CAPÍTULO 8

Poliedros

Introdução

As inúmeras obras de engenharia, arquitetura, artes plásticas etc. mostram a imensa quantidade de formas que podem ser relacionadas com figuras estudadas na Geometria.


DELFIM MARTINS/PULSAR IMAGENS

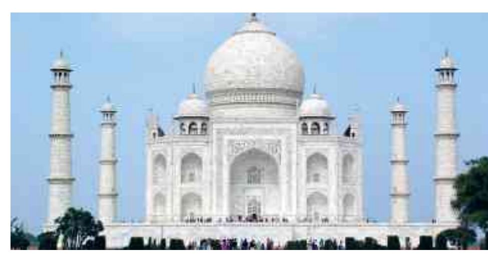
MASP, Museu de Arte de São Paulo. Obra da arquiteta Lina Bo Bardi, construída em 1968.


ROMAN SLAVIK/THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Pirâmide de vidro no Museu do Louvre, em Paris, França, construída em 1988.


THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Catedral Nacional em Brasília. Obra do arquiteto Oscar Niemeyer, construída em 1960.


THINKSTOCK/GETTY IMAGES

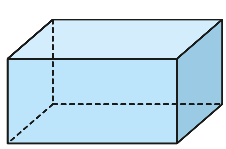
Palácio Taj Mahal, em Agra, Índia, construído no século XVII.

Muitas formas reais encontradas em objetos do cotidiano, embalagens de produtos, construções, entre outros, lembram **sólidos geométricos**, os quais são figuras tridimensionais idealizadas pela Geometria.

Veja algumas fotos de objetos que constituem formas reais. Ao lado de cada uma está desenhada a figura correspondente ao sólido geométrico mais próximo da forma real.

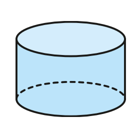

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

forno de micro-ondas


paralelepípedo retângulo

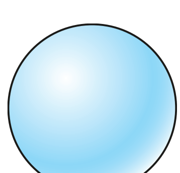

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

lata de atum


cilindro

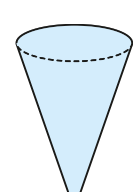

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

globo terrestre


esfera

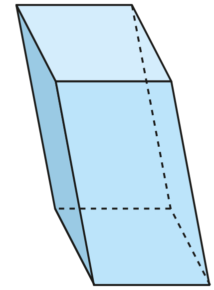

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

casquinha de sorvete


cone

PEDRO SALAVERRÍA/EASY FOTOSTOCK/AGB PHOTO

Porta da Europa em Madri, Espanha, 2015.



prisma oblíquo quadrangular

No nosso dia a dia, encontramos também uma grande variedade de formas reais tridimensionais que são mais complexas e que, de modo geral, não estão associadas aos sólidos geométricos mais "comuns". Observe as imagens.

FILIZ76/THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Hotel Burj Al Arab em Dubai, Emirados Árabes, 2015.

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

suporte para fita adesiva

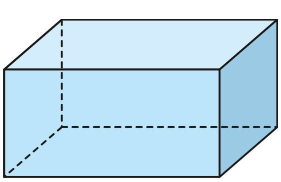
SHUTTERSTOCK

vaso decorativo

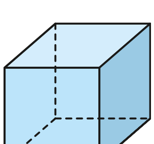
Quando examinamos as formas tridimensionais idealizadas pela Geometria, estamos observando sólidos geométricos.

Os sólidos geométricos mais simples podem ser de dois tipos:

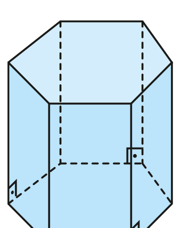
- **Poliedros**: são sólidos geométricos cujas superfícies são formadas apenas por polígonos planos (triângulos, quadriláteros, pentágonos etc.). A palavra *poliedro* vem do grego antigo, em que *poli* significa "vários", e *edro*, "face". Veja alguns exemplos de poliedros:



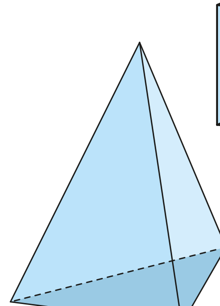
paralelepípedo



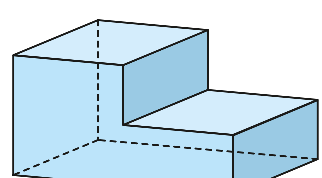
cubo



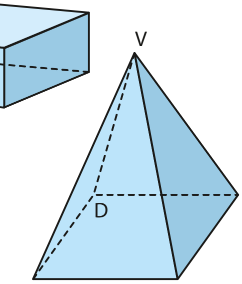
prisma hexagonal



pirâmide triangular



poliedro

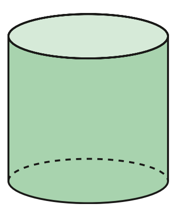


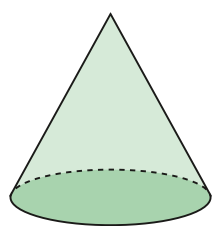
pirâmide quadrangular

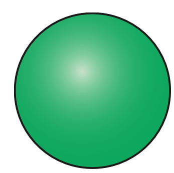
Em um poliedro podemos distinguir:

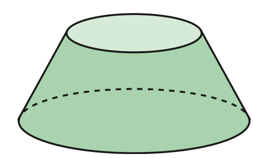
- **faces**: são os polígonos que formam a superfície do poliedro. Observe, por exemplo, que o prisma hexagonal apresenta 8 faces: 2 hexágonos e 6 quadriláteros (retângulos).
- **arestas**: são os lados dos polígonos que constituem as faces do poliedro. Cada aresta é um segmento de reta determinado pela interseção de duas faces. Observe, por exemplo, que a pirâmide triangular possui 6 arestas.
- **vértices**: são as extremidades das arestas. Cada vértice é a interseção de duas ou mais arestas. Observe, por exemplo, que, na pirâmide quadrangular na página anterior, os 5 vértices são: **A**, **B**, **C**, **D**, **V**. No vértice **A** concorrem 3 arestas e o vértice **V** é o "ponto de encontro" de 4 arestas.

- **Corpos redondos**: são sólidos geométricos cujas superfícies têm ao menos uma parte que é arredondada (não plana). Veja os exemplos:


cilindro


cone


esfera


tronco de cone de bases paralelas

Faremos um estudo dos principais poliedros neste capítulo. Já os principais corpos redondos serão estudados no capítulo 9.

Prisma

Observe ao lado alguns objetos encontrados em nosso cotidiano. Cada um deles apresenta características comuns, tais como:

- suas superfícies são constituídas de polígonos;
- tem pelo menos dois polígonos congruentes contidos em planos paralelos;
- os outros polígonos são paralelogramos.

Sólidos com essas características são chamados **prismas**.


FOTOS: THINKSTOCK/GETTY IMAGES

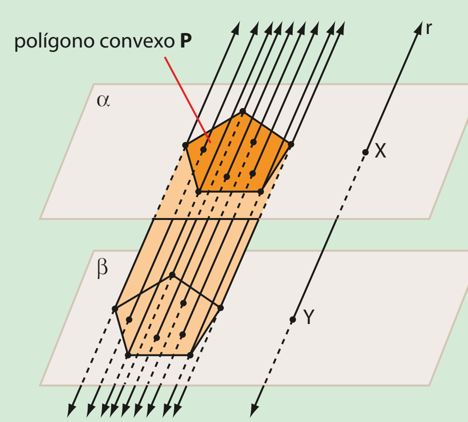
Diversos objetos comuns em nosso dia a dia lembram prismas.

Consideremos dois planos α e β, distintos e paralelos entre si, um polígono convexo **P**, contido em α, e uma reta **r** que intersecta α e β nos pontos **X** e **Y**, respectivamente.

Por todos os pontos de **P**, tracemos retas paralelas a **r**, conforme mostrado na figura ao lado.

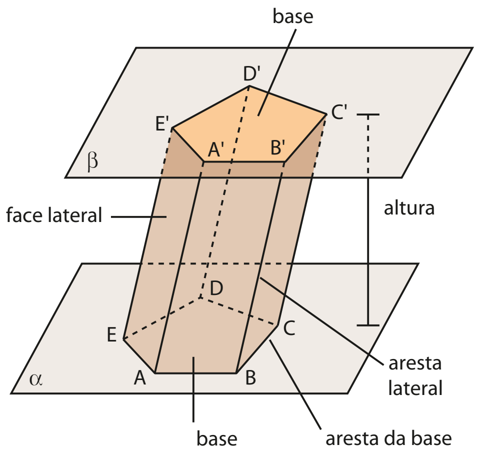
Observe que os pontos de interseção dessas retas com α e β determinam segmentos congruentes ao segmento $\overline{XY}$.

A reunião de todos os segmentos assim obtidos é um sólido chamado **prisma**.



Elementos e classificação

Considerando o prisma representado na figura abaixo, temos:



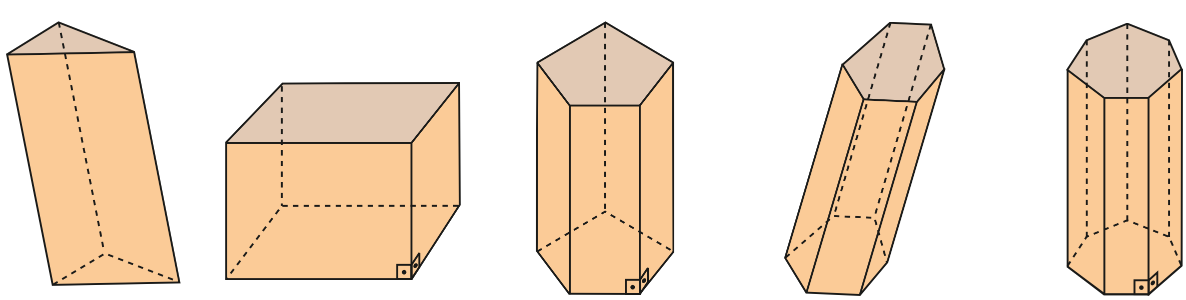
- os polígonos ABCDE e A'B'C'D'E', chamados **bases** do prisma, são congruentes e estão contidos em planos paralelos entre si (α e β);
- os paralelogramos AA'B'B, BB'C'C, CC'D'D, DD'E'E e EE'A'A são chamados **faces laterais**;
- os lados dos polígonos das bases $(\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}, \overline{EA}, \overline{A'B'}, \overline{B'C'}, \overline{C'D'}, \overline{D'E'}$ e $\overline{E'A'})$ são as **arestas das bases**;
- os segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, $\overline{DD'}$ e $\overline{EE'}$ são as **arestas laterais**;
- a distância entre os planos α e β, que contêm as bases, é a **altura** do prisma.

Quanto ao número de lados de cada polígono da base, os prismas são classificados em: triangular, quadrangular, pentagonal etc., conforme o polígono da base seja, respectivamente, um triângulo, um quadrilátero, um pentágono etc.

Quanto à inclinação das arestas laterais em relação aos planos das bases, os prismas são classificados em:

- **prisma oblíquo**: se as arestas laterais são oblíquas aos planos das bases;
- **prisma reto**: se as arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases. Observe que, nesse caso, as faces laterais são retângulos.

