CAPÍTULO 7

Geometria Espacial de Posição

UM POUCO DE **HISTÓRIA**

O desenvolvimento da Geometria

Nas civilizações mais antigas — egípcia e babilônica —, a Geometria desenvolveu-se quase sempre visando à resolução de problemas de medições, como o cálculo de distâncias, áreas e volumes, os quais estavam diretamente ligados à atividade de subsistência.

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Conhecimentos de Geometria permitiram construções como este teatro, no Peloponeso, na Grécia, em 350 a.C.

Foi na Grécia, aproximadamente no século V a.C., que a Geometria se desvinculou das questões de mensuração para tomar um rumo mais abstrato. Passou-se a exigir que as propriedades das figuras geométricas fossem validadas por meio de uma demonstração lógica, e não mais por métodos experimentais.

O primeiro pensador grego associado ao método demonstrativo foi Tales de Mileto (cerca de 625-546 a.C.). Acredita-se que Tales provou as seguintes propriedades usando esse método:

- "Se dois ângulos são opostos pelo vértice, então são congruentes."
- "Todo ângulo inscrito em uma semicircunferência é ângulo reto."
- "Se um triângulo é isósceles, então os ângulos da base são congruentes."
- "Se duas retas são transversais de um feixe de retas paralelas, então a razão entre as medidas de dois segmentos quaisquer de uma transversal é igual à razão entre as medidas dos respectivos segmentos correspondentes da outra transversal" (essa propriedade é conhecida como teorema de Tales).

Outro pensador grego de grande importância para a Geometria foi Pitágoras, que viveu por volta de 585-500 a.C. Pitágoras fundou uma "escola", ou seja, uma espécie de academia para estudo da filosofia e da ciência, na qual reuniu vários pensadores e discípulos. Como os ensinamentos da escola pitagórica eram transmitidos oralmente, não há documentos de suas descobertas. Uma grande contribuição dos pitagóricos se deu com a teoria dos números (em Aritmética), e seu maior legado para a Geometria é a demonstração da propriedade que leva o nome de seu mestre.

> Teorema de Pitágoras — "Num triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos."

O maior pensador grego ligado à Matemática, e especialmente à Geometria, foi Euclides (cerca de 300 a.C.), que se formou no Museu de Alexandria — espécie de universidade da época. Esse museu foi criado por Alexandre Magno — rei da Macedônia que conquistou a Grécia. A obra-prima de Euclides é *Os elementos*, com treze volumes. Os três últimos volumes dessa obra abordam a Geometria Espacial, reunindo algumas descobertas anteriores, mas apresentando-as de forma lógico-dedutiva.

Nessa formulação, Euclides pretendia que as noções ou conceitos geométricos fossem definidos, ou seja, caracterizados objetivamente por palavras e baseados apenas em conceitos estabelecidos anteriormente. Além disso, tinha o objetivo de que todas as propriedades ou proposições fossem demonstradas, ou seja, de que sua validade fosse estabelecida por meio de argumentos lógicos e utilizando nas demonstrações apenas propriedades demonstradas anteriormente. Isso caracterizou uma ruptura definitiva com a Matemática de base experimental e empírica dos séculos anteriores. É bem verdade que, muitos séculos depois, os matemáticos verificaram que o método criado por Euclides não foi usado de maneira perfeita na sua obra e que *Os elementos* tem ainda vários apelos à intuição. De todo modo, o valor da obra de Euclides é inestimável e ela perdura até nossos dias, com alguns aperfeiçoamentos feitos por matemáticos dos séculos XIX e XX.

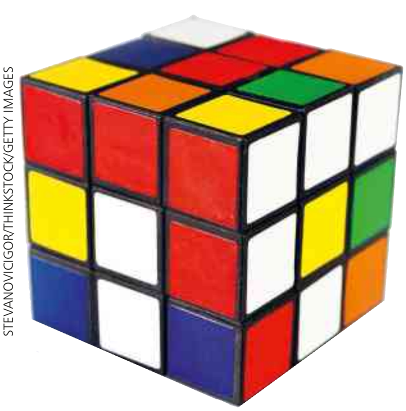
Fontes de pesquisa: MILIES, C. F. P.; BUSSAB, J. H. O. *A Geometria na antiguidade clássica*. São Paulo: FTD, 1999.; BOYER, Carl B. *História da Matemática*. 3ª ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2010.


CHARLES THOMAS-STANFORD

Frontispício da primeira tradução para o inglês, em 1570, da obra *Os elementos*, escrita por Euclides.

Vamos examinar uma figura geométrica que conhecemos da nossa vivência cotidiana: o cubo. Há vários objetos que remetem à forma de um cubo: caixas, dados de jogar, brinquedos, móveis etc.

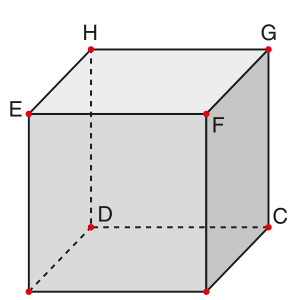
THINKSTOCK/GETTY IMAGES


STEVANOVICIGOR/THINKSTOCK/GETTY IMAGES


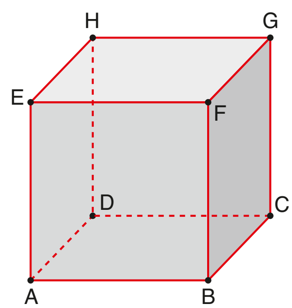

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Ao analisar um cubo, podemos notar que:

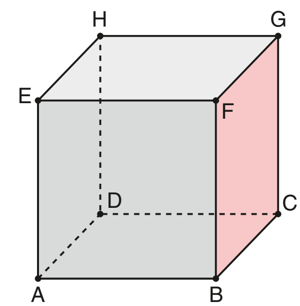
- possui oito **vértices**. Os oito vértices (**A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F**, **G**, **H**) de um cubo são exemplos de **pontos**. O ponto não tem dimensão.



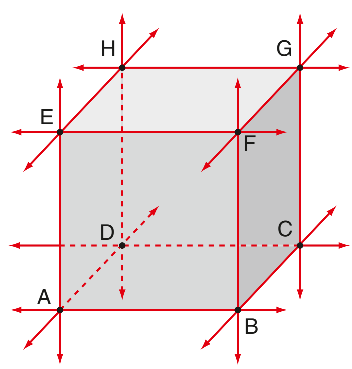
- possui 12 **arestas**. As 12 arestas de um cubo ($\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$, $\overline{EF}$, $\overline{FG}$, $\overline{GH}$, $\overline{HE}$, $\overline{EA}$, $\overline{FB}$, $\overline{GC}$, $\overline{HD}$) são exemplos de **segmentos de reta**.



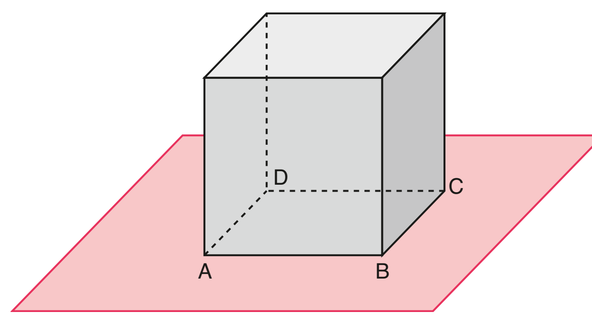
- é formado por seis quadrados denominados **faces**. As seis faces de um cubo são exemplos de **superfícies planas**. Na figura abaixo, a face BCGF aparece destacada.



Na figura a seguir, ao imaginarmos que cada aresta do cubo foi "prolongada" nos dois sentidos, estaremos imaginando **retas**. Cada uma dessas retas contém uma aresta do cubo.



Se imaginarmos que cada face do cubo foi "expandida", como na face ABCD da figura abaixo, estaremos imaginando **planos**. Cada um desses planos contém uma face do cubo.

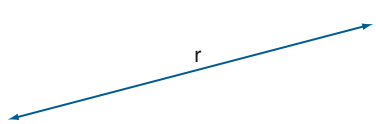


Noções primitivas (ou iniciais)

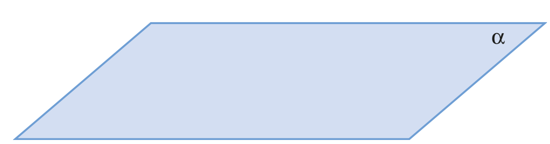
A construção da Geometria se baseia em três noções iniciais, das quais temos um conhecimento intuitivo, decorrente da observação do mundo concreto. Essas noções são as de **ponto**, **reta** e **plano**.

Vamos convencionar como representá-las da seguinte forma:

ponto **A**
(letra maiúscula)



reta **r**
(letra minúscula)



plano α
(letra grega)

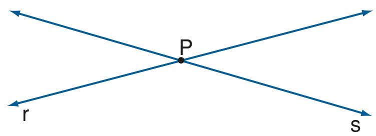
As noções primitivas ou iniciais não são definidas. Todas as demais noções ou conceitos geométricos podem ser definidos, isto é, caracterizados objetivamente por meio de palavras, obedecendo-se a uma regra básica: só se poderá definir um novo conceito se forem utilizados na definição conceitos já estabelecidos.

Neste capítulo, toda definição será indicada por [DEF].

Vejamos as três primeiras definições:

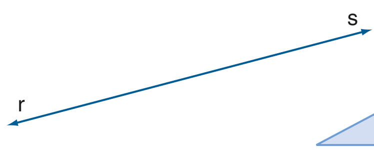
- [DEF] **Espaço**: é o conjunto formado por todos os pontos.

- [DEF] **Retas concorrentes**: duas retas são concorrentes se possuem um único ponto comum.

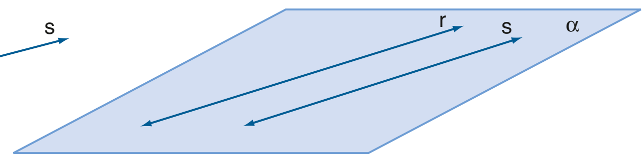


$r \cap s = \{P\}$

- [DEF] **Retas paralelas**: duas retas são paralelas se são coincidentes ou são coplanares (estão contidas em um mesmo plano) e não têm ponto comum.



r e **s** são paralelas coincidentes



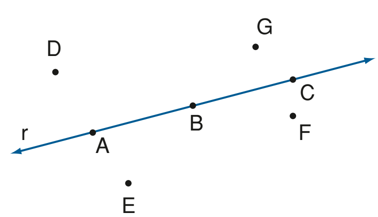
$r \subset \alpha$, $s \subset \alpha$ e $r \cap s = \varnothing$
r e **s** são paralelas distintas

Proposições primitivas (ou iniciais)

O estudo lógico da Geometria se apoia em algumas propriedades relacionadas a pontos, retas e planos. Essas propriedades são aceitas como verdadeiras, sem necessidade de demonstração lógica, e são chamadas **proposições iniciais**, **proposições primitivas** ou **postulados**.

