$ não existe.

- Seja $B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$.

$$I_3 \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Note que $B \cdot I_3$ não existe.

$$B \cdot I_2 = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Note que $I_2 \cdot B$ não existe.

Em geral, pode-se dizer que:

- Se **A** é quadrada de ordem **n**, temos: $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$.
- Se $A = (a_{ij})_{m \times n}$, com $m \neq n$, temos: $I_m \cdot A = A$ e $A \cdot I_n = A$.

Propriedades da multiplicação de matrizes

Supondo que as matrizes **A**, **B** e **C** sejam de tipos tais que as operações abaixo possam ser realizadas, valem as seguintes propriedades para a multiplicação de matrizes:

I. Associativa: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

II. Distributiva à direita em relação à adição: $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$

III. Distributiva à esquerda em relação à adição: $C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$

Observe a validade das propriedades I e II nos exemplos a seguir.

- Propriedade I: Sejam $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ -6 \end{pmatrix}$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -16 & 20 & 4 \\ -13 & 15 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow (A \cdot B) \cdot C = \begin{pmatrix} -16 & 20 & 4 \\ -13 & 15 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 68 \\ 25 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} 17 \\ 26 \end{pmatrix} \Rightarrow A \cdot (B \cdot C) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 17 \\ 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 68 \\ 25 \end{pmatrix}$$

- Propriedade II: Sejam $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ -6 \end{pmatrix}$.

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 6 & 3 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow (A + B) \cdot C = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 6 & 3 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -45 \\ 21 \end{pmatrix} \quad *$$

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 5 & 7 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 105 \end{pmatrix}; \quad B \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & -4 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -34 \\ -84 \end{pmatrix}$$

$A \cdot C + B \cdot C = \begin{pmatrix} -11 \\ 105 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -34 \\ -84 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -45 \\ 21 \end{pmatrix}$, que coincide com $*$.

Ao estudar as propriedades da multiplicação de matrizes, é importante observar que:

A multiplicação de matrizes não é comutativa, isto é, em geral, $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Sejam $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; vamos determinar $A \cdot B$ e $B \cdot A$.

$$A_{2 \times \underbrace{2} \cdot B_{\underbrace{2}} \times 2} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\neq$$

$$B_{2 \times \underbrace{2} \cdot A_{\underbrace{2}} \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$$

Existem casos em que apenas uma das multiplicações pode ser feita. Por exemplo, se **A** é do tipo 2×3 e **B** é do tipo 3×4, então:

$\exists\ (A \cdot B)$ e é do tipo 2×4;

$\nexists\ (B \cdot A)$, pois o número de colunas de **B** é 4 e o número de linhas de **A** é 2.

Se $A \cdot B$ e $B \cdot A$ existem e $A \cdot B = B \cdot A$, dizemos que **A** e **B** comutam. Acompanhe o exemplo a seguir.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 & 0 \\ 0 & -17 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 & 0 \\ 0 & -17 \end{pmatrix}$$

Também é importante observar, ao estudar as propriedades da multiplicação de matrizes, que:

Não vale a propriedade do anulamento do produto na multiplicação de matrizes.

A conhecida propriedade $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $b = 0$, válida para **a** e **b** reais, não é válida para matrizes. Isso significa que é possível que o produto entre duas matrizes seja a matriz nula sem que nenhuma das matrizes seja nula.

Observe:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

PENSE NISTO:

Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$,

$B = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ e

$C = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 7 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ e

verifique que $C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$.

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

6 Determine os valores reais de **x** e **y** de modo que as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & 1 \end{pmatrix}$ comutem.

Solução:

Devemos ter $A \cdot B = B \cdot A$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2x \\ -9 + 4y & -3x + 4 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 3x & 4x \\ 2y - 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Daí:

$$\begin{pmatrix} 6 & 2x \\ -9 + 4y & -3x + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 3x & 4x \\ 2y - 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 6 = 6 - 3x & \Rightarrow x = 0 \\ 2x = 4x & \Rightarrow x = 0 \\ -9 + 4y = 2y - 3 & \Rightarrow y = 3 \\ -3x + 4 = 4 & \Rightarrow x = 0 \end{cases} \quad x = 0 \text{ e } y = 3$$

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

36 Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 9 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$.