Exemplos:



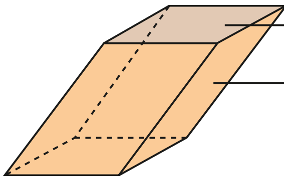
prisma oblíquo triangular (A base é um triângulo.)	prisma reto quadrangular (A base é um quadrilátero.)	prisma reto pentagonal (A base é um pentágono.)	prisma oblíquo hexagonal (A base é um hexágono.)	prisma reto heptagonal (A base é um heptágono.)

OBSERVAÇÃO

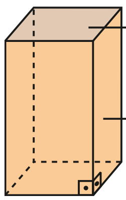
Se as bases de um prisma reto são polígonos regulares, ele é chamado **prisma regular**.

Paralelepípedo

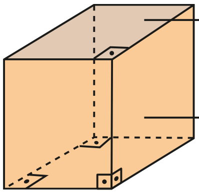
Todo prisma cujas bases são paralelogramos é chamado **paralelepípedo**.
Sua superfície total é a reunião de seis paralelogramos.



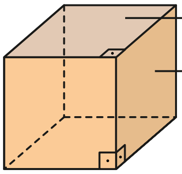
- **Paralelepípedo reto**: é um paralelepípedo cuja superfície total é a reunião de quatro retângulos (faces laterais) com dois paralelogramos (bases).



- **Paralelepípedo retângulo** ou **retorretângulo**: é um paralelepípedo cuja superfície total é a reunião de seis retângulos.



- **Cubo**: é um paralelepípedo cuja superfície total é a reunião de seis quadrados. Note que o cubo é um paralelepípedo retângulo em que todas as arestas são congruentes.



Paralelepípedo retângulo

Considere que o *container* mostrado na imagem tem a forma de um paralelepípedo retângulo cujas dimensões são: 8 m de comprimento, 4,5 m de largura e 3 m de altura.

Suponha que Onofre, dono de uma empresa que aluga *container*, contrate uma pessoa para pintar toda a superfície externa do *container* da foto ao lado. Considerando que essa pessoa cobra R$ 4,50 para pintar uma superfície de 1 m², que quantia Onofre terá de desembolsar para pagar pelo serviço contratado?

ONIONASTUDIO/ALAMY/FOTOARENA

Cálculo da área total

A figura 1 representa um paralelepípedo retângulo, em que **a** e **b** são as medidas dos lados do retângulo da base, e **c**, a medida da altura. A figura 2 representa a planificação da superfície desse paralelepípedo.

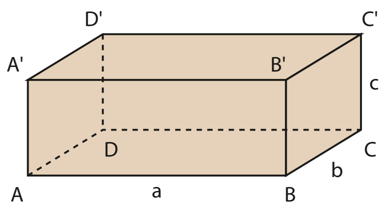


figura 1

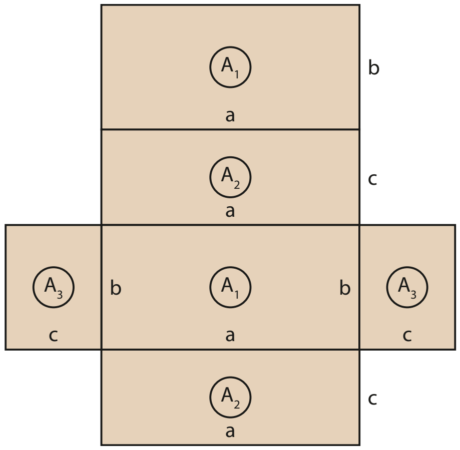


figura 2

Essa planificação mostra que a superfície do paralelepípedo é a reunião de seis retângulos, congruentes dois a dois. Assim, a sua área total $\mathbf{A_t}$ é igual à soma das áreas desses seis retângulos, ou seja:

$$A_t = 2 \cdot A_1 + 2 \cdot A_2 + 2 \cdot A_3 \Rightarrow \boxed{A_t = 2ab + 2ac + 2bc}$$

EXEMPLO 1

Vamos resolver o problema proposto na página anterior, ou seja, vamos calcular a quantia que Onofre deverá pagar à pessoa contratada para pintar toda a superfície externa do *container*.

Como a base do *container* tem 8 m de comprimento por 4,5 m de largura e sua altura mede 3 m, então a área da superfície a ser pintada é igual à soma das áreas de seis retângulos, ou seja, $A = 2ab + 2ac + 2bc$, em que $a = 8$ m, $b = 4{,}5$ m e $c = 3$ m.

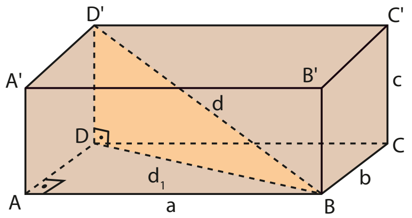
Assim, a área, em metros quadrados, é:

$A = 2(8 \cdot 4{,}5) + 2(8 \cdot 3) + 2(4{,}5 \cdot 3) \Rightarrow A = 147$

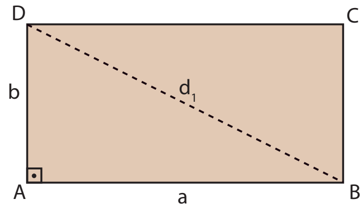
Como o pintor cobra R$ 4,50 por metro quadrado pintado, então, pelos 147 m² de área a ser pintada, ele deverá cobrar de Onofre a quantia de 147 · R$ 4,50 = R$ 661,50.

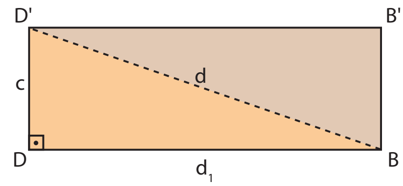
Cálculo da medida da diagonal

No paralelepípedo da figura a seguir, sejam **d** a medida da diagonal do paralelepípedo e $\mathbf{d_1}$ a medida da diagonal da base.



Observe que os triângulos BAD e D'DB são retângulos:





Assim, temos:

$$\left.\begin{array}{l} \text{No } \triangle BAD\text{: } d_1^2 = a^2 + b^2 \\ \text{No } \triangle D'DB\text{: } d^2 = d_1^2 + c^2 \end{array}\right\} \Rightarrow d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

PENSE NISTO:

Por que o triângulo D'DB é retângulo?

Logo: $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Cálculo do volume

O **volume de um sólido** é a medida da região do espaço limitada por sua superfície.

Para expressar o volume de um sólido por meio de um número, devemos estabelecer uma unidade padrão: a unidade de volume é o cubo cuja aresta mede 1 u.c. (unidade de medida de comprimento). Para cada unidade de medida de comprimento, temos uma correspondente unidade de volume, como mostrado na tabela a seguir:

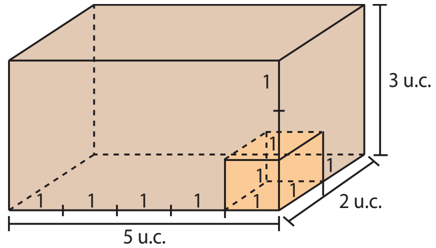
Unidade de medida da aresta do cubo	Unidade de volume
1 dm	1 dm^3
1 cm	1 cm^3
1 m	1 m^3
1 mm	1 mm^3

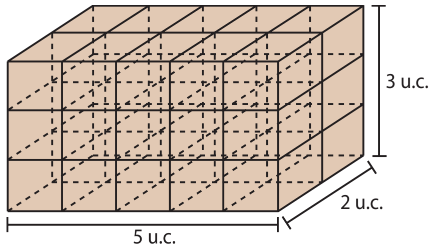
De modo geral:

unidade de medida da aresta = 1 u.c. e unidade de volume = 1 $(u.c.)^3$

Consideremos um paralelepípedo retângulo com as seguintes dimensões: a = 5 u.c., b = 2 u.c. e c = 3 u.c.

A divisão do comprimento, da largura e da altura desse paralelepípedo em cinco unidades, duas unidades e três unidades, respectivamente, nos permite obter 30 cubos unitários ($5 \cdot 2 \cdot 3 = 30$), conforme mostrado nas figuras abaixo:





Dizemos, então, que o volume desse paralelepípedo é:

$$V = (5 \text{ u.c.}) \cdot (2 \text{ u.c.}) \cdot (3 \text{ u.c.}) = 30 \text{ (u.c.)}^3$$

De modo geral, se as medidas das três dimensões de um paralelepípedo retângulo são os números inteiros **a**, **b** e **c**, seu volume é dado por:

$$V = a \cdot b \cdot c$$

Na figura 1 da página 154, como $a \cdot b$ é a área da base ($\mathbf{A_b}$) e **c** é a medida **h** da altura, temos:

$$V = (a \cdot b) \cdot c \Rightarrow \boxed{V = A_b \cdot h}$$

OBSERVAÇÃO

O que apresentamos é um caso particular da obtenção da fórmula do volume de um paralelepípedo retângulo, em que as medidas de suas arestas são números inteiros (positivos). Pode-se mostrar que essa fórmula é válida para paralelepípedos retângulos nos quais as medidas das arestas são expressas por quaisquer números reais positivos.

EXEMPLO 2

Vamos calcular o volume do *container* de Onofre (ver página 153), lembrando que ele tem a forma de um paralelepípedo retângulo cujas dimensões são: 8 m de comprimento, 4,5 m de largura e 3 m de altura.

Considerando $a = 8$ m, $b = 4,5$ m e $c = 3$ m, temos:

$$V = a \cdot b \cdot c = 8 \cdot 4,5 \cdot 3 \Rightarrow V = 108$$

Logo, o volume do *container* de Onofre é 108 m^3.

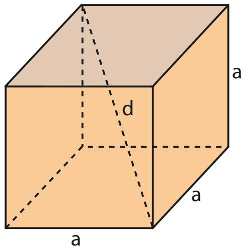
Cubo

O cubo é um paralelepípedo retângulo cujas seis faces são quadrados congruentes. Assim, suas 12 arestas são congruentes entre si.

Como já sabemos, as fórmulas da área total, da diagonal e do volume de um paralelepípedo retângulo são: $A = 2ab + 2ac + 2bc$, $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ e $V = a \cdot b \cdot c$, respectivamente.

Considerando $b = c = a$ em cada uma dessas fórmulas, obtêm-se as fórmulas da área total, da diagonal e do volume de um cubo de aresta de medida **a**:

- Área **A**: $A = 2 \cdot a \cdot a + 2 \cdot a \cdot a + 2 \cdot a \cdot a \Rightarrow \boxed{A = 6a^2}$
- Diagonal **d**: $d = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3a^2} \Rightarrow \boxed{d = a\sqrt{3}}$
- Volume **V**: $V = a \cdot a \cdot a \Rightarrow \boxed{V = a^3}$



OBSERVAÇÃO

A unidade de medida de volume do Sistema Internacional de Unidades (SI) é o metro cúbico. Apesar de não fazer parte do SI, a unidade litro é reconhecida como unidade de medida por esse sistema de medidas e definida como o volume de um cubo cuja aresta mede 1 decímetro, ou seja, 1 L = 1 dm^3.

PENSE NISTO:

Em quantos cubos de aresta 1 cm pode ser decomposto um cubo de aresta 1 m?

EXEMPLO 3

No exemplo anterior, determinamos o volume do *container* de Onofre: 108 m^3.

Agora, vamos determinar o maior número de caixas que podem ser transportadas nesse *container*, considerando que todas têm a forma de um cubo cuja aresta mede 50 cm e que a massa total das caixas não excede a tonelagem máxima que pode ser transportada no *container*.