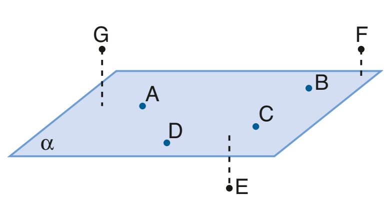
Postulados da existência

- Numa reta e fora dela existem infinitos pontos.



Por exemplo:
$A \in r$, $B \in r$, $C \in r$ etc.
$D \notin r$, $E \notin r$, $F \notin r$, $G \notin r$ etc.

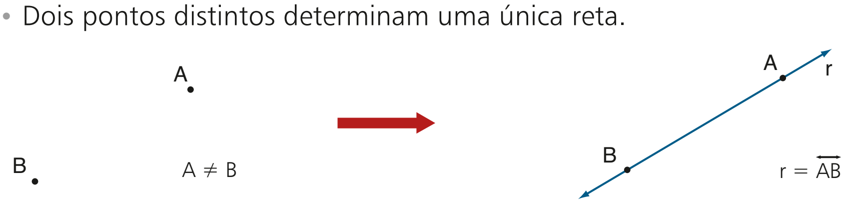
- Num plano e fora dele existem infinitos pontos.



Por exemplo:
$A \in \alpha$, $B \in \alpha$, $C \in \alpha$, $D \in \alpha$ etc.
$E \notin \alpha$, $F \notin \alpha$, $G \notin \alpha$ etc.

Postulados da determinação

- Dois pontos distintos determinam uma única reta.



$A \neq B$

$r = \overleftrightarrow{AB}$

PENSE NISTO:
Dado um ponto **P**, quantas retas passam por ele?

De outra forma, podemos dizer que: dados dois pontos distintos **A** e **B**, existe uma só reta que tem **A** e **B** como seus elementos (ou uma só reta que passa por eles).

- Três pontos não colineares determinam um único plano.

A, **B** e **C** não colineares

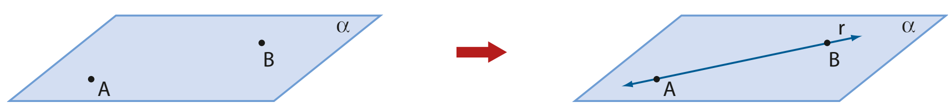
α = plano (ABC)

lê-se: $\boldsymbol{\alpha}$ é o plano determinado pelos pontos **A**, **B** e **C**

De outra forma, podemos dizer que: dados três pontos **A**, **B** e **C** não pertencentes a uma mesma reta, existe um só plano que tem **A**, **B** e **C** como seus elementos (ou um só plano que passa por eles).

Postulado da inclusão

- Se uma reta possui dois pontos distintos num plano, ela está contida nesse plano.



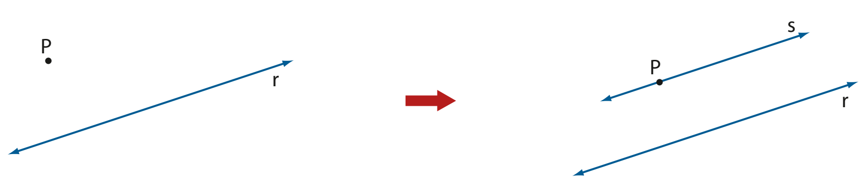
$A \in \alpha$, $B \in \alpha$

$\overleftrightarrow{AB} \subset \alpha$

De outra forma, dizemos que, se uma reta tem dois pontos distintos num plano, todos os seus pontos pertencem a esse plano.

Postulado das paralelas (ou postulado de Euclides)

- Por um ponto passa uma única reta paralela a uma reta dada.



$P \notin r$

$P \in s$ e $s \mathbin{/\!/} r$

De outro modo, podemos dizer que, dado um ponto **P** não pertencente a uma reta **r**, por **P** podemos traçar uma única reta **s** paralela a **r**. No caso de o ponto **P** pertencer a **r**, também é única a paralela, pois é a própria reta **r**.

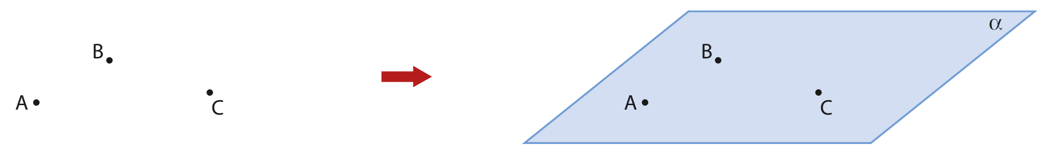
Os quatro postulados enunciados são aceitos como verdadeiros sem demonstração. Todas as demais propriedades, proposições ou teoremas de Geometria podem ser demonstrados, ou seja, terão sua validade estabelecida por meio de uma argumentação lógica, obedecendo-se a uma regra básica: só se poderá demonstrar (ou provar) uma nova propriedade se forem utilizadas, na demonstração, propriedades já estabelecidas como verdadeiras.

Neste capítulo, as proposições serão indicadas por [PROP]. Para não nos estendermos demais, omitiremos algumas demonstrações; entretanto, algumas das proposições mais importantes estarão demonstradas no item *Teoremas fundamentais*, na página 145 deste capítulo.

Determinação de planos

Há quatro modos de determinar a posição de um plano no espaço. Vejamos:

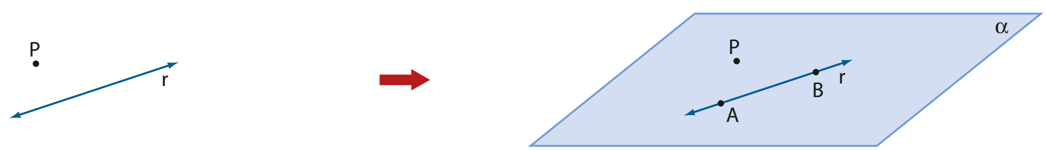
1º) [POSTULADO] por meio de três pontos não colineares.



A, **B** e **C** não colineares

α = plano (ABC)

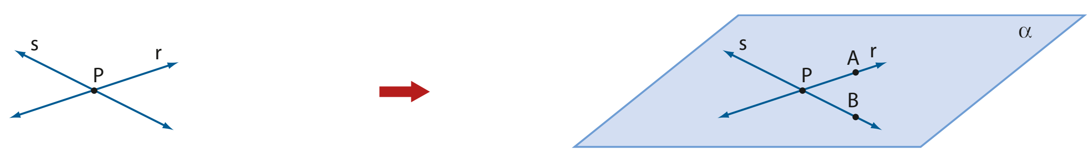
2º) [PROP] por meio de uma reta e um ponto fora dela.



$P \notin r$

α = plano (r, P) = plano (PAB)

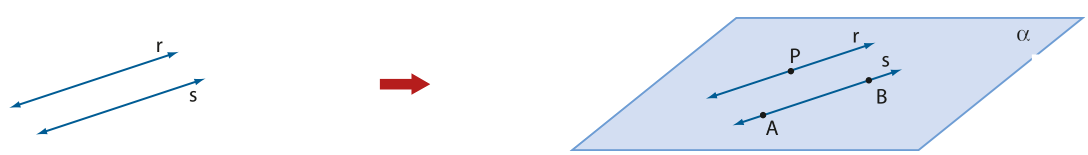
3º) [PROP] por meio de duas retas concorrentes.



$r \cap s = \{P\}$

α = plano (r, s) = plano (PAB)

4º) [PROP] por meio de duas retas paralelas e distintas.



$r \, // \, s$

α = plano (r, s) = plano (PAB)

No 1º modo, a unicidade do plano α é garantida pelo postulado da determinação. Já nos 2º, 3º e 4º modos, a unicidade é garantida pelo fato de que existe um único plano que passa pelos pontos **P**, **A** e **B** não colineares.

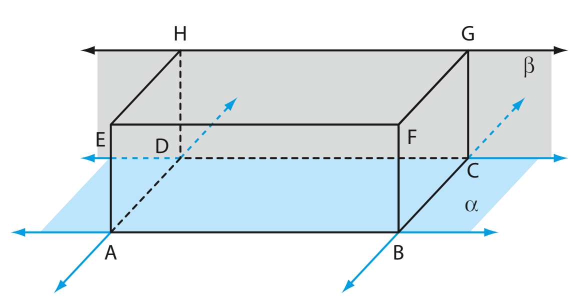
PENSE NISTO:

Dada uma reta **r**, quantos são os planos que a contêm?

EXEMPLO 1

O sólido ABCDEFGH ao lado é um bloco retangular também chamado paralelepípedo retorretângulo.

Ele é formado por seis faces retangulares, congruentes duas a duas.



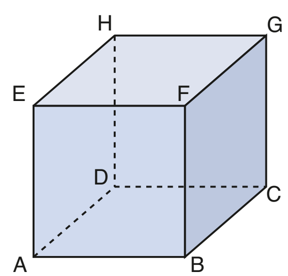
Vamos ilustrar os dois últimos modos de determinação de planos:

- as retas $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$ são concorrentes em **A** e determinam o plano α que contém o retângulo ABCD. As retas $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ são concorrentes em **C** e determinam o mesmo plano α.
- as retas $\overline{CD}$ e $\overline{GH}$ são paralelas distintas e determinam o plano β, que contém o retângulo CDHG.

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

1 Observe o cubo ABCDEFGH e reproduza-o em seu caderno.



Para cada item, pinte, em seu caderno, o plano determinado pelas retas:

a) $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BD}$

b) $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{EH}$

c) $\overleftrightarrow{GH}$ e $\overleftrightarrow{CG}$

d) $\overleftrightarrow{EH}$ e $\overleftrightarrow{BC}$

Sugestão: Veja como modelo o plano indicado no paralelepípedo da página 130.