Se $C = (c_{ij})_{3 \times 2}$ é a matriz produto $A \cdot B$, determine, se existirem, os elementos:

a) c_{22} **b)** c_{31} **c)** c_{33}

37 Sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{6 \times 3}$, em que $a_{ij} = i + j$, e $B = (b_{jk})_{3 \times 4}$, em que $b_{jk} = 2j - k$. Sendo $C = (c_{ik})_{6 \times 4}$ a matriz produto $A \cdot B$, determine o elemento c_{43}.

38 Determine **x** e **y** reais, a fim de que: $\begin{pmatrix} 2 & x \\ y & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

39 Seja **A** uma matriz quadrada de ordem **n**; definimos $A^2 = A \cdot A$. Assim, determine A^2 nos seguintes casos:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

40 Generalizando a definição dada no exercício anterior, temos:

Se $n \in \mathbb{N}^*$ e **A** é uma matriz quadrada, definimos $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{\textbf{n} \text{ fatores}}$.

Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, determine:

a) A^2 **b)** A^3 **c)** A^4 **d)** A^{35} **e)** A^{106}

41 Sabendo que $A = \begin{bmatrix} -4 & m \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ e $A^2 = \begin{bmatrix} 22 & -15 \\ -10 & m + 4 \end{bmatrix}$, determine o valor de **m**.

42 A tabela abaixo mostra as notas obtidas pelos alunos **A**, **B** e **C** nas provas de Português, Matemática e conhecimentos gerais em um exame vestibular.

	Português	**Matemática**	**Conhecimentos gerais**
A	4	6	7
B	9	3	2
C	7	8	10

Se os pesos das provas são 7 (em Português), 6 (em Matemática) e 5 (em conhecimentos gerais), qual a multiplicação de matrizes que permite determinar a pontuação final de cada aluno? Determine a pontuação de cada um.

43 Resolva a equação matricial $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$.

44 Na festa junina organizada pelos alunos do Ensino Médio de um colégio, o sanduíche de "carne louca" e o *hot dog* (cachorro-quente) eram vendidos em três barracas I, II e III espalhadas pelo colégio. Na tabela seguinte está representada a quantidade de cada sanduíche vendida por barraca em certa noite; exceção feita a um campo cujo valor se perdeu.

Sanduíche / **Barraca**	***Hot dog***	**"Carne louca"**
I	22	18
II	36	22
III	?	28

Sabendo que os preços unitários do *hot dog* e da "carne louca" eram R$ 4,50 e R$ 6,00, respectivamente, e que a soma dos valores arrecadados nas três barracas foi R$ 777,00 naquela noite:

a) determine o valor desconhecido da tabela.

b) represente, por meio de uma multiplicação de matrizes, os valores arrecadados em cada uma das barracas.

45 Sejam $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & x \\ y & 1 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$. Sabendo que $A \cdot B = 0_{4 \times 1}$, determine os valores de **x** e **y**.

46 Determine **x** e **y** reais a fim de que as matrizes $\begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ comutem.

47 Dê exemplos de matrizes quadradas de ordem 2 que comutam com a matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$.

48 Um laboratório fabrica um antiácido efervescente em duas versões: tradicional (**T**) e especial (**E**). Na tabela seguinte, temos a composição de envelopes de 5 g, nas duas versões:

Versão / **Componente**	**T**	**E**
Bicarbonato de sódio	2,3 g	2,5 g
Carbonato de sódio	0,5 g	0,5 g
Ácido cítrico	2,2 g	2 g

FERNANDO FAVORETTO/CRIAR IMAGEM

a) Em um certo mês foram fabricados 6000 envelopes na versão **T** e 4 000 envelopes na versão **E**. Calcule, em quilogramas, a quantidade necessária de cada componente para a fabricação dessas 10000 unidades.

b) Represente, por meio de multiplicação de matrizes, os valores encontrados no item *a*.

c) Em um outro mês foram produzidos 15000 envelopes do antiácido. Calcule a quantidade produzida de cada versão, sabendo que o consumo total de bicarbonato de sódio foi de 35,6 kg.

49 Resolva as seguintes equações matriciais:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ -11 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 13 & 4 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 20 & 35 \end{pmatrix}$

50 Uma dona de casa registrou, na tabela seguinte, as quantidades (em gramas) de frutas compradas em duas semanas consecutivas, em um mesmo supermercado:

Fruta / Quantidade (g)	Banana	Maçã	Laranja	Mamão
1ª semana	2 700	2 430	3 450	4 155
2ª semana	1 640	3 120	3 390	3 700

Os preços do quilograma (kg) da banana, maçã, laranja e mamão, em vigor nesse período, eram respectivamente R$ 2,35, R$ 3,40, R$ 1,70 e R$ 2,60.