Como cada dimensão do *container* é divisível por 50 cm, temos:

Se cada aresta da caixa mede 50 cm, o volume ocupado por uma única caixa é:

$$V_1 = (50 \text{ cm}) \cdot (50 \text{ cm}) \cdot (50 \text{ cm}) = 125\,000 \text{ cm}^3 = 0,125 \text{ m}^3$$

Se **x** é o número de caixas que podem ser transportadas, então devemos ter: $x \cdot V_1 \leqslant 108$ m^3. Logo:

$$x \cdot 0,125 \leqslant 108 \Rightarrow x \leqslant 864 \quad (*)$$

O maior número de caixas que podem ser transportadas no *container* é o maior número inteiro **x** que satisfaz a sentença (*), ou seja, 864.

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

1 Em um aquário, um tanque para peixes tem a forma de um paralelepípedo retângulo de base quadrada, e a água em seu interior ocupa $\frac{3}{5}$ da sua capacidade. Considerando que esse tanque tem 3 m de altura e a aresta da base mede 4,5 m, determine quantos litros de água faltam para que ele fique totalmente cheio.


LOURENS SMAK/ALAMY/FOTOARENA

Solução:

Primeiramente, calculemos o volume **V**, em m^3, do tanque:

$V = A_b \cdot h \Rightarrow V = (4,5)^2 \cdot 3 \Rightarrow V = 60,75$

Como a água existente no tanque ocupa $\frac{3}{5} \cdot V$, então a água a ser colocada no tanque, para enchê-lo totalmente, deverá ocupar um volume $\mathbf{V_a}$, em m^3, tal que:

$$V_a = V - \frac{3}{5} \cdot V = \frac{2}{5} \cdot V \Rightarrow V_a = \frac{2}{5} \cdot 60,75 \Rightarrow V_a = 24,30$$

Lembrando que $1\ m^3 = 1\,000\ dm^3$ e $1\ L = 1\ dm^3$, então:

$$V_a = 24,30\ m^3 = 24,30 \cdot 1\,000\ dm^3 = 24\,300\ dm^3 = 24\,300\ L$$

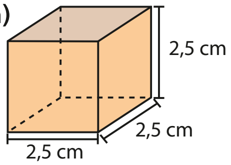
Logo, são necessários 24 300 litros de água para terminar de encher o tanque do aquário.

EXERCÍCIOS

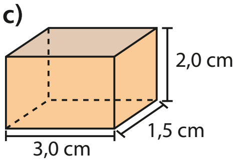
FAÇA NO CADERNO

1 Calcule a medida da diagonal, a área total e o volume de cada um dos paralelepípedos retângulos representados abaixo:

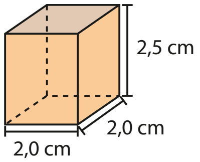
a)



c)



b)

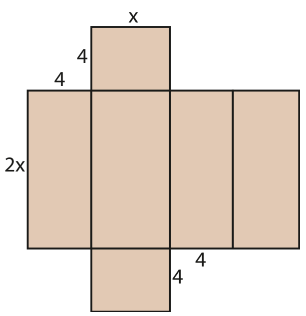


2 Determine o volume de um paralelepípedo retângulo, sabendo que a medida de sua diagonal é $3\sqrt{10}$ dm e duas de suas dimensões medem 4 dm e 7 dm.

3 Calcule a medida da diagonal, a área total e o volume de um cubo cuja soma das medidas das arestas é igual a 48 cm.

4 Calcule a área total e o volume de um cubo cuja diagonal de uma face mede 1,2 m.

5 A figura mostra a planificação da superfície de um paralelepípedo retângulo no qual a unidade das dimensões indicadas é o centímetro. Determine:



a) **x**, sabendo que a área total do paralelepípedo é igual a 364 cm^2;

b) o volume do paralelepípedo para x = 4 cm;

c) a medida da diagonal do paralelepípedo para x = 6 cm.

6 Uma caixa tem a forma de um paralelepípedo retângulo cujo volume é igual a 192 cm^3. Se as áreas de duas de suas faces são iguais a 32 cm^2 e 24 cm^2, determine a área total desse paralelepípedo.

7 Priscila usou massa de modelar para construir um paralelepípedo retângulo cujas dimensões eram 20 cm × 30 cm × 45 cm. Em seguida, ela desmanchou o paralelepípedo que havia construído e aproveitou toda a massa usada na sua construção para modelar um cubo de **x** centímetros de aresta. Com base nessas informações, determine:

a) **x**;

b) a medida da diagonal do cubo;

c) a razão entre a área total do paralelepípedo e a área total do cubo.

8 O que ocorre com a área total e com o volume de um cubo quando a medida da aresta:

a) dobra?

b) é reduzida a $\frac{1}{3}$ de seu valor?

c) é reduzida à metade de seu valor?

d) é multiplicada por um número positivo **k**?

9 Fausto tem em sua casa um reservatório de água com a forma de um prisma reto de base quadrada, no qual a aresta da base e a altura medem, respectivamente, x dm e 8 dm. Se ele pretende reformar tal reservatório, aumentando em 20% as medidas das suas arestas e da sua altura, a fim de que o novo reservatório tenha capacidade para 3 110,4 litros de água, qual deverá ser o valor de **x**?

10 Pretende-se construir um reservatório de água em forma de um paralelepípedo retângulo que tem 4 m de altura e cujo perímetro da base é igual a 40 m. Determine o comprimento e a largura desse reservatório para que ele tenha capacidade para 384 000 litros.

11 Um reservatório de água ($\mathbf{R}_1$) tem a forma de um paralelepípedo retângulo, com as seguintes dimensões: 2 m de altura, 4 m de largura e 6 m de comprimento. Pretende-se construir outro reservatório ($\mathbf{R}_2$), com a forma de um paralelepípedo retângulo cujas dimensões são diretamente proporcionais às respectivas dimensões de $\mathbf{R}_1$. Nessas condições, se $\mathbf{R}_2$ tiver 15 m de comprimento,

a) qual será a área total de sua superfície?

b) que porcentagem de acréscimo sofrerá o volume de $\mathbf{R}_1$?

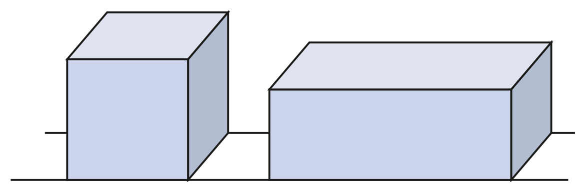
12 Seja um paralelepípedo retângulo cuja área total é igual a 846 cm^2 e tal que as medidas das arestas, em centímetros, são termos consecutivos de uma progressão aritmética de razão 3. Para esse paralelepípedo, determine:

a) a medida da diagonal, em centímetros;

b) o volume, em centímetros cúbicos.

13 Um comerciante comprou 20 blocos de doce de abóbora, cada qual com a forma de um paralelepípedo retângulo de base 12 cm × 21 cm e altura medindo $\frac{1}{11}$ do perímetro da base. O comerciante dividiu cada bloco em cubinhos de 3 cm de aresta e colocou-os à venda por R$ 0,80 a unidade. Se ele pagou ao fornecedor R$ 15,00 por bloco, qual será o seu lucro na venda de todos os cubinhos obtidos dos 20 blocos?

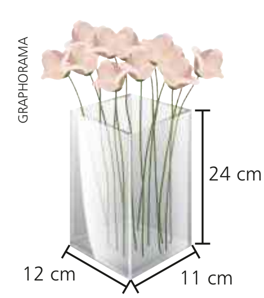
14 (Unifesp-SP) Um cubo de aresta de comprimento **a** vai ser transformado num paralelepípedo retorretângulo de altura 25% menor, preservando-se, porém, o seu volume e o comprimento de uma de suas arestas, como é mostrado na figura.



A diferença entre a área total (a soma das áreas das seis faces) do novo sólido e a área total do sólido original será:

a) $\frac{1}{6}a^2$ **b)** $\frac{1}{3}a^2$ **c)** $\frac{1}{2}a^2$ **d)** $\frac{2}{3}a^2$ **e)** $\frac{5}{6}a^2$

15 O vaso mostrado na figura foi feito com placas de vidro, cada uma com 0,5 cm de espessura. Considerando que ele tem a forma de paralelepípedo retângulo com as dimensões externas indicadas, determine:



a) a capacidade desse vaso em litros;

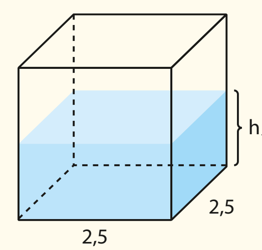
b) o volume do vidro utilizado na sua confecção.

Aplicações

O volume do cubo e a função linear

Para ajudar no abastecimento de água de uma região castigada pela estiagem, a prefeitura de uma cidade abastece diariamente, com 13 500 litros (ou 13,5 m³) de água, um pequeno e distante povoado. Essa quantidade de água é retirada de um caminhão-pipa e despejada, por meio de uma bomba, em um reservatório cúbico vazio, com 2,5 m de aresta. No processo de transferência da água, um funcionário utiliza apenas uma trena graduada para verificar a altura que a água atinge no reservatório e, dessa forma, ele consegue saber o volume de água transferido pela bomba sem que haja desperdício de água. Como isso é possível?

O volume de água (em metros cúbicos) despejado no reservatório varia de acordo com o nível atingido pela água, em metros.

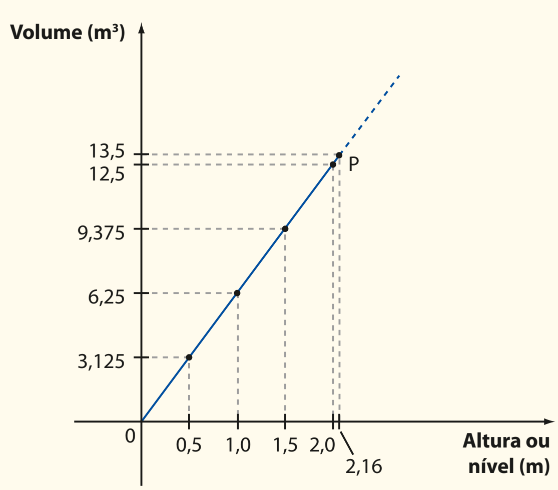


- Para um certo nível $\mathbf{h_1}$, o volume de água é dado por $V_1 = A_b \cdot h_1 = (2,5)^2 \cdot h_1$.
- Para um outro nível $\mathbf{h_2}$, o volume de água é dado por $V_2 = (2,5)^2 \cdot h_2$, e assim por diante.

Enfim, para cada nível **h** que a água atinge, o volume transferido é:

$$V = (2,5)^2 \cdot h$$

Como a área de base ($2,5^2 = 6,25$) é constante, a razão $\frac{V}{h}$ é constante (e igual a 6,25) e, desse modo, as grandezas "volume de água transferido" e "nível da água" são **diretamente proporcionais** e a relação entre essas grandezas é dada por: $\frac{V}{h} = 6,25 \Rightarrow V = 6,25 \cdot h$, com **V** em m³ e **h** em m. Trata-se da **função linear** $y = 6,25 \cdot x$, cujo gráfico está abaixo representado:



Assim, para que o volume transferido seja de 13 500 L = 13,5 m³, devemos ter:
$13,5 = 6,25 \cdot x \Rightarrow x = 2,16$ (veja o ponto **P**).

Em resumo, o funcionário deve fazer medições sucessivas com a trena até que o nível de água atinja a altura de 2,16 m, ou seja, 2 metros e 16 centímetros. Nesse ponto, a transferência de água deve ser interrompida, pois o recipiente cúbico já contém os 13 500 litros.