2 Quantos são os planos determinados por três retas distintas, duas a duas, paralelas entre si?

3 Quantos são os planos determinados por quatro pontos dois a dois distintos?

4 Quantos planos distintos são determinados por quatro retas distintas, duas a duas, concorrentes em pontos todos distintos?

5 É comum encontrarmos mesas com 4 pernas que, mesmo apoiadas em um piso plano, balançam e nos obrigam a colocar um calço em uma das pernas para que fiquem firmes. Explique por que isso não acontece em uma mesa de 3 pernas.

Posições relativas de dois planos

Planos secantes

[DEF] Dois planos distintos que têm um ponto comum são chamados **planos secantes**.

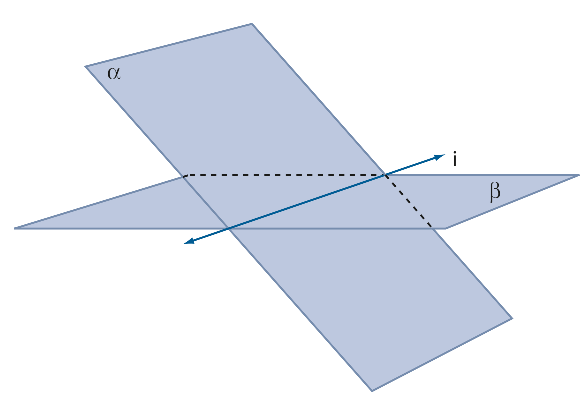
Postulado da interseção

Se dois planos distintos têm um ponto comum, então eles têm pelo menos um outro ponto comum.

Propriedade da interseção de planos

Se dois planos distintos têm um ponto comum, então a interseção desses planos é uma única reta que passa por aquele ponto. [PROP] Essa reta é denominada **interseção** ou **traço** de um deles no outro.

Veja a demonstração do teorema 1 na página 145.

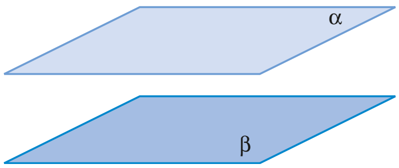


α e β secantes; $\alpha \cap \beta = i$; **i** é a interseção

Planos paralelos

[DEF] Dois planos são **paralelos** se não têm ponto comum ou são coincidentes.

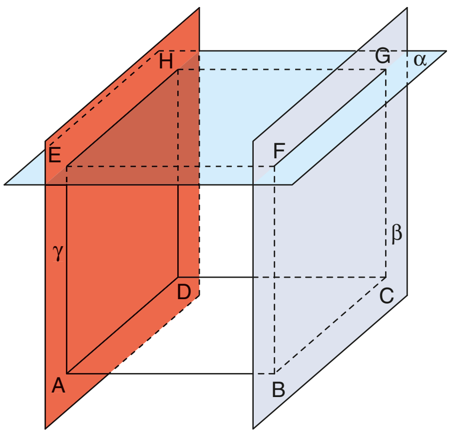
α e β paralelos coincidentes



α e β paralelos distintos

EXEMPLO 2

Observe, no cubo seguinte, os planos α, β e γ, que contêm, respectivamente, as faces EFGH, BCGF e ADHE.



Temos que:

- β e γ são planos paralelos distintos;
- α e β são planos secantes; $\alpha \cap \beta = \overleftrightarrow{FG}$;
- α e γ são planos secantes; $\alpha \cap \gamma = \overleftrightarrow{EH}$.

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

6 Classifique as afirmações a seguir como verdadeira (**V**) ou falsa (**F**).

a) Se dois planos distintos têm um ponto comum, então eles têm uma reta comum que passa pelo ponto.

b) Dois planos distintos que têm uma reta comum são secantes.

c) Se dois planos têm uma única reta comum, eles são secantes.

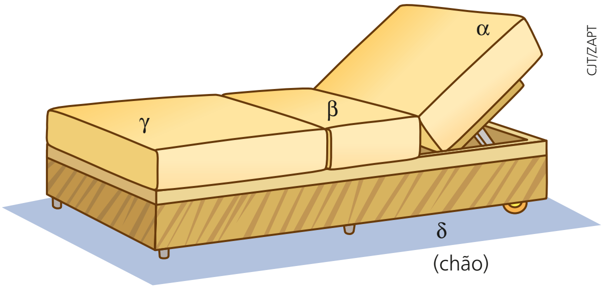
d) Dois planos secantes têm infinitos pontos comuns.

e) Dois planos distintos, paralelos a um terceiro, são paralelos entre si.

7 Objetos do nosso dia a dia permitem imaginar planos secantes e planos paralelos. Na espreguiçadeira mostrada na figura:

a) quais planos são secantes?

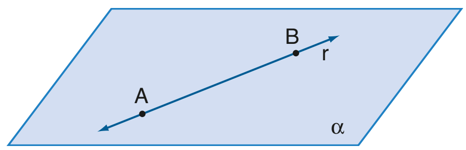
b) quais planos são paralelos?



Posições relativas de uma reta e um plano

A posição de uma reta em relação a um plano depende exclusivamente do número de pontos que eles têm em comum. Podem ocorrer três situações:

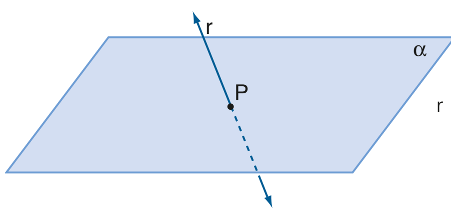
- A reta e o plano têm em comum dois pontos distintos; nesse caso, conforme o postulado da inclusão, a reta está contida no plano.



$r \cap \alpha = r$

Todos os pontos da reta **r** pertencem também ao plano α.

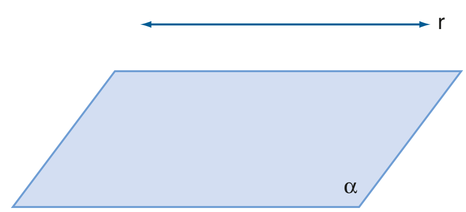
- [DEF] A reta e o plano têm em comum um único ponto; nesse caso, a reta e o plano são **secantes**.



$r \cap \alpha = \{P\}$

O ponto **P** é aquele em que a reta **r** intersecta o plano α. Dizemos que **P** é o traço da reta **r** no plano α.

- [DEF] A reta e o plano não têm nenhum ponto comum; nesse caso, a reta e o plano são **paralelos**.



$r \cap \alpha = \varnothing$

Propriedades

[PROP] Se uma reta não está contida num plano e é paralela a uma reta do plano, então ela é paralela ao plano.

Veja a demonstração do teorema 2, na página 146.

[PROP] Se um plano contém duas retas concorrentes, ambas paralelas a um outro plano, então esses planos são paralelos.

Veja a demonstração do teorema 3, nas páginas 146 e 147.

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

8 Classifique as afirmações a seguir em verdadeira (**V**) ou falsa (**F**).

a) Uma reta e um plano que têm um ponto comum são secantes.

b) Uma reta e um plano secantes têm um único ponto comum.

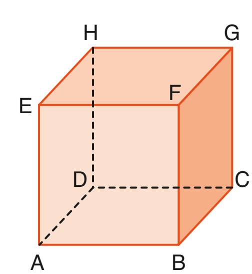
c) Uma reta e um plano paralelos não têm ponto comum.

d) Um plano e uma reta podem ter exatamente 2 pontos em comum.

e) Se uma reta está contida num plano, eles têm infinitos pontos em comum.

9 Observe o cubo ao lado.

Determine a posição relativa entre:



a) a reta $\overleftrightarrow{AB}$ e o plano (CDG);

b) a reta $\overleftrightarrow{AD}$ e o plano (CDG);

c) a reta $\overleftrightarrow{ED}$ e o plano (ABC);

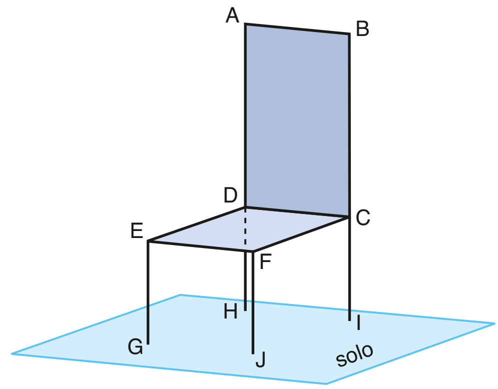
d) o plano (ABC) e o plano (EHD);

e) o plano determinado pelas retas $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{GH}$ e o plano determinado pelas retas $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{FG}$.

10 Observe a figura ao lado, que é a representação geométrica de uma cadeira apoiada sobre uma superfície plana no solo.

Usando elementos dessa figura, dê exemplos de:

a) dois planos paralelos distintos.
b) dois planos secantes e sua interseção.
c) duas retas paralelas distintas.
d) duas retas concorrentes e o plano por elas determinado.
e) uma reta secante a um plano e o traço da reta no plano.
f) uma reta paralela a um plano.

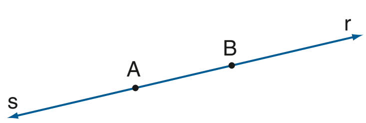


CJT/ZAPT

Posições relativas de duas retas

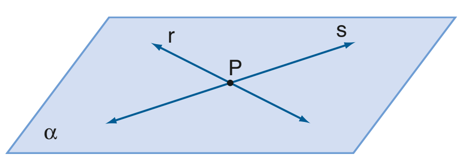
Vamos analisar as posições relativas de duas retas observando inicialmente se elas têm ou não ponto em comum. Podem ocorrer quatro situações:

- As duas retas têm em comum dois pontos distintos; nesse caso, conforme o postulado da determinação, as retas são **coincidentes**.



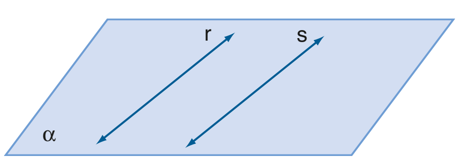
$r = s$

- [DEF] As duas retas têm em comum um único ponto; nesse caso, elas são **concorrentes** e existe um único plano que as contém.