Determine, a partir do cálculo de um produto de matrizes, a quantia, em reais, gasta pela dona de casa, em cada semana.

51 Na matriz **A**, a seguir, estão representadas as quantidades de cálcio e magnésio, em miligramas, encontradas em 100 g de algumas verduras:

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} \text{Couve-manteiga refogada} & \text{Couve-flor cozida} & \text{Espinafre cru} & \text{Acelga crua} & \text{Alface americana} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 177 & 16 & 98 & 43 & 14 \\ 26 & 5 & 82 & 10 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{Cálcio} \\ \leftarrow \text{Magnésio} \end{matrix} \end{array}$$

Em um restaurante foram elaboradas três receitas (I, II, III) nas quais foram usadas porções de 100 g desses alimentos. Na matriz **B** a seguir estão representadas as quantidades de porções:

$$B = \begin{array}{c} \begin{matrix} \text{Receita I} & \text{Receita II} & \text{Receita III} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{Couve-manteiga} \\ \leftarrow \text{Couve-flor} \\ \leftarrow \text{Espinafre} \\ \leftarrow \text{Acelga} \\ \leftarrow \text{Alface americana} \end{matrix} \end{array}$$

a) Determine a matriz $C = A \cdot B$.

b) Explique o significado do valor encontrado para o elemento $\mathbf{c}_{12}$ da matriz **C**.

c) Explique o significado do valor encontrado para o elemento $\mathbf{c}_{23}$ da matriz **C**.

Aplicações

Computação gráfica e matrizes

As transformações geométricas no plano (ou transformações 2D — duas dimensões) são muito usadas pela computação gráfica para a construção de figuras e produção de imagens. Tais imagens podem ser percebidas nos efeitos especiais utilizados no cinema, na TV e nos sistemas multimídia em geral, além de servir de ferramenta de auxílio em várias áreas da atividade humana.

As três transformações básicas são: **translação**, **rotação** e **escala**. Vamos estudá-las, relacionando-as com a teoria das matrizes e com a Trigonometria.

Representaremos um ponto qualquer P(x, y) de uma figura pela matriz coluna $P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e o ponto correspondente P'(x', y'), obtido pela transformação, por $P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$. Para cada transformação, vamos obter uma relação entre **P** e **P'** por meio de uma matriz (**M**) de transformação.

EVERETT COLLECTION/AGB PHOTO

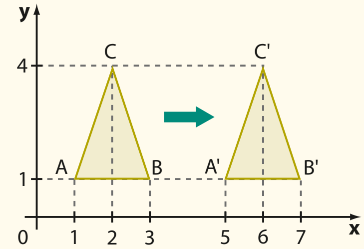
O filme *Guardiões da Galáxia* apresenta personagens criados por computação gráfica, como o Groot.

Translação

A translação é uma transformação que desloca uma figura sem alterar sua forma e suas dimensões. Esse deslocamento pode ser vertical, horizontal ou segundo uma certa direção.

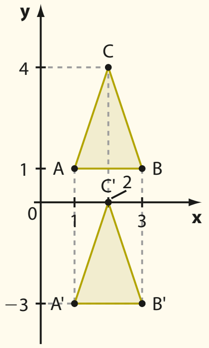
Consideremos o triângulo ABC ao lado, o qual é transformado no triângulo A'B'C' por uma translação horizontal.

Observe que, nessa transformação, a abscissa de cada ponto do △ABC é deslocada quatro unidades à direita, e a respectiva ordenada não sofre alteração.



Temos, portanto: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, isto é, P' = P + M, sendo $M = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ a matriz dessa transformação.

Suponha agora que o △ABC fosse deslocado, na vertical, quatro unidades para baixo, como mostra a figura seguinte:



Observe, no △A'B'C', obtido pela translação, que a ordenada de cada um de seus pontos é deslocada quatro unidades para baixo e a respectiva abscissa não sofre alteração.

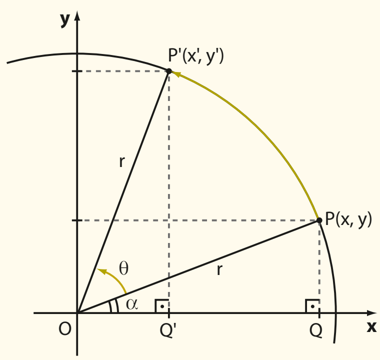
Assim, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ e, desse modo, P' = P + M, sendo $M = -\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ a matriz dessa transformação.