Princípio de Cavalieri

Conseguimos estabelecer uma fórmula para o volume de um paralelepípedo retângulo de maneira intuitiva; entretanto, para determinar a expressão do volume de outros sólidos, o processo não é tão simples. Uma maneira que pode ser utilizada para a obtenção do volume de um sólido é adotar como axioma um resultado formalizado pelo matemático italiano Bonaventura Francesco Cavalieri (1598-1647), que é conhecido como **princípio de Cavalieri**.

Antes de enunciar o princípio de Cavalieri, vamos apresentar um exemplo para que ele possa ser compreendido de maneira intuitiva.

Dispõe-se de um conjunto de chapas retangulares de madeira, todas com as mesmas dimensões e, consequentemente, com o mesmo volume.

Imagine que elas foram usadas para formar duas pilhas diferentes, cada qual com a mesma quantidade de chapas, como mostram as figuras 1 e 2:

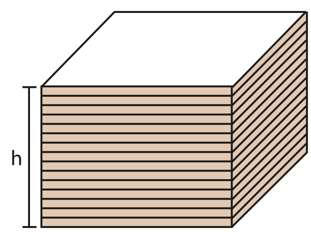


figura 1

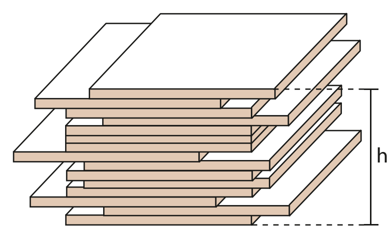
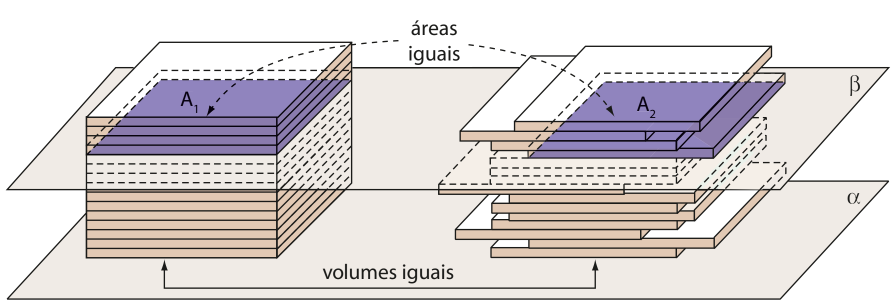


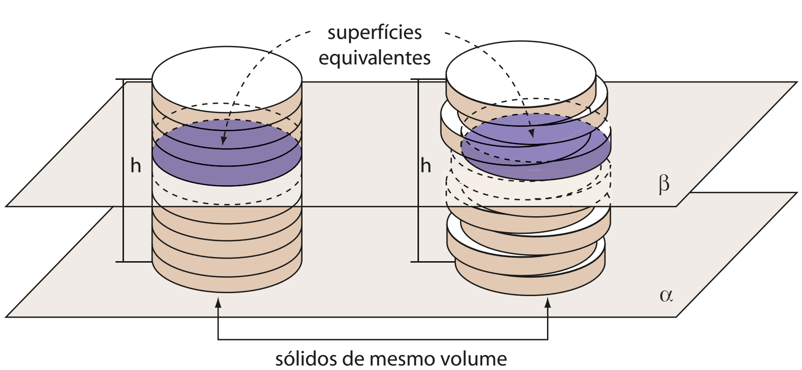
figura 2

Note que, em ambas as pilhas, a quantidade de espaço ocupado pela coleção de chapas é a mesma, isto é, os sólidos das figuras 1 e 2 têm o mesmo volume.

Imagine agora esses mesmos sólidos com bases contidas num mesmo plano α e situados num mesmo semiespaço dos determinados por α. Qualquer plano β paralelo a α e secante aos sólidos 1 e 2 determina nesses sólidos superfícies equivalentes, ou seja, de áreas iguais.

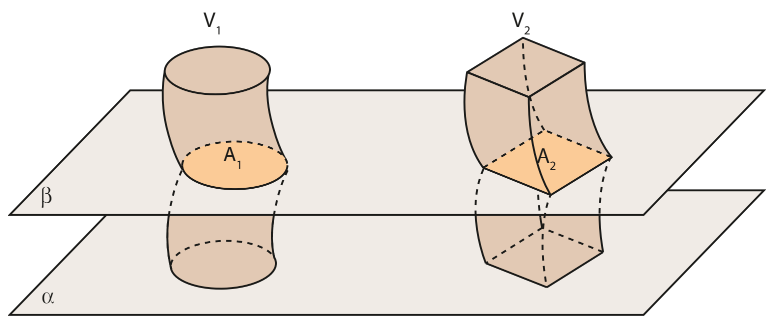


A mesma ideia pode ser estendida para duas pilhas, cada qual com a mesma quantidade de moedas de dimensões iguais:



O que acabamos de apresentar de maneira intuitiva é o que chamamos princípio de Cavalieri.

Dois sólidos, nos quais todo plano secante, paralelo a um dado plano, determina superfícies de áreas iguais (superfícies equivalentes), são sólidos de volumes iguais (sólidos equivalentes).



$$A_1 = A_2 \Rightarrow V_1 = V_2$$

De modo geral, sua aplicação deve ser feita colocando-se os dois sólidos com bases em um mesmo plano, paralelo àquele em que estarão as seções de áreas iguais.

A seguir, usaremos o princípio de Cavalieri para calcular o volume de um prisma.

Áreas e volume

Área da base (A_b)

Como a base de um prisma é um polígono, a área da base de um prisma é a área de um polígono.

Por exemplo, se a base do prisma for um quadrado cujo lado mede ℓ, então $A_b = \ell^2$; se a base do prisma for um triângulo, em que **b** e **h** são, respectivamente, as medidas da base e da altura relativa a essa base, então $A_b = \frac{b \cdot h}{2}$.

Área lateral (A_ℓ)

Como a superfície lateral de um prisma é a reunião de suas faces laterais, então a área lateral de um prisma é a soma das áreas das faces laterais.

Área total (A_t)

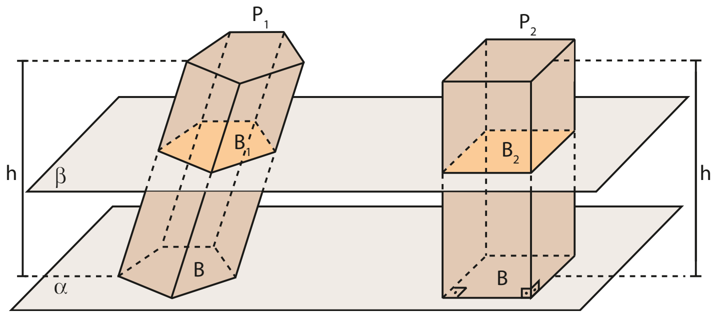
Como a superfície total de um prisma é a reunião da superfície lateral com as bases, então a área total de um prisma é dada por:

$$A_t = A_\ell + 2 \cdot A_b$$

Volume (V)

Imaginemos um prisma $\mathbf{P_1}$ de altura de medida **h** e área da base igual a **B**. Consideremos um paralelepípedo retângulo $\mathbf{P_2}$, em que **h** é a medida da altura e a área da base é igual a **B**. Note que $\mathbf{P_1}$ e $\mathbf{P_2}$ têm as alturas de medidas iguais, assim como são iguais as áreas de suas bases.

Suponhamos que os dois sólidos tenham as bases contidas num mesmo plano α e fiquem no mesmo semiespaço de origem α, conforme mostrado na figura:



Observe que qualquer plano β paralelo a α e que secione $\mathbf{P}_1$ também seciona $\mathbf{P}_2$. Note também que as seções ($\mathbf{B}_1$ e $\mathbf{B}_2$) têm áreas iguais, pois são congruentes às respectivas bases.

Então, pelo princípio de Cavalieri, o prisma $\mathbf{P}_1$ e o paralelepípedo $\mathbf{P}_2$ têm volumes iguais, ou seja, $V_{P_1} = V_{P_2}$.

Como $V_{P_2} = B \cdot h$, então: $V_{P_1} = B \cdot h$.

Assim, concluímos que:

$$V = A_b \cdot h$$

O volume de um prisma é igual ao produto da área da base pela medida da altura.

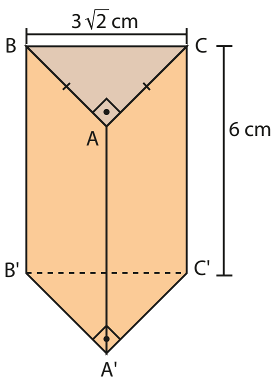
Como exemplo, consideremos $\mathbf{P}_1$ um prisma reto triangular com 12 cm de altura e área da base igual a 18 cm² e $\mathbf{P}_2$ um cubo cuja aresta da base mede 6 cm. Temos:

$$\left.\begin{array}{l} V_{P_1} = A_b \cdot h \Rightarrow V_{P_1} = 18 \cdot 12 \Rightarrow V_{P_1} = 216 \text{ cm}^3 \\ V_{P_2} = a^3 \Rightarrow V_{P_2} = 6^3 \Rightarrow V_{P_2} = 216 \text{ cm}^3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{P_1} = V_{P_2} \Rightarrow \mathbf{P}_1 \text{ e } \mathbf{P}_2 \text{ são sólidos } \textbf{equivalentes}$$

EXEMPLO 4

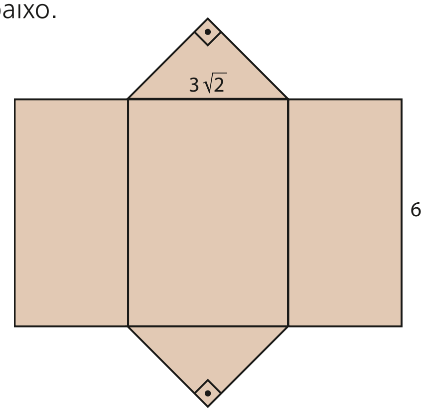
A figura ao lado representa um prisma reto, em que a altura mede 6 cm e a base é um triângulo retângulo isósceles cuja hipotenusa mede $3\sqrt{2}$ cm.



Vamos determinar a área total ($\mathbf{A}_t$) e o volume ($\mathbf{V}$) desse prisma.

- Cálculo de $\mathbf{A}_t$:

  Considere a planificação da superfície do prisma dado, mostrada na figura abaixo.

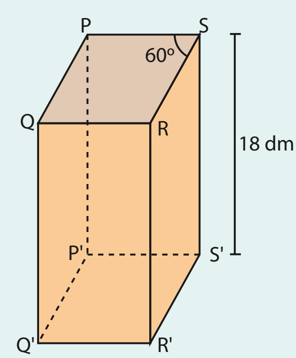


Observe que a área total do prisma é igual à soma das áreas de dois triângulos retângulos isósceles (BAC e B'A'C') com as áreas de três retângulos (ABB'A', CAA'C' e BCC'B'). Temos:

- $\triangle$BAC é retângulo e isósceles; então:
  $(BA)^2 + (AC)^2 = (BC)^2 \underset{BA\,=\,AC}{\Rightarrow} 2 \cdot (AC)^2 = (3\sqrt{2})^2 \Rightarrow$
  $\Rightarrow AC = BA = 3$ cm
  Logo: $A_b = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \Rightarrow A_b = 4{,}5$ cm²
- Como a área lateral é a soma das áreas dos retângulos ABB'A', CAA'C' e BCC'B', então:
  $$A_\ell = 3 \cdot 6 + 3 \cdot 6 + 3\sqrt{2} \cdot 6 \Rightarrow A_\ell = 18(2 + \sqrt{2})\ \text{cm}^2$$
  Portanto: $A_t = A_\ell + 2 \cdot A_b \Rightarrow A_t = 36 + 18\sqrt{2} + 2 \cdot 4{,}5 \Rightarrow A_t = 9(5 + 2\sqrt{2})$ cm²
  Logo, a área total desse prisma reto é igual a $9(5 + 2\sqrt{2})$ cm².
- Cálculo de **V**:
  Como o volume de um prisma é dado por $V = A_b \cdot h$, então:
  $$V = 4{,}5 \cdot 6 \Rightarrow V = 27\ \text{cm}^3$$
  Logo, o volume desse prisma reto é 27 cm³.