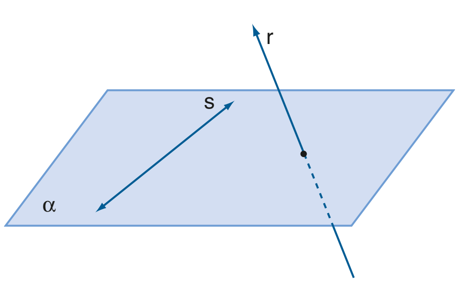
$r \cap s = \{P\}$

- [DEF] As duas retas não têm nenhum ponto em comum, mas existe um plano que as contém; nesse caso, elas são **paralelas**.



$r \cap s = \varnothing$, $r \subset \alpha$ e $s \subset \alpha$

- [DEF] As duas retas não têm nenhum ponto em comum e não existe plano que as contenha; nesse caso, elas são **reversas**.



$r \cap s = \varnothing$, $s \subset \alpha$ e $r \not\subset \alpha$

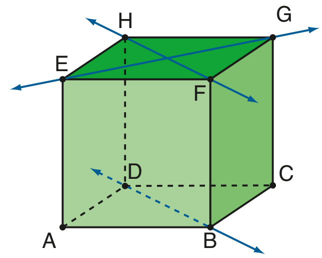
PENSE NISTO:

Qual é a posição relativa de duas retas **r** e **s** que não têm ponto comum?

EXEMPLO 3

No cubo ao lado, temos que:

- as retas $\overleftrightarrow{EG}$ e $\overleftrightarrow{FH}$ são concorrentes;
- as retas $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{GH}$ são paralelas;
- as retas $\overleftrightarrow{EG}$ e $\overleftrightarrow{BD}$ são reversas;
- as retas $\overleftrightarrow{AE}$ e $\overleftrightarrow{FH}$ são reversas;
- as retas $\overleftrightarrow{AE}$ e $\overleftrightarrow{GH}$ são reversas.



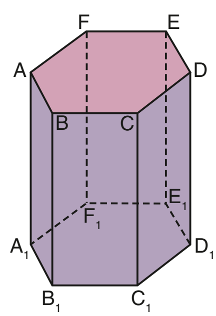
PENSE NISTO:

- Se dois planos α e β são secantes e uma reta **r** está contida em α, qual é a posição relativa de **r** em relação a uma reta **s** contida em β?
- Se dois planos α e β são paralelos e uma reta **r** está contida em α, qual é a posição relativa de **r** em relação a uma reta **s** contida em β?

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

11 A figura ao lado representa a superfície de um sólido chamado prisma hexagonal regular. Ela é constituída por dois hexágonos regulares ABCDEF e $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ congruentes, contidos em planos paralelos, e seis retângulos A_1B_1BA, B_1C_1CB, C_1D_1DC, D_1E_1ED, E_1F_1FE e A_1F_1FA congruentes entre si.



Analise a veracidade das afirmações seguintes, referentes a posições relativas de retas e planos, contendo os vértices desse prisma:

a) A reta $\overleftrightarrow{AB}$ e a reta $\overleftrightarrow{D_1E_1}$ são paralelas.

b) A reta $\overleftrightarrow{AB}$ e a reta $\overleftrightarrow{C_1D_1}$ são reversas.

c) O plano (ABB_1) e o plano (DEE_1) são paralelos.

d) O plano (ABB_1) e o plano (CDD_1) são paralelos.

e) A reta $\overleftrightarrow{AB}$ é paralela ao plano (CDD_1).

12 Classifique as afirmações a seguir em verdadeira (**V**) ou falsa (**F**).

a) Duas retas ou são coincidentes ou são distintas.

b) Duas retas ou são coplanares ou são reversas.

c) Duas retas distintas determinam um plano.

d) Duas retas concorrentes têm um único ponto comum.

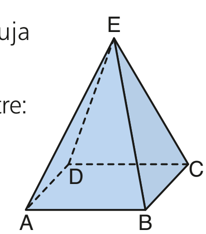
e) Duas retas que não têm ponto comum são paralelas.

f) Duas retas concorrentes são coplanares.

g) Duas retas coplanares ou são paralelas ou são concorrentes.

h) Duas retas não coplanares são reversas.

13 Observe a pirâmide ao lado, cuja base é um retângulo.



Determine a posição relativa entre:

a) as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$;

b) as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{EC}$;

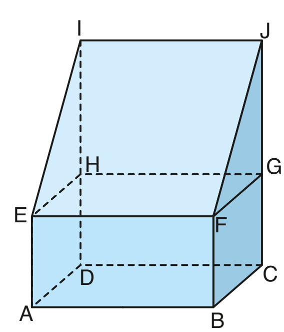
c) as retas $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$;

d) a reta $\overleftrightarrow{AB}$ e o plano (BEC);

e) a reta $\overleftrightarrow{AD}$ e o plano (BEC);

f) as retas $\overleftrightarrow{BD}$ e $\overleftrightarrow{EC}$.

14 Observe o sólido geométrico ao lado e os pontos assinalados.



Classifique em verdadeira (**V**) ou falsa (**F**) as afirmações seguintes.

a) As retas $\overleftrightarrow{FG}$ e $\overleftrightarrow{BG}$ são coplanares.

b) As retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{GH}$ são coplanares.

c) As retas $\overleftrightarrow{EH}$ e $\overleftrightarrow{FJ}$ são coplanares.

d) Os planos (FGJ) e (IEH) são paralelos distintos.

e) Os planos (ABE) e (EFJ) são paralelos distintos.

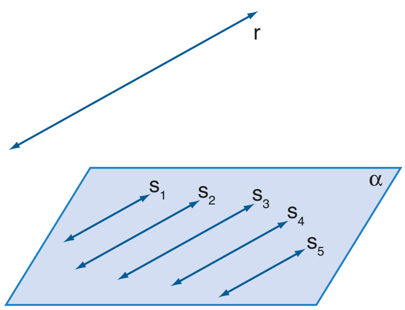
f) As retas $\overleftrightarrow{IJ}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são reversas.

g) As retas $\overleftrightarrow{EI}$ e $\overleftrightarrow{FH}$ são reversas.

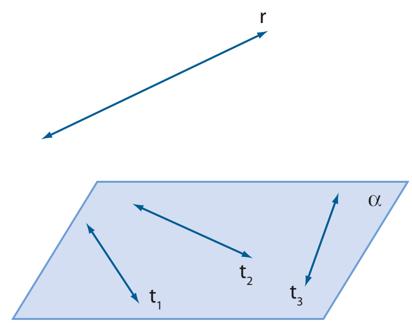
Algumas propriedades

Vamos enunciar algumas propriedades referentes a retas e planos, as quais são consequências das definições que acabamos de ver.

- 1ª propriedade: Se uma reta é paralela a um plano, então ela é paralela a infinitas retas do plano [PROP].



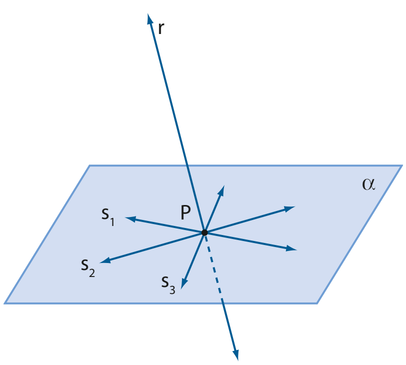
- 2ª propriedade: Se uma reta é paralela a um plano, então ela é reversa com infinitas retas do plano [PROP].



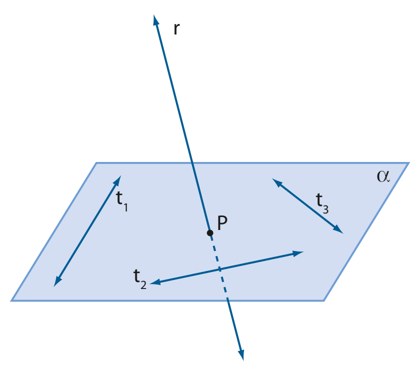
PENSE NISTO:

Se uma reta **r** é paralela a um plano α, qual é a posição relativa de **r** em relação a uma reta **s** contida em α?

- 3ª propriedade: Se uma reta é secante com um plano, então ela é concorrente com infinitas retas do plano [PROP].



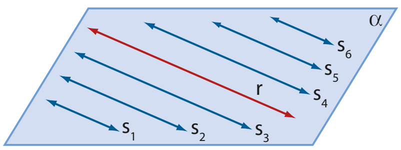
- 4ª propriedade: Se uma reta é secante com um plano, então ela é reversa com infinitas retas do plano [PROP].

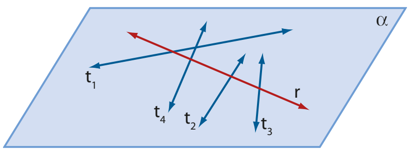


PENSE NISTO:

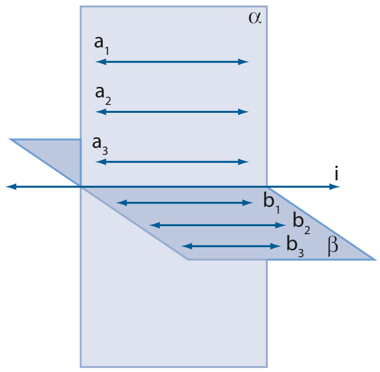
Se uma reta **r** é secante com um plano α, qual é a posição de **r** em relação a uma reta **s** contida em α?

- 5ª propriedade: Se uma reta está contida num plano, então ela é paralela ou concorrente com infinitas retas do plano [PROP].

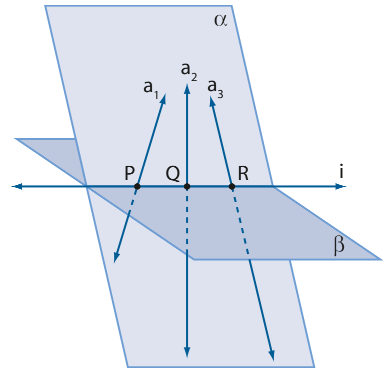




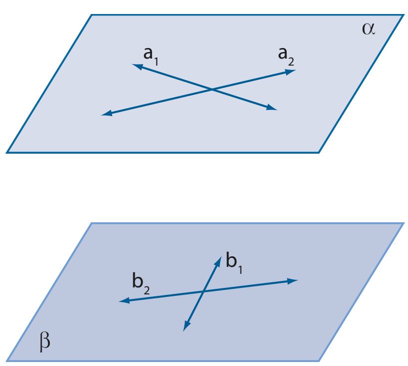
- 6ª propriedade: Se dois planos α e β são secantes, sendo **i** a interseção deles, então existem infinitas retas de um que são paralelas ao outro (retas paralelas a **i**) [PROP].