PENSE NISTO:

Qual é a matriz que transforma o triângulo de vértices A(1, 1), B(3, 1) e C(2, 4) no triângulo de vértices A'(5, 6), B'(7, 6) e C'(6, 9)?

Rotação

Vamos considerar unicamente a rotação ("giro") de um ponto P(x, y), em torno da origem (0, 0), de um ângulo de medida **θ** graus ($\theta > 0$), tomado no sentido anti-horário.



De acordo com o $\triangle OPQ$, o ponto P(x, y) tem suas coordenadas expressas por:

$x = r \cdot \cos \alpha$ (1)

$y = r \cdot \text{sen}\ \alpha$ (2)

sendo $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ a medida do raio da circunferência de centro na origem, passando por **P** e **P'**.

Ao girarmos **P** de um ângulo de medida **θ** (graus), ele se transforma no ponto **P'**. Da Trigonometria, obtemos as fórmulas $\text{sen}\ (a + b) = \text{sen}\ a \cdot \cos b + \text{sen}\ b \cdot \cos a$ e $\cos (a + b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen}\ a \cdot \text{sen}\ b$, válidas para quaisquer **a** e **b** reais. De acordo com o $\triangle OP'Q'$, temos:

- $\cos (\alpha + \theta) = \dfrac{x'}{r} \Rightarrow x' = r \cdot \cos (\alpha + \theta) = r \cdot (\cos \alpha \cos \theta - \text{sen}\ \alpha\ \text{sen}\ \theta)$ e, usando (1) e (2), escrevemos:

$$x' = r \cdot \left(\frac{x}{r} \cos \theta - \frac{y}{r}\ \text{sen}\ \theta\right) \Rightarrow \boxed{x' = x \cdot \cos \theta - y \cdot \text{sen}\ \theta}$$

- $\text{sen}\ (\alpha + \theta) = \dfrac{y'}{r} \Rightarrow y' = r \cdot \text{sen}\ (\alpha + \theta) = r \cdot (\text{sen}\ \alpha \cos \theta + \text{sen}\ \theta \cos \alpha)$ e, usando (1) e (2), escrevemos:

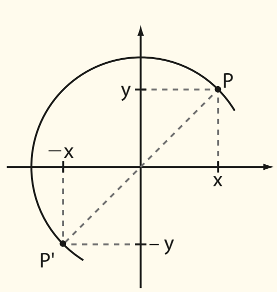
$$y' = r \cdot \left(\frac{y}{r} \cos \theta + \text{sen}\ \theta \cdot \frac{x}{r}\right) \Rightarrow \boxed{y' = y \cdot \cos \theta + x \cdot \text{sen}\ \theta}$$

Assim, escrevemos:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen}\ \theta \\ \text{sen}\ \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

isto é, $P' = M \cdot P$, sendo $M = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen}\ \theta \\ \text{sen}\ \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ a matriz de transformação.

Observe a figura seguinte, em que o ponto P(x, y) é rotacionado em torno da origem, no sentido anti-horário, de 180°. Quais são suas novas coordenadas?



Como $\theta = 180°$, temos:

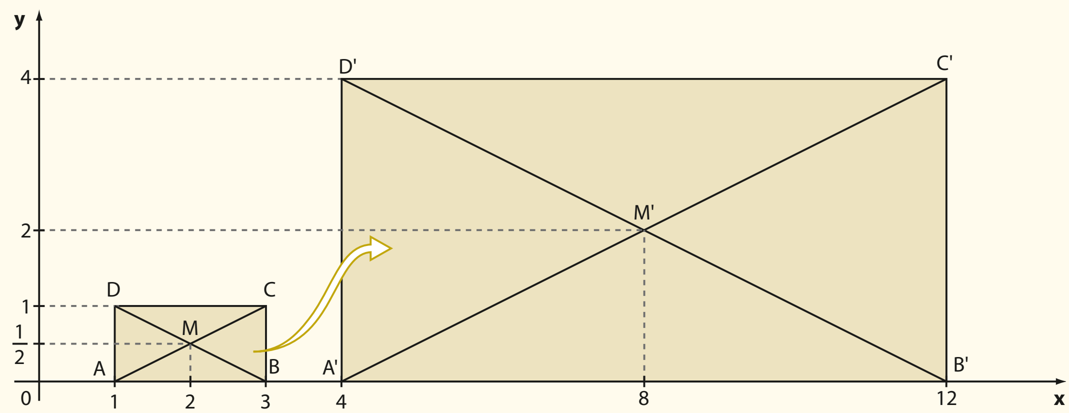
$$M = \begin{bmatrix} \cos 180° & -\text{sen}\ 180° \\ \text{sen}\ 180° & \cos 180° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Assim, $P' = M \cdot P \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow x' = -x$ e $y' = -y$

Escala

Nessa transformação, ocorre uma modificação no tamanho da figura (ampliação ou redução), originando outra figura, semelhante ou não à primeira.