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

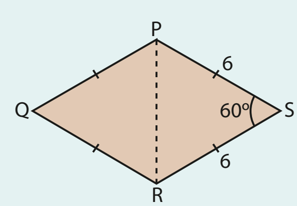
2 Um prisma reto é tal que sua base é um losango com 24 dm de perímetro e um dos ângulos internos mede 60°, conforme a figura. Considerando que esse prisma tem 18 dm de altura, determine o seu volume.



Solução:

Primeiramente, vamos determinar $\mathbf{A_b}$, área da base do prisma.

Se o perímetro do losango da base é igual a 24 dm, então cada lado mede 6 dm.



A área do losango da base é igual à soma das áreas dos triângulos PSR e PQR, que são congruentes. Assim, temos:

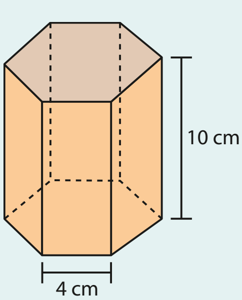
$$A_b = 2 \cdot A_{PSR} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \text{sen } 60° \Rightarrow A_b = 18\sqrt{3}\ \text{dm}^2$$

O volume **V** do prisma é dado por $V = A_b \cdot h$. Então, como h = 18 dm, temos:

$$V = (18\sqrt{3}\ \text{dm}^2) \cdot (18\ \text{dm}) = 324\sqrt{3}\ \text{dm}^3$$

Logo, o volume desse prisma é $324\sqrt{3}$ dm³.

3 Um artesão faz peças maciças de latão e as vende por R$ 35,00 o quilograma. Fabrício comprou uma dessas peças, que tem a forma de um prisma regular hexagonal de 10 cm de altura e cuja aresta da base mede 4 cm. Considerando que a densidade do latão é 8,5 g/cm³, quanto Fabrício pagou pela peça comprada? Use $\sqrt{3} \simeq 1{,}7$.



Solução:

Como a densidade do latão é 8,5 g/cm³, isto é, a massa de latão num volume de 1 cm³ é 8,5 g, então devemos primeiramente determinar o volume **V** da peça comprada por Fabrício.

- Cálculo de **V**:

A peça tem a forma de um prisma regular hexagonal; então, $V = A_b \cdot h$, em que $h = 10$ cm e $\mathbf{A_b}$ é a área de um hexágono regular cujo lado mede 4 cm.

Como um hexágono regular é composto de seis triângulos equiláteros, então:

$$A_b = 6 \cdot \left(\frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4}\right) \underset{\ell = 4}{\Rightarrow} A_b = 6 \cdot \left(\frac{4^2 \cdot 1{,}7}{4}\right) \Rightarrow A_b = 40{,}8 \text{ cm}^2$$

Como $V = A_b \cdot h$, temos:

$$V = (40{,}8 \text{ cm}^2) \cdot (10 \text{ cm}) = 408 \text{ cm}^3$$

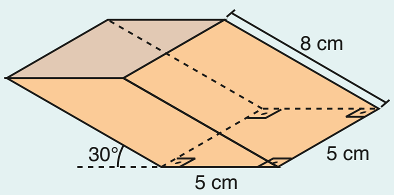
- Cálculo da quantia paga por Fabrício:

Como a densidade do latão é 8,5 g/cm³, a regra de três seguinte permite que se calcule a massa da peça comprada:

$$\left.\begin{array}{ccc} \text{massa (g)} & & \text{volume (cm}^3\text{)} \\ 8{,}5 & \text{———} & 1 \\ x & \text{———} & 408 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{8{,}5}{x} = \frac{1}{408} \Rightarrow x = 3\,468 \text{ g} = 3{,}468 \text{ kg}$$

Se o artesão vende cada peça a R$ 35,00 o quilograma, então a peça comprada por Fabrício custou $3{,}468 \cdot$ R$ 35,00, ou seja, R$ 121,38.

4 Determine o volume do paralelepípedo oblíquo mostrado na figura, sabendo que sua base é um quadrado cujo lado mede 5 cm e que a aresta lateral mede 8 cm.

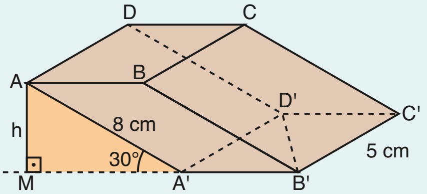


Solução:

A área da base do paralelepípedo é:

$$A_b = 5^2 \Rightarrow A_b = 25 \text{ cm}^2$$

Para determinar a medida **h** da altura do paralelepípedo, note que o triângulo AMA' é retângulo; assim:



$$\text{sen } 30° = \frac{AM}{AA'} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{h}{8} \Rightarrow h = 4 \text{ cm}$$

Como o volume **V** do paralelepípedo é dado por $V = A_b \cdot h$, temos:

$$V = (25 \text{ cm}^2) \cdot (4 \text{ cm}) = 100 \text{ cm}^3$$

OBSERVAÇÃO

Define-se a **densidade de um material homogêneo** como o quociente de sua massa pelo seu volume.
A representação da densidade pode ser feita pela letra grega **ρ** (que se lê "rô") e é expressa, entre outros modos, em gramas por centímetro cúbico, quilogramas por metro cúbico, libras por polegada cúbica etc. Assim:

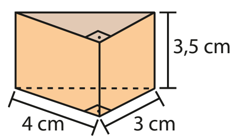
$\rho = \frac{m}{V}$, em que **m** é a massa e **V** o volume do material.

EXERCÍCIOS

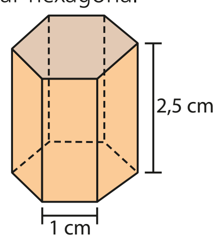
FAÇA NO CADERNO

16 Calcule a área lateral, a área total e o volume de cada um dos seguintes prismas:

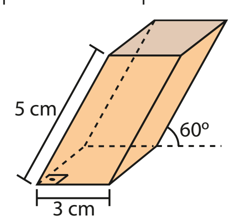
a) prisma reto triangular



b) prisma regular hexagonal

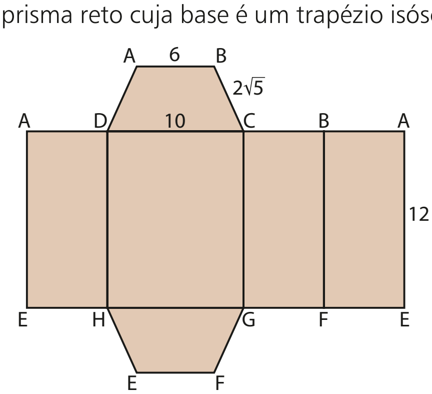


c) prisma oblíquo de base quadrada



17 Considere um prisma reto cuja base é um triângulo equilátero de perímetro 12 dm. Determine a área total e o volume desse prisma, sabendo que a medida da sua altura é o dobro da medida da altura da base.

18 Na figura tem-se a planificação da superfície de um prisma reto cuja base é um trapézio isósceles.



Considerando que a unidade das medidas indicadas é o centímetro, determine:

a) o volume desse prisma;

b) a razão entre a área da base e a área lateral desse prisma, nessa ordem.

19 A base de um prisma reto de 8 cm de altura é um quadrado inscrito em um círculo de $6\sqrt{2}$ cm de diâmetro. Determine a área total e o volume desse prisma.

20 Sabe-se que a base de um prisma reto é um hexágono regular cujo apótema mede $6\sqrt{3}$ dm. Se a altura desse prisma mede 20 dm, determine sua área total e seu volume.

21 Um artesão vende porta-joias que têm a forma de prismas heptagonais regulares. Ele oferece aos clientes a opção de revestimento de toda a superfície lateral do porta-joias com resina e, por esse serviço, cobra sobre o preço marcado um adicional de R$ 0,15 por centímetro quadrado de superfície revestida. Mafalda comprou um desses porta-joias e optou por fazer tal revestimento. Então, se o porta-joias que ela comprou tinha 4 cm de altura e a aresta da base media 3 cm, que quantia adicional ela pagou?

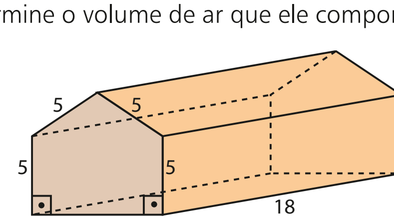
22 Um prisma hexagonal regular tem $192\sqrt{3}$ m³ de volume e a área de sua superfície lateral é igual a 192 m². Determine a medida do lado do hexágono e a altura do prisma.

23 Sabe-se que a base de um prisma é um triângulo equilátero com 12 dm de perímetro e que a medida de sua altura é igual a $\frac{5}{2}$ da medida da altura da base. Relativamente a esse prisma, determine:

a) a área total; **b)** o volume.

24 Um prisma hexagonal regular é tal que a área da base está para a área lateral assim como 1 está para 3. Determine a área lateral e o volume desse prisma, sabendo que ele tem 18 cm de altura.

25 A figura representa um galpão com o formato de um prisma reto de base pentagonal, em que a unidade das medidas indicadas é o metro. Considerando que esse galpão tem 18 m de comprimento, determine o volume de ar que ele comporta.



Pirâmide

O desenvolvimento da Geometria pode ter sido estimulado por necessidades práticas de demarcação de terras, de construção de edifícios ou por sentimentos estéticos das artes em geral.

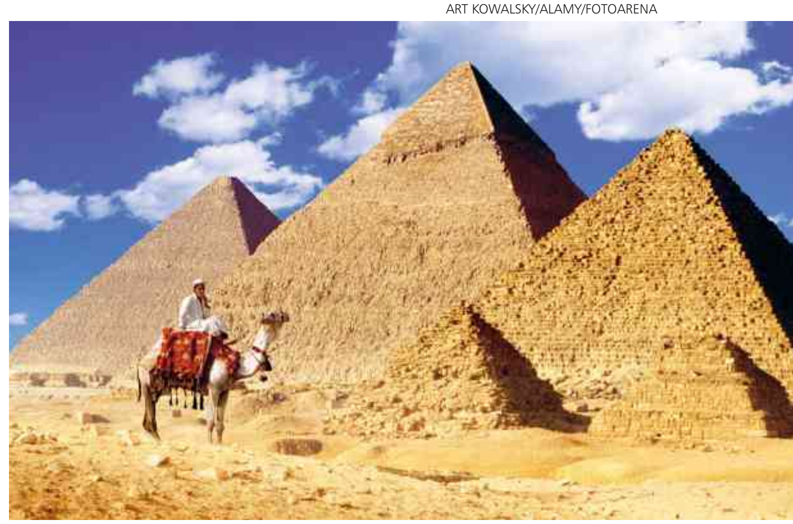
Esse senso estético parece ter sido altamente desenvolvido entre os egípcios, como mostram registros de construções de pirâmides (aproximadamente 5000 a.C.), destinadas a servir de túmulo para o faraó e sua família, bem como guardar seus tesouros.