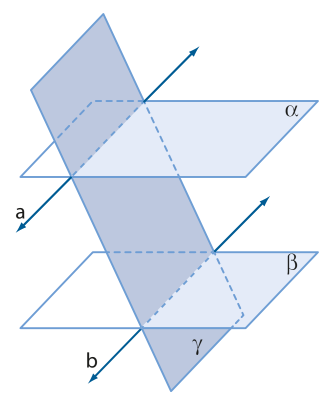
- 7ª propriedade: Se dois planos α e β são secantes, sendo **i** a interseção deles, então existem infinitas retas de um que são secantes ao outro (retas concorrentes com **i**) [PROP].



- 8ª propriedade: Se dois planos são paralelos e distintos, então toda reta de um deles é paralela ao outro [PROP].



- 9ª propriedade: Se um plano intersecta dois planos paralelos, então as interseções são retas paralelas [PROP].

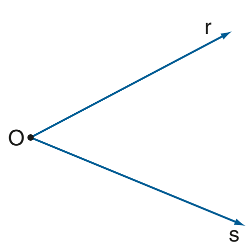


PENSE NISTO:

Se dois planos são paralelos e distintos entre si, toda reta de um deles é paralela a qualquer reta do outro?

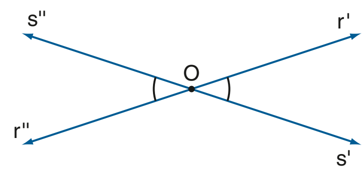
Ângulos de duas retas

Já vimos, em anos anteriores, que duas semirretas distintas de mesma origem formam um ângulo.



semirretas: $\overrightarrow{Or}$ e $\overrightarrow{Os}$
ângulo: $r\hat{O}s$

Sejam **r** e **s** duas retas concorrentes em **O**. O ponto **O** divide **r** em duas semirretas ($\overrightarrow{Or'}$ e $\overrightarrow{Or''}$) e divide **s** em duas semirretas ($\overrightarrow{Os'}$ e $\overrightarrow{Os''}$).

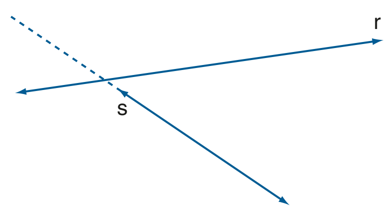


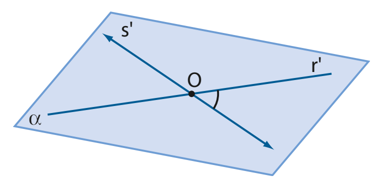
Nesse caso, são formados quatro ângulos: r'Ôs', r'Ôs'', r''Ôs' e r''Ôs''. Podemos provar que os ângulos r'Ôs' e r''Ôs'', ditos opostos pelo vértice, são congruentes.

Também são congruentes os ângulos r'Ôs'' e r''Ôs', opostos pelo vértice.

Chama-se **ângulo das retas concorrentes r e s** qualquer um desses quatro ângulos [DEF].

Sejam duas retas **r** e **s** reversas. Tomemos um ponto **O** qualquer e consideremos as retas **r**' paralela a **r** e **s**' paralela a **s**, ambas passando por **O**:





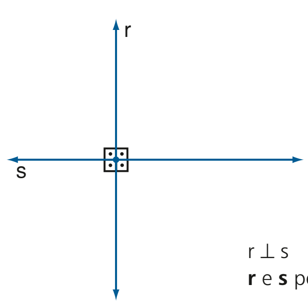
Como **r**' e **s**' são concorrentes em **O**, o ângulo r'Ôs' é chamado **ângulo formado pelas retas r e s reversas**, em que r'//r e s'//s [DEF].

Retas que formam ângulo reto

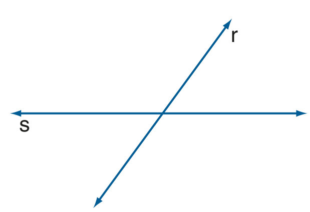
Vimos que duas retas concorrentes formam quatro ângulos. Quando esses quatro ângulos são congruentes, cada um deles é chamado **ângulo reto** e as retas são chamadas **retas perpendiculares** [DEF].

Se duas retas são concorrentes e não são perpendiculares, diz-se que elas são **oblíquas** [DEF].

Se duas retas são reversas e formam ângulo reto, as retas são chamadas **ortogonais** [DEF].



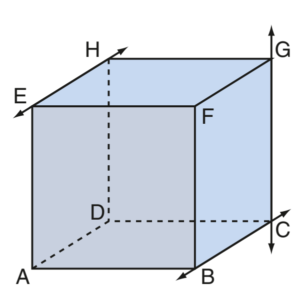
r ⊥ s
r e **s** perpendiculares



r e **s** oblíquas

EXEMPLO 4

Consideremos o cubo ABCDEFGH. As retas $\overline{GH}$ e $\overline{GC}$ são concorrentes em **G** e formam ângulo reto; logo, são perpendiculares. As retas $\overline{AB}$ e $\overline{GC}$ são reversas e formam ângulo reto; logo, são ortogonais.



$\overleftrightarrow{GH} \perp \overleftrightarrow{GC}$ ⊥ (lê-se: é perpendicular a)
$\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{GC}$ ⊥ (lê-se: é ortogonal a)

PENSE NISTO:

Indique um par de retas concorrentes não perpendiculares (oblíquas) e um par de retas reversas não ortogonais no cubo ao lado.

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

15 Classifique as afirmações a seguir como verdadeira (**V**) ou falsa (**F**).

a) Duas retas perpendiculares são sempre concorrentes.

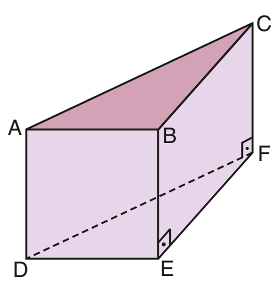
b) Se duas retas formam ângulo reto, então elas são perpendiculares.

c) Duas retas que formam ângulo reto podem ser reversas.

d) Duas retas perpendiculares a uma terceira são perpendiculares entre si.

e) Duas retas perpendiculares a uma terceira são paralelas entre si.

16 A figura abaixo representa um sólido chamado prisma reto de base triangular.



Ele é formado por dois triângulos congruentes e três retângulos.

Classifique cada uma das afirmações seguintes como verdadeira (**V**) ou falsa (**F**). As retas:

a) $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{DE}$ são reversas.

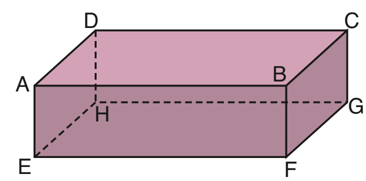
b) $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{FC}$ são concorrentes.

c) $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{CF}$ são coplanares.

d) $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{EF}$ são paralelas.

e) $\overleftrightarrow{DE}$ e $\overleftrightarrow{CF}$ são ortogonais.

17 Observe o paralelepípedo retângulo seguinte. Use duas retas determinadas pelos vértices desse paralelepípedo para justificar, em cada caso, que a sentença dada é falsa.



a) Duas retas que estão contidas num plano são paralelas.

b) Duas retas coplanares são concorrentes.

c) Se duas retas são ortogonais, toda paralela a uma delas é perpendicular à outra.

d) Se duas retas distintas são paralelas a um plano, então elas são paralelas entre si.

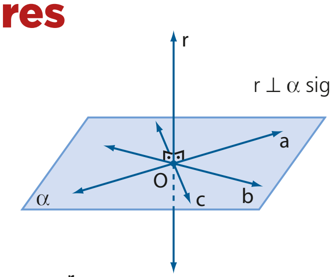
Reta e plano perpendiculares

Se uma reta é secante com um plano num ponto **O** e é perpendicular a todas as retas do plano que passam por **O**, diz-se que a reta é **perpendicular ao plano** [DEF].

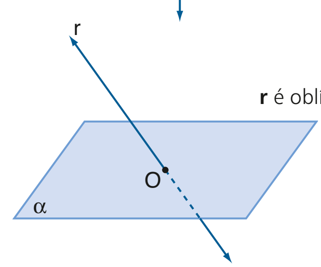
Se uma reta é perpendicular a duas retas concorrentes de um plano, então ela é perpendicular ao plano [PROP].

Veja a demonstração do teorema 4, nas páginas 147 e 148.

Se uma reta e um plano são secantes e a reta não é perpendicular ao plano, diz-se que a reta é **oblíqua** ao plano [DEF].



$r \perp \alpha$ significa $\begin{cases} r \perp a,\ a \subset \alpha \text{ e } O \in a, \\ r \perp b,\ b \subset \alpha \text{ e } O \in b, \\ r \perp c,\ c \subset \alpha \text{ e } O \in c, \\ \text{etc.} \end{cases}$



r é oblíqua a α

PENSE NISTO:

Se uma reta **r** é perpendicular a um plano α, qual é o ângulo que **r** forma com uma reta **s** contida em α?

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

18 Classifique cada uma das afirmações seguintes como verdadeira (**V**) ou falsa (**F**).

a) Para que uma reta e um plano sejam perpendiculares é necessário que eles sejam secantes.

b) Uma reta perpendicular a um plano forma ângulo reto com qualquer reta do plano.

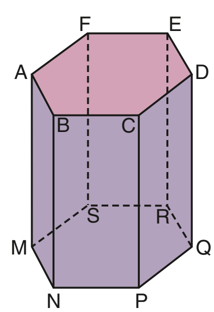
c) Se uma reta é perpendicular a duas retas distintas de um plano, então ela é perpendicular ao plano.

d) Se uma reta é perpendicular a duas retas paralelas e distintas de um plano, então ela está contida no plano.

e) Uma reta e um plano são paralelos. Toda reta perpendicular à reta dada é perpendicular ao plano.

f) Uma reta e um plano são perpendiculares. Toda reta perpendicular à reta dada é paralela ao plano ou está contida nele.

19 A figura ao lado representa um sólido chamado prisma hexagonal regular. Suas bases são hexágonos regulares e suas faces laterais são retângulos. Considerando apenas as retas que contêm suas arestas e os planos que contêm suas faces, responda às questões seguintes.