Na figura seguinte, o retângulo ABCD é transformado no retângulo A'B'C'D'. Cada ponto (x, y) do retângulo ABCD é transformado no ponto (x', y') do retângulo A'B'C'D', com $x' = 4 \cdot x$ e $y' = 4 \cdot y$; observe que os retângulos ABCD e A'B'C'D' são semelhantes.

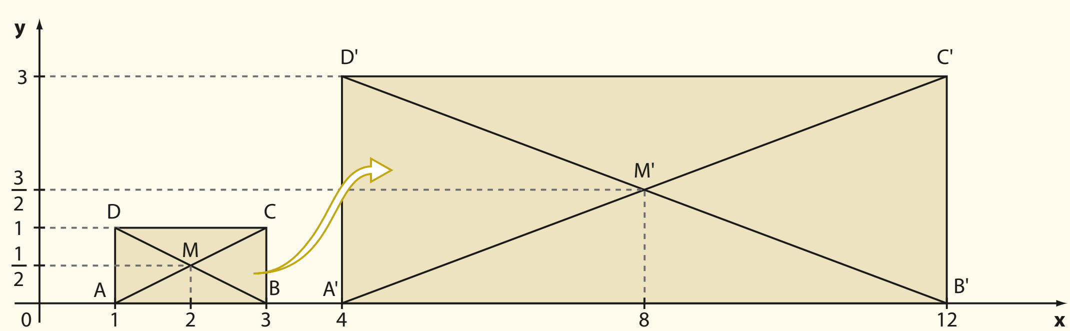


Podemos escrever $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, isto é, $P' = M \cdot P$, sendo $M = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ a matriz de transformação.

PENSE NISTO:

Em um retângulo, as diagonais intersectam-se em seus pontos médios. Veja os pontos **M** e **M**'. Qual é a relação entre suas abscissas (e ordenadas) e as abscissas (e ordenadas) das extremidades das diagonais?

Veja agora a transformação abaixo: cada ponto (x, y) do retângulo ABCD é transformado no ponto (x', y') do retângulo A'B'C'D', com $x' = 4 \cdot x$ e $y' = 3 \cdot y$:



Observe, nesse caso, que os retângulos ABCD e A'B'C'D' **não** são semelhantes.

Temos: $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, isto é, $P' = M \cdot P$, sendo $M = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ a matriz de transformação.

Fonte de pesquisa: BOLDRINI, José L.; COSTA, Sueli I. Rodrigues; FIGUEIREDO, Vera Lúcia e WETZLER, Henry G. *Álgebra linear*. 3ª ed. São Paulo: Harbra, 1986.

Matriz inversa

Seja **A** uma matriz quadrada de ordem **n**. A matriz **A** é dita inversível (ou invertível) se existe uma matriz **B** (quadrada de ordem **n**), tal que:

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

Lembre que $\mathbf{I_n}$ representa a matriz identidade de ordem **n**.
Nesse caso, **B** é dita **inversa** de **A** e é indicada por $\mathbf{A^{-1}}$.

EXEMPLO 4

A inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ é $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$, pois:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

e

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Para verificar se uma matriz quadrada é ou não invertível e, em caso afirmativo, determinar sua inversa, apresentaremos, a seguir, um processo baseado na definição de matriz inversa e na resolução de sistemas.

Vamos trabalhar com matrizes 2×2.

EXEMPLO 5

Vamos verificar se existe a inversa de $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Devemos verificar se existe $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, tal que $A \cdot A^{-1} = I_2$.

Temos:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3a + 2c & 3b + 2d \\ 5a + 4c & 5b + 4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Do conceito de igualdade de matrizes seguem os sistemas:

$\begin{cases} 3a + 2c = 1 \\ 5a + 4c = 0 \end{cases}$, cuja solução é $a = 2$ e $c = -\frac{5}{2}$

$\begin{cases} 3b + 2d = 0 \\ 5b + 4d = 1 \end{cases}$, cuja solução é $b = -1$ e $d = \frac{3}{2}$

Assim, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

É fácil verificar que a outra condição, $A^{-1} \cdot A = I_2$, está satisfeita.