Para os egípcios, as pirâmides representavam os raios do sol brilhando em direção à Terra. Todas elas foram construídas na margem oeste do rio Nilo, na direção do sol poente.

Entre as inúmeras pirâmides construídas no antigo império egípcio, destacam-se três: a de Quéops (conhecida como Grande Pirâmide de Gizé), a de Quéfren e a de Miquerinos — conhecidas também como Pirâmides de Gizé —, mostradas na foto ao lado.

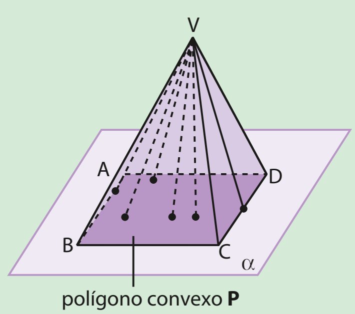
Atualmente, a Grande Pirâmide de Gizé, além de ser Patrimônio Mundial da Unesco, ocupa o primeiro lugar na lista das sete maravilhas do mundo antigo.

ART KOWALSKY/ALAMY/FOTOARENA



A Grande Pirâmide de Gizé, ao centro, tem mais de 4 500 anos. É a única maravilha do mundo antigo que resistiu até hoje às intempéries. Egito, 2004.

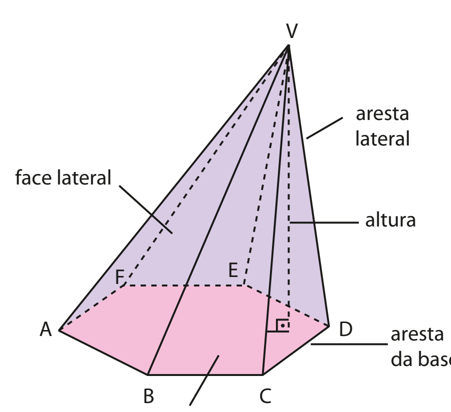
Dados um polígono convexo **P** contido em um plano α e um ponto **V** não pertencente a α, tracemos todos os possíveis segmentos de reta que têm uma extremidade em **V** e a outra num ponto do polígono. A reunião desses segmentos é um sólido chamado **pirâmide**.



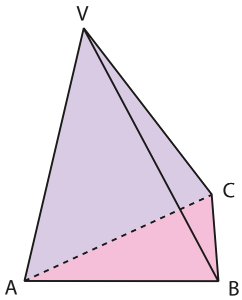
Elementos e classificação

Na pirâmide VABCDEF, representada ao lado, temos que:

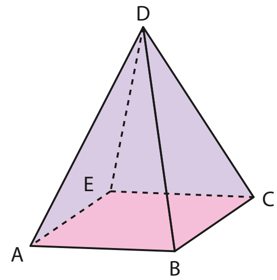
- o ponto **V** é o **vértice** da pirâmide.
- o polígono ABCDEF é a **base** da pirâmide.
- os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ e $\overline{FA}$ são as **arestas da base**.
- os segmentos $\overline{VA}$, $\overline{VB}$, $\overline{VC}$, $\overline{VD}$, $\overline{VE}$ e $\overline{VF}$ são as **arestas laterais**.
- os triângulos VAB, VBC, VCD, VDE, VEF e VFA são as **faces laterais**.
- a distância de **V** ao plano da base é a **altura** da pirâmide.



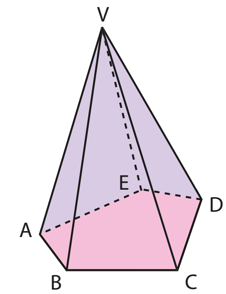
As pirâmides podem ser classificadas de acordo com o polígono da base. Por exemplo:



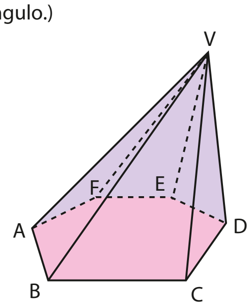
pirâmide triangular
(A base é um triângulo.)



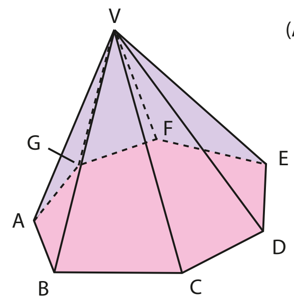
pirâmide quadrangular
(A base é um quadrilátero.)



pirâmide pentagonal
(A base é um pentágono.)



pirâmide hexagonal
(A base é um hexágono.)



pirâmide heptagonal
(A base é um heptágono.)

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

26 Em cada caso, identifique a pirâmide que possui:

a) 5 faces
b) 10 faces
c) 6 arestas
d) 16 arestas

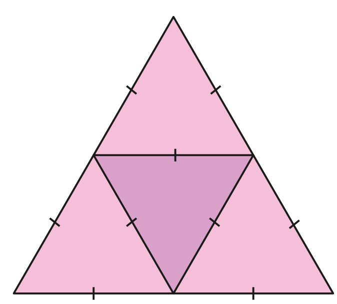
27 Determine o número de vértices, de arestas e de faces de uma pirâmide cuja base é um polígono convexo de 11 lados.

28 Em cada caso, indique a classificação da pirâmide, sabendo que a soma dos ângulos de suas faces é igual a:

a) 20 retos
b) 56 retos

Sugestão: A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo de **n** lados é dada por $(n - 2) \cdot 180°$.

29 A figura seguinte representa a planificação da superfície de uma pirâmide:



Qual é o número de vértices, faces e arestas da pirâmide?

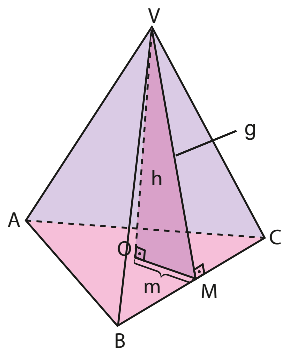
Pirâmide regular

A **pirâmide regular** é aquela cuja base é um polígono regular e cujas arestas laterais são congruentes entre si.

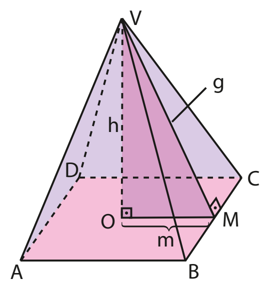
Uma pirâmide regular tem as seguintes características:

- a projeção ortogonal do vértice sobre o plano da base é o centro da base;
- as faces laterais são triângulos isósceles congruentes;
- o apótema da pirâmide regular é a altura de uma face lateral, relativa à aresta da base.

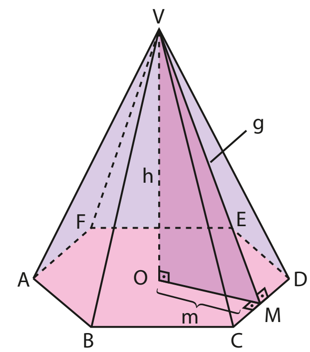
Vejamos essas características indicadas nas pirâmides regulares abaixo representadas, nas quais **h** e **g** são as respectivas medidas da altura e do apótema da pirâmide e **m** é a medida do apótema da base.



pirâmide triangular regular
(A base é um triângulo equilátero.)



pirâmide quadrangular regular
(A base é um quadrado.)



pirâmide hexagonal regular
(A base é um hexágono regular.)

Note que, em toda pirâmide regular, vale, pelo teorema de Pitágoras, a relação notável:

$$g^2 = h^2 + m^2$$

Áreas e volume

Área da base (A_b)

Como a superfície da base de uma pirâmide é um polígono, então:

$$A_b = \text{área do polígono da base}$$

Área lateral (A_ℓ)

Como a superfície lateral de uma pirâmide é a reunião das suas faces laterais (triângulos), então:

$$A_\ell = \text{soma das áreas das faces laterais}$$

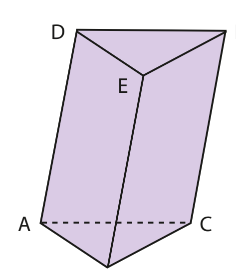
Área total (A_t)

A superfície total de uma pirâmide é a reunião do polígono de sua base com os triângulos que compõem sua superfície lateral. Logo, a área total da pirâmide é a soma da área do polígono de sua base com a área de sua superfície lateral, ou seja:

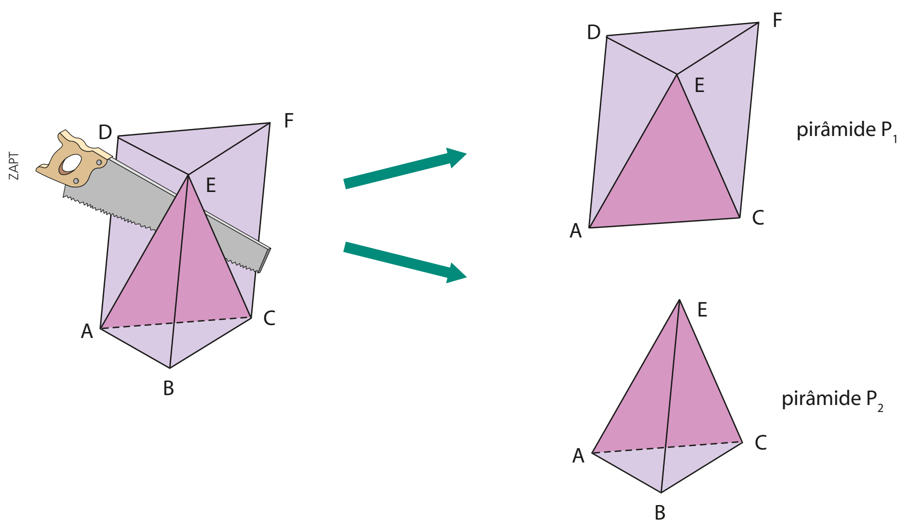
$$A_t = A_b + A_\ell$$

Volume (V)

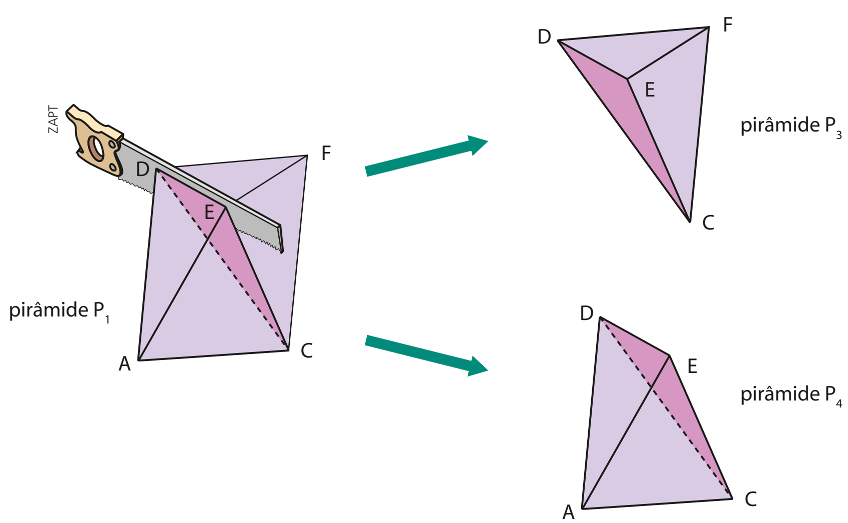
Primeiramente determinemos o volume de uma pirâmide triangular e, para tal, consideremos o prisma triangular da figura ao lado, cuja base tem área $\mathbf{A_b}$ e cuja medida da altura é **h**.