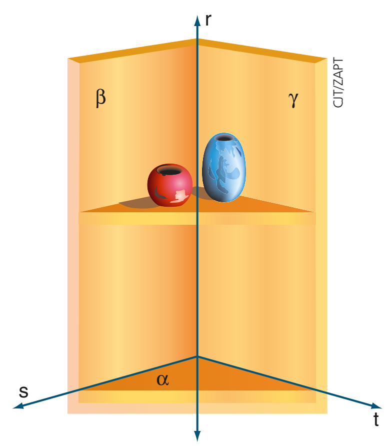
a) A reta $\overleftrightarrow{AM}$ é perpendicular a quais planos?

b) Quais são as retas perpendiculares ao plano (AEC)?

c) O plano (CDQ) é paralelo a quais planos?

d) O plano (BCP) é secante com quais planos?

20 A figura abaixo mostra uma cantoneira instalada na parede. Na figura, a reta **r** é perpendicular ao plano α. Com base nas retas e nos planos assinalados, responda:



Elementos sem proporção entre si.

a) Qual é a interseção de β com γ?

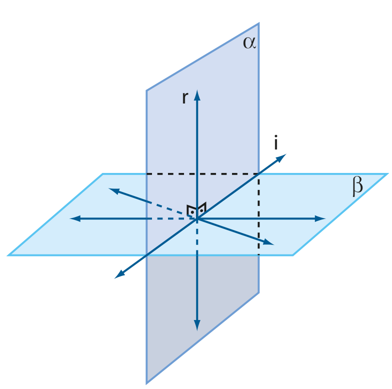
b) Qual é a interseção de α com β?

c) Qual é a interseção de α com γ?

d) Quanto medem os ângulos $\widehat{rs}$ e $\widehat{rt}$?

Planos perpendiculares

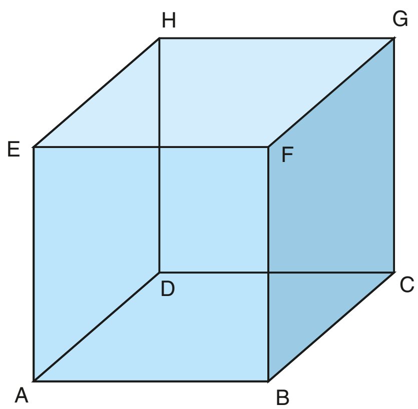
Se dois planos são secantes e um deles contém uma reta perpendicular ao outro, diz-se que os planos são **perpendiculares** [DEF].



$$\alpha \perp \beta \text{ significa } \begin{cases} \alpha \cap \beta = i \\ r \subset \alpha \\ r \perp \beta \end{cases}$$

EXEMPLO 5

Observe o cubo ABCDEFGH:

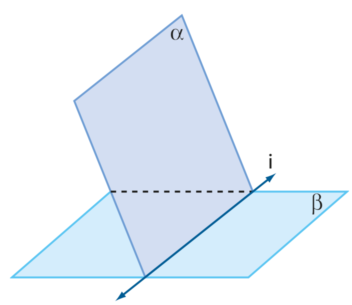


Os planos (ABC) e (ADE) são secantes (sua interseção é $\overleftrightarrow{AD}$), $\overleftrightarrow{AE}$ é perpendicular ao plano (ABC) e $\overleftrightarrow{AE}$ está contida no plano (ADE). Assim, os planos (ABC) e (ADE) são perpendiculares.

PENSE NISTO:

Que outros planos (determinados pelas faces do cubo) são perpendiculares ao plano (ABC)?

Se dois planos são secantes e não são perpendiculares, diz-se que eles são **oblíquos**.

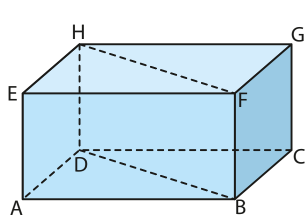


α é oblíquo a β

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

21 Observe abaixo o paralelepípedo retorretângulo ABCDEFGH.



a) $\overleftrightarrow{FG}$ é perpendicular ao plano (ABE)? Qual é o traço dessa reta nesse plano? Quais planos, determinados pelas faces do cubo, contêm $\overleftrightarrow{FG}$ e são perpendiculares ao plano (ABE)?

b) Os planos (ABC) e (CDG) são perpendiculares? Qual é o traço de um deles no outro?

c) O plano (BDF) é perpendicular ao plano (ABC)? Explique. Qual é o traço de um deles no outro?

22 Classifique as afirmações a seguir como verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**).

a) Se dois planos são secantes, então eles são perpendiculares.

b) Se dois planos são perpendiculares, então eles são secantes.

c) Se dois planos são perpendiculares, então toda reta de um deles é perpendicular ao outro.

d) Se uma reta é perpendicular a um plano, por ela passa um único plano, perpendicular ao plano dado.

e) Dois planos perpendiculares a um terceiro são perpendiculares entre si.

f) Se dois planos são perpendiculares a um terceiro, então eles são paralelos.

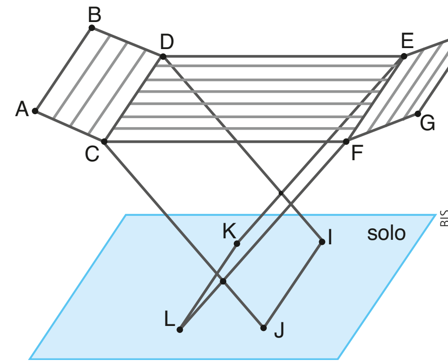
g) Se dois planos são paralelos, todo plano perpendicular a um deles é perpendicular ao outro.

23 O projeto de varal de chão, mostrado na figura ao lado, permite-nos imaginar retas e planos.

a) Quais planos, determinados por 3 pontos não colineares entre os assinalados, são oblíquos ao plano (CDE)?

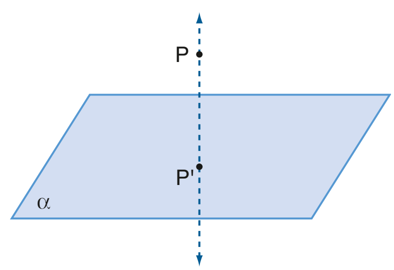
b) Os planos (KLE) e (EFG) são secantes? Qual é o traço de um deles no outro? Esses planos são perpendiculares ou oblíquos?

c) Os planos (ABC) e (EFG) são paralelos ou secantes?



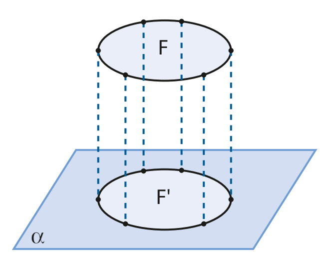
Projeções ortogonais

Projeção ortogonal de um ponto sobre um plano é o ponto de interseção entre a reta perpendicular ao plano conduzida pelo ponto e o plano [DEF].

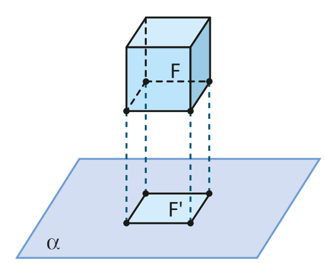


P' = $proj_{\alpha}$ P
α = plano de projeção
$\overleftrightarrow{PP'}$ = reta projetante de **P**

Projeção ortogonal de uma figura plana, ou não plana, sobre um plano é o conjunto das projeções ortogonais dos pontos da figura sobre esse plano [DEF].



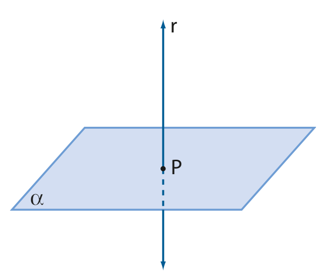
F' = $proj_{\alpha}$ F



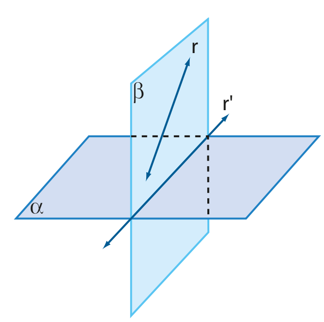
F' = $proj_{\alpha}$ F

A projeção ortogonal de uma reta **r** sobre um plano α é assim definida:

- Se **r** é perpendicular a α, a projeção de **r** sobre α é o ponto **P** em que **r** intersecta α [DEF].
- Se **r** não é perpendicular a α, a projeção de **r** sobre α é a reta **r**', interseção de α com o plano β, perpendicular a α conduzido por **r** [DEF].



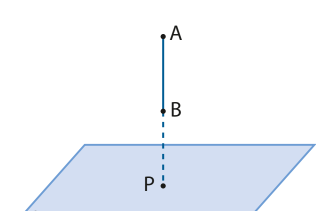
P = $proj_{\alpha}$ r



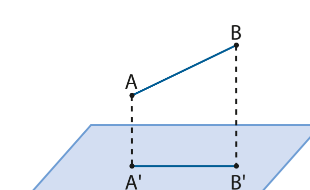
r' = $proj_{\alpha}$ r

A projeção ortogonal de um segmento de reta $\overline{AB}$ sobre um plano α é assim definida:

- Se $\overline{AB}$ é perpendicular a α, a projeção de $\overline{AB}$ sobre α é o ponto **P** em que a reta $\overleftrightarrow{AB}$ intersecta α [DEF].
- Se $\overline{AB}$ não é perpendicular a α, a projeção de $\overline{AB}$ sobre α é o segmento $\overline{A'B'}$ tal que **A**' e **B**' são, respectivamente, as projeções de **A** e **B** sobre α [DEF].



P = $proj_{\alpha}$ $\overline{AB}$



$\overline{A'B'}$ = $proj_{\alpha}$ $\overline{AB}$

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

24 Classifique como verdadeira (**V**) ou falsa (**F**) cada uma das afirmações seguintes.

a) A projeção ortogonal de um ponto sobre um plano é um ponto.

b) A projeção ortogonal de uma reta sobre um plano é uma reta.

c) A projeção ortogonal de um segmento sobre um plano é um segmento.

d) A projeção ortogonal de um segmento oblíquo a um plano, sobre o plano, tem medida menor que a medida do segmento.

e) Se dois segmentos são congruentes, então suas projeções ortogonais sobre qualquer plano são congruentes.

f) Projetando-se ortogonalmente um triângulo sobre um plano podemos obter um segmento de reta.

g) A projeção ortogonal de um cilindro sobre um plano é um círculo.