EXEMPLO 6

Vamos verificar se existe a inversa de $X = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Devemos verificar se existe $X^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, tal que $X \cdot X^{-1} = I_2$:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4a + 2c & 4b + 2d \\ 2a + c & 2b + d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{(1)} \begin{cases} 4a + 2c = 1 \\ 2a + c = 0 \end{cases} \text{ e (2)} \begin{cases} 4b + 2d = 0 \\ 2b + d = 1 \end{cases}$$

Vamos resolver o sistema (1):

$$\begin{cases} 4a + 2c = 1 \\ 2a + c = 0 \; (-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{4a} + \cancel{2c} = 1 \\ \cancel{-4a} \cancel{-} 2c = 0 \end{cases} (+)$$
$$0 = 1 \text{ (Falso)}$$

O sistema acima não admite soluções, pois não existem **a** e **c** reais tais que $0 \cdot a + 0 \cdot c = 1$. Desse modo, já podemos concluir que não existe a inversa de **X** (o sistema (2) também não admite solução. Verifique.).

PENSE NISTO:

A matriz nula $0_{2 \times 2}$ é inversível? A matriz identidade I_2 é inversível?

OBSERVAÇÃO

O processo apresentado nos exemplos anteriores pode ser aplicado a matrizes quadradas de ordem **n**, $n \geqslant 2$. Vale lembrar, no entanto, que, para $n \geqslant 3$, o processo é, em geral, trabalhoso.

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

7 Resolva a equação matricial $A \cdot X = B$, sendo $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Solução:

1º modo:

Para garantir a existência do produto $A \cdot X$, **X** deve ser uma matriz 2×1, a saber $X = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$. Veja a continuação no exercício resolvido 5, na página 84.

2º modo:

Supondo que **A** seja invertível, de $A \cdot X = B$, temos:

$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B$ (multiplicamos, à esquerda, por A^{-1})

$(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B$ (usamos a propriedade associativa da multiplicação)

$I \cdot X = A^{-1} \cdot B$ (usamos a definição de matriz inversa)

$X = A^{-1} \cdot B$ (*) (usamos a propriedade da matriz identidade)

PENSE NISTO:

Na primeira passagem, poderíamos ter multiplicado, à direita, os dois membros por A^{-1}?

Assim, verifiquemos se **A** é invertível:

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5a + 7c & 5b + 7d \\ 2a + 3c & 2b + 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Seguem os sistemas:

$\begin{cases} 5a + 7c = 1 \\ 2a + 3c = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 3 \text{ e } c = -2 \text{ e } \begin{cases} 5b + 7d = 0 \\ 2b + 3d = 1 \end{cases} \Rightarrow b = -7 \text{ e } d = 5$

Assim, concluímos que **A** é invertível e $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Logo, substituindo A^{-1} e **B** em $*$, temos: $X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

52 Verifique se $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ é a inversa de $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

53 Determine, se existir, a inversa da matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

54 Determine, se existir, a matriz inversa de $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

55 Para que valor(es) real(is) de **x** a inversa da matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ é a própria matriz **A**?

56 Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$. Determine:

a) $A^{-1} + B$ **b)** $A^{-1} \cdot B$ **c)** $B^{-1} \cdot A$

57 Determine **x** e **y** reais sabendo que a inversa de $\begin{pmatrix} y & -3 \\ -2 & x \end{pmatrix}$ é a matriz $\begin{pmatrix} x & x-4 \\ x-5 & 1 \end{pmatrix}$.

58 Sendo $A = \begin{pmatrix} x & -x \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, com $x \in \mathbb{R}$, determine os valores de **x** para os quais $A + A^{-1} = I_2$, sendo I_2 a matriz identidade de ordem 2.

59 Sejam $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$.

a) Determine A^{-1}.

b) Usando o resultado do item *a*, resolva a equação $A \cdot X = B$.

60 Determine a inversa da matriz $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

61 Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, determine a matriz **X** (quadrada de ordem 2) tal que $(X \cdot B)^{-1} = A$.

DESAFIO

Uma matriz quadrada **A** se diz **ortogonal** se **A** é inversível e $A^{-1} = A^t$.

a) Determine os números reais **x**, **y** e **z** de modo que a matriz **B** seja ortogonal.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

b) Mostre que não existem **x** e **y** reais de modo que a matriz **C** seja ortogonal.

$$C = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & x \\ y & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$