Secionando esse prisma pelo plano (ACE), obtemos uma pirâmide quadrangular $\mathbf{P_1}$ e uma pirâmide triangular $\mathbf{P_2}$, de base ABC e altura de medida **h**.



Secionando $\mathbf{P_1}$ pelo plano (CDE), obtemos duas pirâmides triangulares: $\mathbf{P_3}$, de vértice **F** e base DEC (ou de vértice **C** e base DEF), e $\mathbf{P_4}$, de vértice **A** e base DEC.



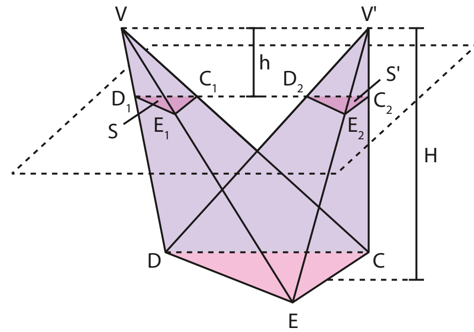
Note que:

- $\mathbf{P_2}$ e $\mathbf{P_3}$ são pirâmides de bases equivalentes ($\triangle$ABC e $\triangle$DEF) e mesma altura.
- $\mathbf{P_3}$ e $\mathbf{P_4}$ são pirâmides que têm o $\triangle$DEC como base comum e mesma altura, pois as distâncias de seus respectivos vértices (**F** e **A**) ao plano da base são iguais.

Para obter o volume dessas pirâmides triangulares vamos, de maneira introdutória, mostrar o seguinte teorema:

Duas pirâmides de mesma base e mesma altura têm o mesmo volume.

Demonstração:



Consideremos as pirâmides **P** e **P'**, de base comum DEC e vértices **V** e **V'**, ambas com altura de medida **H**.

Um plano paralelo ao plano da base (DEC) e distando **h** dos vértices **V** e **V'** determina em **P** e **P'** as seções **S** e **S'**, respectivamente, conforme mostrado na figura.

Se **A** é a área da base DEC, $\mathbf{A_1}$ a área da seção **S** e $\mathbf{A_2}$ a área da seção **S'**, considerando a semelhança entre os triângulos DEC e $D_1E_1C_1$ e entre os triângulos DEC e $D_2E_2C_2$, temos:

$$\frac{h}{H} = k \text{ (razão de semelhança)} \Rightarrow \frac{A_1}{A} = k^2 = \frac{A_2}{A} \Rightarrow A_1 = A_2$$

Logo, pelo princípio de Cavalieri, podemos concluir que: $V_P = V_{P'}$

Agora, de modo semelhante, podemos mostrar que $V_{P_2} = V_{P_3}$ e $V_{P_3} = V_{P_4}$, então:

$$V_{P_2} = V_{P_3} = V_{P_4}$$

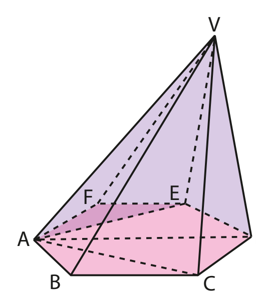
Fazendo $V_{P_2} = V_{P_3} = V_{P_4} = V$ e considerando que o prisma ABCDEF é a reunião das pirâmides $\mathbf{P_2}$, $\mathbf{P_3}$ e $\mathbf{P_4}$, o seu volume $(A_b \cdot h)$ é tal que:

$$A_b \cdot h = V + V + V \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$$

Portanto, concluímos, para pirâmides triangulares, a validade do seguinte teorema:

O volume de uma pirâmide é igual a $\frac{1}{3}$ do produto da área da base pela medida da altura.

Para estender o resultado obtido, observe na figura ao lado que uma pirâmide pode ser dividida em pirâmides triangulares que têm a mesma altura que a pirâmide original. Assim, no exemplo da figura, temos a seguinte divisão: pirâmides de vértice **V** cujas bases são os triângulos AFE, AED, ADC e ACB.



Considerando todas as diagonais do polígono da base, traçadas por um único de seus vértices, note que a divisão da pirâmide original em pirâmides triangulares fica definida por um plano determinado por cada uma dessas diagonais e pelo vértice da pirâmide.

Seja, agora, uma pirâmide qualquer cuja base é um polígono de **n** lados e, de um mesmo vértice deste polígono, tracemos todas as possíveis diagonais que o dividem em (n − 2) triângulos. Nesse caso, obteríamos (n − 2) pirâmides triangulares de mesma altura que a pirâmide original e com áreas da base $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, ..., $\mathbf{A_{n-2}}$.

Como o volume **V** da pirâmide original é a soma dos volumes dessas (n − 2) pirâmides triangulares, temos:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_1 \cdot h + \frac{1}{3} \cdot A_2 \cdot h + \ldots + \frac{1}{3} \cdot A_{n-2} \cdot h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot (A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-2}) \cdot h$$

ou seja, de modo geral, temos:

$$\boxed{V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h}$$

O volume de uma pirâmide é igual a $\frac{1}{3}$ do produto da área da base pela medida da altura.

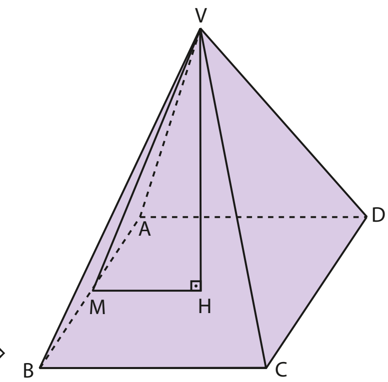
EXEMPLO 5

Quando a pirâmide de Quéops terminou de ser construída tinha 146 m de altura e a aresta da base media 233 m. Atualmente, devido à erosão, sua altura é de cerca de 136 m, e a aresta da base mede 230 m. Admitindo-se que essa pirâmide é quadrangular regular, vamos determinar:

a) A área total de sua superfície, ao final da construção:

A área da base é: $A_b = (AB)^2 = (233 \text{ m})^2 \Rightarrow A_b = 54\,289 \text{ m}^2$

A área lateral, $\mathbf{A}_\ell$, é a soma das áreas de quatro triângulos isósceles congruentes, um dos quais é o triângulo AVB, de base AB = 233 m e altura $\overline{VM}$.



Como o $\triangle$VMH é retângulo, temos:

$$(VH)^2 + (MH)^2 = (VM)^2 \Rightarrow (146)^2 + \left(\frac{233}{2}\right)^2 = (VM)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow VM \simeq 186{,}78 \text{ m}$$

Assim, $A_\ell = 4 \cdot A_{\triangle AVB} = 4 \cdot \dfrac{(AB) \cdot (VM)}{2} = 2 \cdot (233 \text{ m}) \cdot (186{,}78 \text{ m}) \Rightarrow$

$\Rightarrow A_\ell \simeq 87\,039{,}48 \text{ m}^2$

Logo, a área total da superfície da pirâmide é: $A_t = A_b + A_\ell \simeq 54\,289 \text{ m}^2 + 87\,039{,}48 \text{ m}^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow A_t \simeq 141\,328{,}48 \text{ m}^2$

b) O quanto diminuiu seu volume, do final da construção até os dias de hoje:

$\mathbf{V}_1$: volume da pirâmide ao ser construída $\Rightarrow V_1 = \dfrac{1}{3} \cdot (233 \text{ m})^2 \cdot (146 \text{ m}) \Rightarrow$
$\Rightarrow V_1 \simeq 2\,642\,064{,}67 \text{ m}^3$

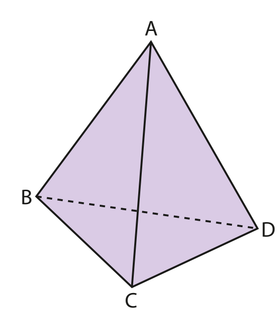
$\mathbf{V}_2$: volume atual da pirâmide $\Rightarrow V_2 = \dfrac{1}{3} \cdot (230 \text{ m})^2 \cdot (136 \text{ m}) \Rightarrow V_2 \simeq 2\,398\,133{,}33 \text{ m}^3$

Logo, o volume da pirâmide original diminuiu 243 931,34 m³ (diferença entre $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_2$).

Tetraedro regular

Chama-se **tetraedro** toda pirâmide de base triangular.

Se as quatro faces de um tetraedro são triângulos equiláteros congruentes, ele é chamado **tetraedro regular**.



Observe que, em um tetraedro regular:

- as seis arestas são congruentes, ou seja, AB = AC = AD = BC = CD = DB.
- qualquer face — ABC, ACD, ABD ou BCD — pode ser considerada como base, já que são triângulos equiláteros congruentes.

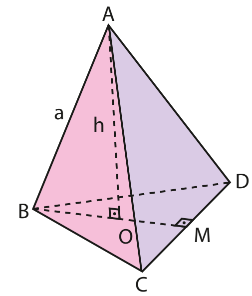
Vejamos como obter a área total $\mathbf{A}_t$, a medida **h** da altura e o volume **V** de um tetraedro regular cuja aresta mede **a**.

Área total (A_t)

A superfície total de um tetraedro é a reunião das superfícies de quatro triângulos equiláteros congruentes. Assim, considerando que a medida das arestas do tetraedro é **a**, então sua área total é quatro vezes a área de um triângulo equilátero cujo lado mede **a**.

Logo: $A_t = 4 \cdot A_{face} \Rightarrow A_t = 4 \cdot \left(\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\right) \Rightarrow \boxed{A_t = a^2 \cdot \sqrt{3}}$

Altura (h)



Para calcularmos **h**, medida da altura de um tetraedro regular, consideremos o ponto **O**, projeção ortogonal do vértice **A** sobre o plano (BCD) da base, como mostra a figura.

Observe que o triângulo AOB é retângulo; então, pelo teorema de Pitágoras, temos:

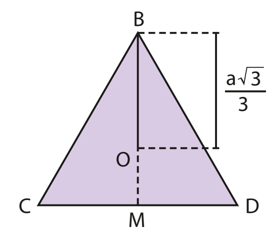
$$(AB)^2 = (AO)^2 + (OB)^2 \quad (1)$$

Como AB = a, AO = h e OB = $\frac{2}{3}$BM ($\overline{BM}$: altura do triângulo equilátero BCD), temos:

$$OB = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OB = \frac{a\sqrt{3}}{3} \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1): $a^2 = h^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 \Rightarrow h^2 = a^2 - \frac{3a^2}{9} \Rightarrow$

$$\Rightarrow h^2 = \frac{6a^2}{9} \Rightarrow \boxed{h = \frac{a \cdot \sqrt{6}}{3}}$$



Volume (V)

Como $\begin{cases} A_b\text{: área de uma face (triângulo equilátero)} \Rightarrow A_b = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \\ \text{e} \\ h = \frac{a\sqrt{6}}{3} \end{cases}$

temos:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \boxed{V = \frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{12}}$$

EXEMPLO 6

Dado um tetraedro regular cuja aresta mede 4 cm, vamos determinar a área total de sua superfície e o seu volume.