25 Classifique as afirmações a seguir como verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**).

a) Se as projeções ortogonais de duas retas sobre um plano são paralelas, então as retas são paralelas.

b) Duas retas paralelas não perpendiculares ao plano de projeção têm projeções paralelas.

c) A projeção ortogonal de um ângulo sobre um plano pode ser uma semirreta.

d) A projeção ortogonal de um ângulo sobre um plano pode ser um segmento de reta.

e) A projeção ortogonal de um ângulo sobre um plano pode ser uma reta.

Distâncias

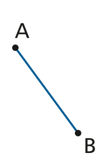
A distância entre dois pontos **A** e **B** pode ser assim definida:

- Se **A** e **B** coincidem, a distância entre eles é nula.

A = B

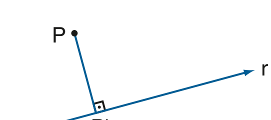
$d_{AB} = 0$

- Se **A** e **B** são distintos, a distância entre eles é a medida do segmento de reta $\overline{AB}$.



d_{AB} = AB
AB: medida do segmento $\overline{AB}$

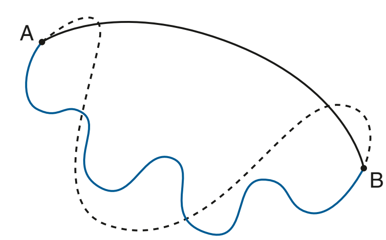
A distância de um ponto **P** a uma reta **r** é a distância de **P** a **P'**, em que **P'** é a interseção entre a reta perpendicular a **r**, conduzida por **P**, e a reta **r**. [DEF].



$d_{P,\,r} = PP'$

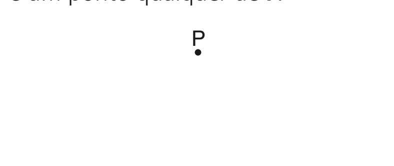
PENSE NISTO:

Qual é o caminho de menor comprimento para ir do ponto **A** ao ponto **B**?



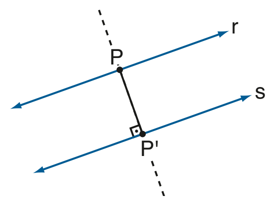
PENSE NISTO:

Se um ponto **P** não pertence a uma reta **r**, qual é a menor distância entre **P** e um ponto qualquer de **r**?



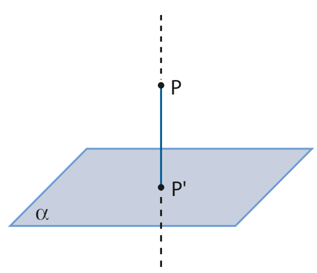
A distância entre duas retas **r** e **s** paralelas é a distância de um ponto **P** qualquer de uma delas até a outra [DEF].

A figura abaixo mostra que a distância entre **r** e **s** foi obtida tomando-se um ponto **P** em **r** e traçando-se $\overleftrightarrow{PP'}$ perpendicular a **s**, com **P'** em **s** (**P'** é o ponto de interseção entre a reta perpendicular a **s** conduzida por **P** e a reta **s**).



$$d_{r,\,s} = d_{P,\,s} = PP'$$

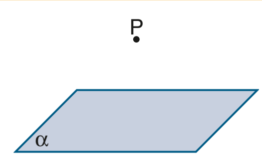
A distância de um ponto **P** a um plano α é a distância de **P** a **P'**, em que **P'** é o ponto de interseção entre a reta perpendicular a α, conduzida por **P** e o plano α [DEF].



$$d_{P,\,\alpha} = d_{PP'} = PP'$$

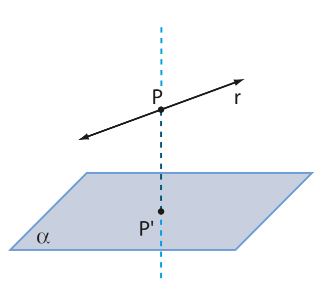
PENSE NISTO:

Se um ponto **P** não pertence a um plano α, qual é a menor distância entre **P** e um ponto qualquer de α?



A distância entre uma reta **r** e um plano α, sendo **r** contida em α ou **r** paralela a α, é a distância de um ponto **P** qualquer de **r** ao plano α [DEF].

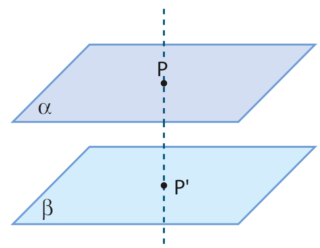
A figura abaixo mostra que a distância entre **r** e α foi obtida tomando-se um ponto **P** em **r** e traçando-se $\overleftrightarrow{PP'}$ perpendicular a α, com **P'** em α (**P'** é o ponto de interseção entre a reta perpendicular a α conduzida por **P** e o plano α).



$$d_{r,\,\alpha} = d_{P,\,\alpha} = d_{PP'} = PP'$$

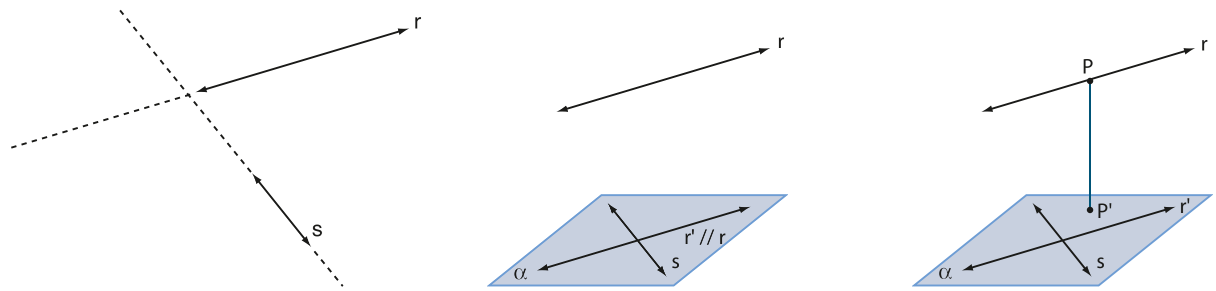
A distância entre dois planos α e β paralelos é a distância de um ponto **P** qualquer de um deles ao outro plano [DEF].

A figura abaixo mostra que a distância entre α e β foi obtida tomando-se um ponto **P** qualquer em α e traçando-se $\overleftrightarrow{PP'}$ perpendicular a β, com **P'** em β.



$$d_{\alpha,\beta} = d_{P,\beta} = d_{PP'} = PP'$$

A distância entre duas retas reversas **r** e **s** é a distância de um ponto qualquer **P** da reta **r** ao plano α que contém **s** e é paralelo à reta **r** [DEF].



$$d_{r,s} = d_{r,\alpha} = d_{P,\alpha} = PP'$$

EXERCÍCIO

FAÇA NO CADERNO

26 Observe o bloco retangular representado abaixo com as medidas indicadas.

Determine a distância:

a) entre os pontos **C** e **G**;

b) do ponto **E** à reta $\overleftrightarrow{FG}$;

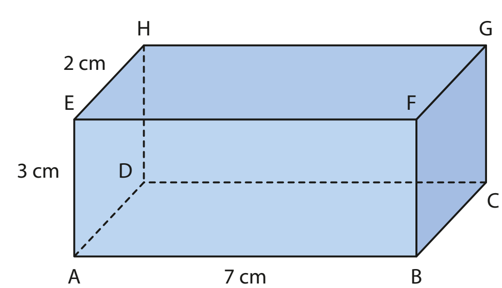
c) do ponto **A** ao plano (CDG);

d) do plano (ADE) ao plano (BCF);

e) do ponto **E** ao plano (ABC);

f) entre as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{EF}$;

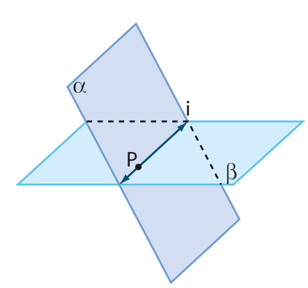
g) entre as retas $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{CF}$.



Teoremas fundamentais

Teorema 1

Se dois planos distintos têm um ponto comum, então a interseção desses planos é uma única reta que passa por aquele ponto.



Hipóteses:
1. α ≠ β (o plano α é distinto do plano β).
2. P ∈ α (o ponto **P** pertence a α).
3. P ∈ β (o ponto **P** pertence a β).

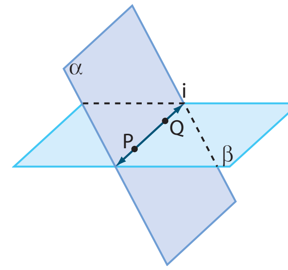
Tese: ∃i | i = α ∩ β e P ∈ i (existe uma única reta **i** que é a interseção de α com β, e **P** pertence a **i**).

Demonstração:

I. Se α e β são distintos e têm um ponto comum **P**, existe outro ponto **Q** que também pertence a α e a β (veja o postulado da interseção na página 131).

II. Chamando de **i** a reta $\overleftrightarrow{PQ}$, temos que **i** está contida em α (pois $P \in \alpha$ e $Q \in \alpha$) e **i** também está contida em β (pois $P \in \beta$ e $Q \in \beta$).
Para provarmos que **i** é a interseção de α e β, devemos provar que todos os pontos que estão em α e em β estão em **i**.

III. Vamos supor, por absurdo, que exista um ponto **X** tal que $X \in \alpha$, $X \in \beta$ e $X \notin i$. Então os planos α e β teriam em comum o ponto **X** e a reta **i** e, desse modo, deveriam coincidir, o que é absurdo, pois contraria a hipótese 1.
A contradição vem do fato de admitirmos que $X \notin i$. Assim, **X** deve pertencer à reta **i** e, portanto, **i** é a interseção de α e β.

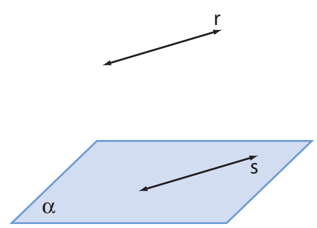


Teorema 2

Se uma reta não está contida num plano e é paralela a uma reta do plano, então ela é paralela ao plano.

Hipóteses:
- 1 $r \not\subset \alpha$ (a reta **r** não está contida em α).
- 2 $r \,//\, s$ (a reta **r** é paralela à reta **s**).
- 3 $s \subset \alpha$ (a reta **s** está contida no plano α).

Tese: $r \,//\, \alpha$ (a reta **r** é paralela ao plano α).



Demonstração:

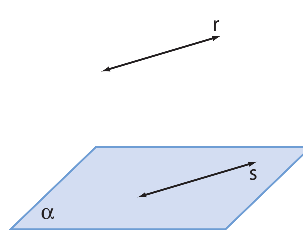
I. Como as retas **r** e **s** são paralelas distintas, elas determinam um plano β.

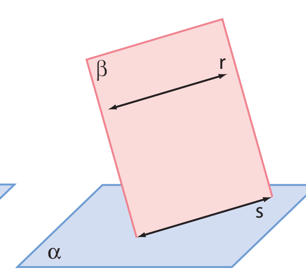
II. Como $s \subset \alpha$ e $s \subset \beta$, com α e β distintos, então $s = \alpha \cap \beta$.

III. Vamos supor, por absurdo, que **r** e α tivessem um ponto **P** em comum:

$$P \in r \text{ e } r \subset \beta \text{ (item I)} \Rightarrow P \in \beta$$

Como **P** pertence a α e a β, então **P** pertence à interseção de α com β, que é a reta **s**.
Daí, as retas **r** e **s** teriam em comum o ponto **P**, o que é absurdo, pois contraria a hipótese 2. A contradição vem do fato de supormos que **r** e α têm o ponto **P** em comum. Logo, **r** e α não podem ter ponto comum, ou seja, **r** é paralela a α.



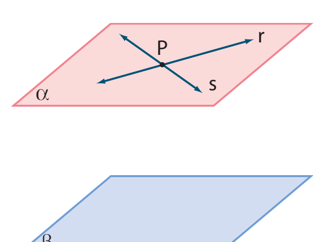


Teorema 3

Se um plano contém duas retas concorrentes, ambas paralelas a outro plano, então esses planos são paralelos.

Hipóteses:
- 1 $r \subset \alpha$ (a reta **r** está contida no plano α).
- 2 $s \subset \alpha$ (a reta **s** está contida no plano α).
- 3 $r \cap s = \{P\}$ (**r** e **s** são concorrentes no ponto **P**).
- 4 $r \,//\, \beta$ (**r** é paralela ao plano β).
- 5 $s \,//\, \beta$ (**s** é paralela ao plano β).

Tese: $\alpha \,//\, \beta$ (o plano α é paralelo ao plano β).



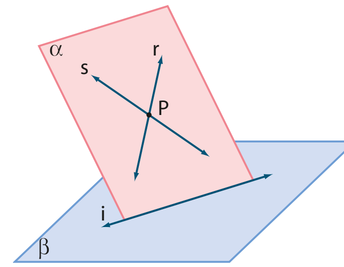
Demonstração:

I. Os planos α e β são distintos, pois α contém retas paralelas a β.

II. Vamos supor, por absurdo, que α e β sejam secantes, isto é, que exista uma reta **i** tal que $\alpha \cap \beta = i$.

- $r \mathbin{/\!/} \beta,\ r \subset \alpha,\ i = \alpha \cap \beta \Rightarrow r \mathbin{/\!/} i$
- $s \mathbin{/\!/} \beta,\ s \subset \alpha,\ i = \alpha \cap \beta \Rightarrow s \mathbin{/\!/} i$

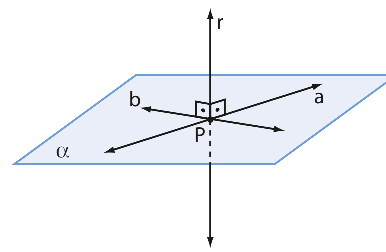
Assim, as retas **r** e **s** passariam por **P** e ambas seriam paralelas a **i**, o que é absurdo, pois contraria o postulado das paralelas de Euclides. A contradição veio do fato de admitirmos que α e β são secantes. Logo, α e β não podem ser secantes, e devemos ter $\alpha \mathbin{/\!/} \beta$.



Teorema 4

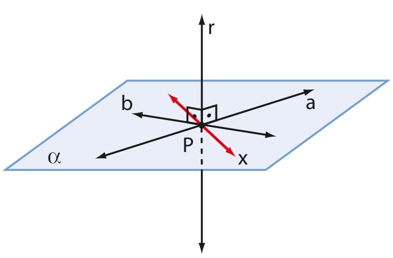
Se uma reta é perpendicular a duas retas concorrentes de um plano, então ela é perpendicular ao plano.

Hipóteses:
1. $r \perp a$ (a reta **r** é perpendicular à reta **a**).
2. $r \perp b$ (a reta **r** é perpendicular à reta **b**).
3. $a \subset \alpha$ (a reta **a** está contida no plano α).
4. $b \subset \alpha$ (a reta **b** está contida no plano α).
5. $a \cap b = \{P\}$ (as retas **a** e **b** são concorrentes em **P**).



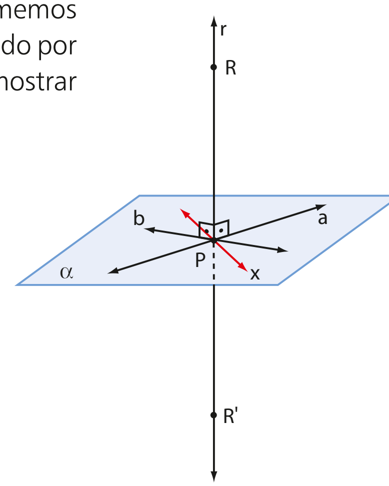
Tese: $r \perp \alpha$ (a reta **r** é perpendicular ao plano α).

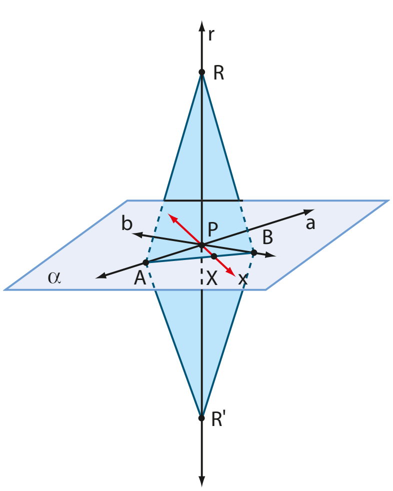
Demonstração:



I. Devemos mostrar que **r** é perpendicular a todas as retas de α que passam por **P**. Para isso, tomemos no plano α uma reta **x** passando por **P** e distinta de **a** e **b**. Vamos mostrar que **r** é perpendicular a **x**.

II. Tomemos na reta **r** dois pontos **R** e **R'** simétricos em relação ao ponto **P**. Teremos, portanto, $\overline{PR} \equiv \overline{PR'}$.





III. Tomemos agora um ponto **A** na reta **a** e um ponto **B** na reta **b**, com $A \neq P$ e $B \neq P$, de tal forma que $\overline{AB}$ intersecte a reta **x** num ponto **X**.

IV. Temos:

- **a** é mediatriz de $\overline{RR'}$; então, $\overline{RA} \equiv \overline{R'A}$.
- **b** é mediatriz de $\overline{RR'}$; então, $\overline{RB} \equiv \overline{R'B}$.

V. Comparando os triângulos RAB e R'AB, encontramos:

$$\left.\begin{array}{l}\overline{RA} \equiv \overline{R'A}\\ \overline{RB} \equiv \overline{R'B}\\ \overline{AB} \text{ é comum}\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle RAB \equiv \triangle R'AB \text{ (critério LLL) e, daí, } R\hat{A}X \equiv R'\hat{A}X.$$

VI. Comparando os triângulos RAX e R'AX, encontramos:

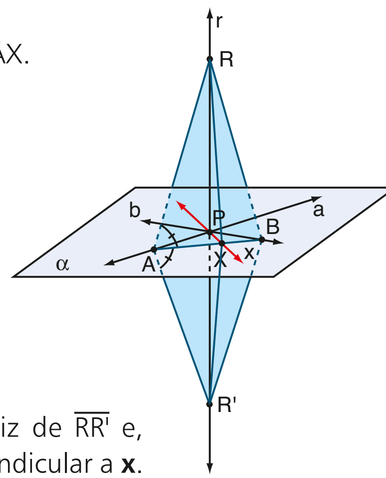
$$\left.\begin{array}{l}\overline{RA} \equiv \overline{R'A}\\ R\hat{A}X \equiv R'\hat{A}X\\ \overline{AX} \text{ é comum}\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle RAX \equiv \triangle R'AX \text{ (critério LAL)}$$

e, daí, $\overline{RX} \equiv \overline{R'X}$.

Temos:

- **X** equidista de **R** e **R'**
- $X \in x$
- **x** passa por **P** (ponto médio de $\overline{RR'}$)

$\Rightarrow$ A reta **x** é a mediatriz de $\overline{RR'}$ e, assim, $r = \overleftrightarrow{RR'}$ é perpendicular a **x**.



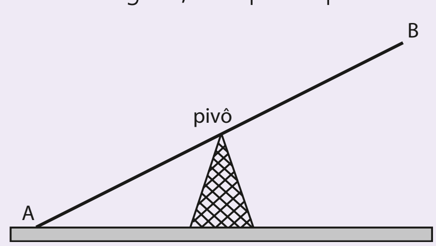
Assim, mostramos que a reta **r** é perpendicular à reta **x**, qualquer que seja **x** contida em α e passando por **P**.

Conclusão: a reta **r** é perpendicular ao plano α.

DESAFIO

(Enem-MEC) Gangorra é um brinquedo que consiste de uma tábua longa e estreita equilibrada e fixada no seu ponto central (pivô). Nesse brinquedo, duas pessoas sentam-se nas extremidades e, alternadamente, impulsionam-se para cima, fazendo descer a extremidade oposta, realizando, assim, o movimento da gangorra.

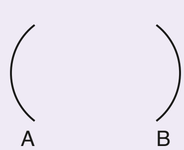
Considere a gangorra representada na figura, em que os pontos **A** e **B** são equidistantes do pivô:



A projeção ortogonal da trajetória dos pontos **A** e **B**, sobre o plano do chão da gangorra, quando esta se encontra em movimento, é:

a) 

b)

c) 

d) 

e)