Acompanhe:

- A superfície total do tetraedro é a reunião de quatro triângulos equiláteros congruentes. Assim:

$$A_t = 4 \cdot \left(\frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4}\right) \Rightarrow A_t = 4^2 \cdot \sqrt{3} \Rightarrow A_t = 16\sqrt{3}$$

  A área da superfície desse tetraedro regular é $16\sqrt{3}$ cm².

- Como o volume do tetraedro cuja aresta mede **a** é dado por $V = \frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{12}$, temos:

$$V = \frac{4^3 \cdot \sqrt{2}}{12} \Rightarrow V = \frac{16\sqrt{2}}{3}$$

  Logo, o volume desse tetraedro é $\frac{16\sqrt{2}}{3}$ cm³.

PENSE NISTO:

Toda pirâmide triangular regular é um tetraedro regular?

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

5 Considere uma pirâmide regular hexagonal que tem 18 dm de altura e cuja aresta da base mede $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ dm. Para essa pirâmide, determine: a medida do apótema (**g**); a medida do apótema da base (**m**); a medida da aresta lateral (**a**); a área da base (**A_b**); a área lateral (**A_ℓ**); a área total (**A_t**); o volume (**V**).

Solução:

São dados: h = 18 dm e $\ell = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ dm.

Para auxiliar na resolução do problema, vamos considerar os seguintes esboços gráficos:

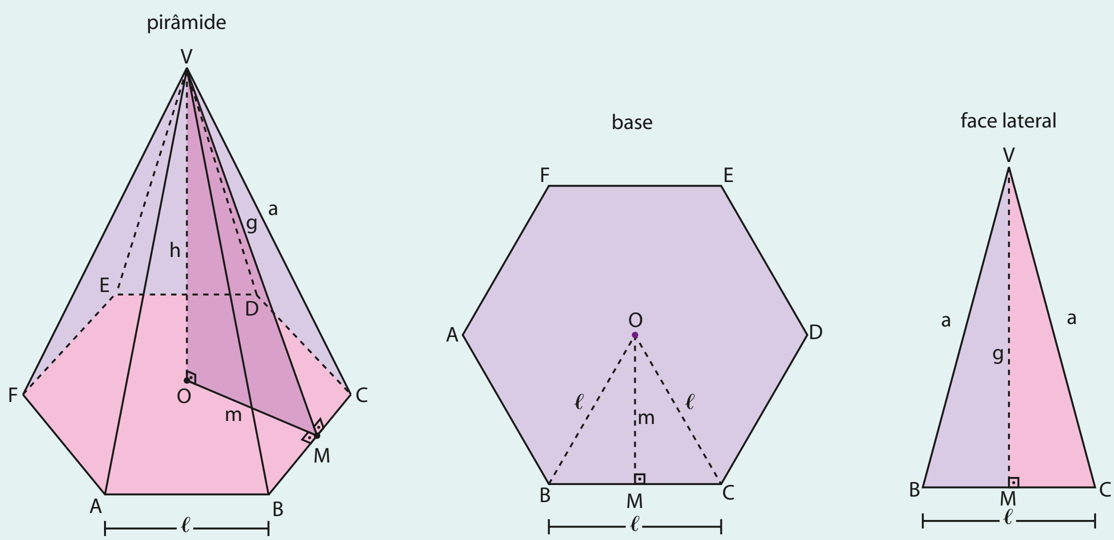


figura 1 figura 2 figura 3

Observe, na figura 2, que o apótema da base coincide com a altura de um triângulo equilátero. Logo:

$$m = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow m = \frac{8\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow m = 4 \text{ dm}$$

- Observe, na figura 3, que o apótema da pirâmide é a altura do triângulo isósceles (relativa ao lado $\overline{BC}$) da face lateral. Como o triângulo VOM é retângulo em **O** (figura 1), temos:

$$g^2 = h^2 + m^2 \Rightarrow g^2 = 18^2 + 4^2 = 340 \Rightarrow g = 2\sqrt{85} \text{ dm}$$

- Na figura 3, pode-se ver que a aresta lateral é a hipotenusa do triângulo retângulo VMC. Logo:

$$a^2 = g^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow a^2 = 340 + \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{1\,036}{3} \Rightarrow a = \frac{2\sqrt{777}}{3} \text{ dm}$$

- Como a superfície da base da pirâmide é a reunião de seis triângulos equiláteros congruentes, temos:

$$A_b = 6 \cdot \left(\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}\right) \Rightarrow A_b = 6 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)^2 \cdot \sqrt{3} \Rightarrow A_b = 32\sqrt{3} \text{ dm}^2$$

- Como a superfície lateral da pirâmide é a reunião de seis triângulos isósceles congruentes (veja a figura 3), temos:

$$A_\ell = 6 \cdot \left(\frac{\ell \cdot g}{2}\right) \Rightarrow A_\ell = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{8\sqrt{3}}{3} \cdot 2\sqrt{85} \Rightarrow A_\ell = 16\sqrt{255} \text{ dm}^2$$

- A área total é a soma da área da base com a área lateral:

$$A_t = A_b + A_\ell \Rightarrow A_t = 32\sqrt{3} + 16\sqrt{255} \Rightarrow A_t = 16\sqrt{3}\left(2 + \sqrt{85}\right)\ \text{dm}^2$$

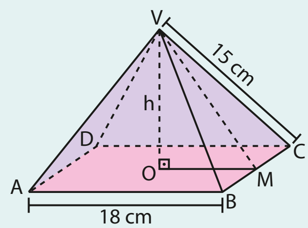
- Como o volume é dado por $V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$, temos:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 32\sqrt{3} \cdot 18 \Rightarrow V = 192\sqrt{3}\ \text{dm}^3$$

6 Determine a área total e o volume de uma pirâmide regular de base quadrada, sabendo que as medidas das arestas laterais e da base são 15 cm e 18 cm, respectivamente.

Solução:

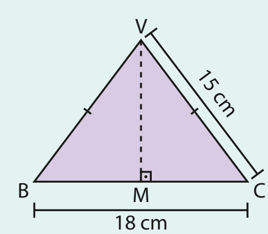
Considere que a figura abaixo é a representação da pirâmide a que se refere o problema.



- A área total da superfície dessa pirâmide é a soma da área da base, que é um quadrado de 18 cm de lado, com as áreas de quatro triângulos isósceles congruentes. Assim, temos:

  Área da base: $A_b = \ell^2 \Rightarrow A_b = 18^2 \Rightarrow A_b = 324\ \text{cm}^2$

  Área lateral: Para calcular a área lateral da pirâmide (**A_ℓ**), devemos primeiro determinar a área **A_1** do triângulo VBC, cujo esquema está representado ao lado. Assim, temos:



  $\triangle$VMC é retângulo $\Rightarrow (VC)^2 = (VM)^2 + (MC)^2 \Rightarrow (VM)^2 = 15^2 - \left(\frac{18}{2}\right)^2 = 144 \Rightarrow$

  $\Rightarrow VM = 12$ cm

  Como $A_1 = \frac{(BC) \cdot (VM)}{2} = \frac{18 \cdot 12}{2} \Rightarrow A_1 = 108\ \text{cm}^2$

  Temos: $A_\ell = 4 \cdot A_1 \Rightarrow A_\ell = 4 \cdot 108 \Rightarrow A_\ell = 432\ \text{cm}^2$

  Então: $A_t = A_b + A_\ell = 324 + 432 \Rightarrow A_t = 756\ \text{cm}^2$

  Logo, a área total da pirâmide é 756 cm².

- Para calcular o volume **V** da pirâmide, devemos determinar **h**, medida de sua altura, já que $V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$.

  Pelo teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo retângulo VOM, temos:

$$12^2 = h^2 + \left(\frac{18}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = 144 - 81 \Rightarrow h = 3\sqrt{7}\ \text{cm}$$

  Então: $V = \frac{1}{3} \cdot 324 \cdot 3\sqrt{7} \Rightarrow V = 324\sqrt{7}\ \text{cm}^3$

  Logo, o volume da pirâmide é $324\sqrt{7}$ cm³.

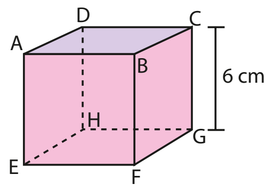
PENSE NISTO:

Como você calcularia a medida **h** usando o triângulo VOB?

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

30 Considere o cubo representado na figura e calcule o volume das pirâmides:



a) de vértice **D** e base EFGH;

b) de vértice **A** e base FGH.

31 A base de uma pirâmide de 6 cm de altura é um quadrado de 8 cm de perímetro. Calcule o seu volume.

32 Calcule o volume de uma pirâmide de 12 m de altura, sendo a base um losango cujas diagonais medem 6 m e 10 m.

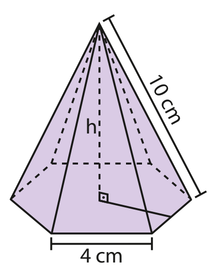
33 O perímetro da base de um tetraedro regular é 12 cm. Determine:

a) a área total do tetraedro;

b) a medida de sua altura;

c) o volume do tetraedro.

34 Calcule a área lateral, a área total e o volume da pirâmide regular, cujas dimensões estão indicadas na figura ao lado.

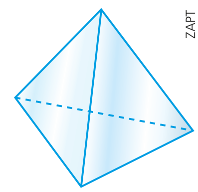


35 A base de uma pirâmide de 8 m de altura é um hexágono regular cujo apótema mede $2\sqrt{3}$ m. Determine o volume dessa pirâmide.

36 Determine o volume da pirâmide quadrangular regular cuja aresta da base mede $6\sqrt{2}$ cm e a aresta lateral mede 10 cm.

37 Calcule o volume de uma pirâmide hexagonal regular, sendo 24 cm o perímetro da base e 30 cm a soma dos comprimentos de todas as arestas laterais.

38 Um peso maciço de papel é feito de vidro e tem a forma de um tetraedro regular cuja aresta mede 6 cm. Sabendo que a densidade do vidro é 2,6 g/cm³, qual é a massa desse peso de papel? Use $\sqrt{2} \simeq 1,4$.



39 (UF-PE) Na ilustração a seguir, temos uma pirâmide hexagonal regular com altura igual ao lado da base e volume $4\sqrt{3}$ cm³. Qual é a área total da superfície dessa pirâmide?

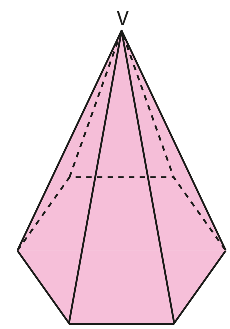
a) $7(\sqrt{3} + \sqrt{7})$ cm²

b) $6(\sqrt{3} + \sqrt{7})$ cm²

c) $5(\sqrt{3} + \sqrt{7})$ cm²

d) $4(\sqrt{3} + \sqrt{7})$ cm²

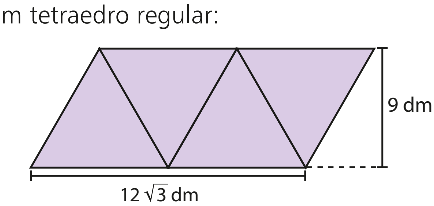
e) $3(\sqrt{3} + \sqrt{7})$ cm²



40 Determine o volume de uma pirâmide regular quadrangular, sabendo que o apótema da base mede 6 cm e o apótema da pirâmide mede $6\sqrt{2}$ cm.

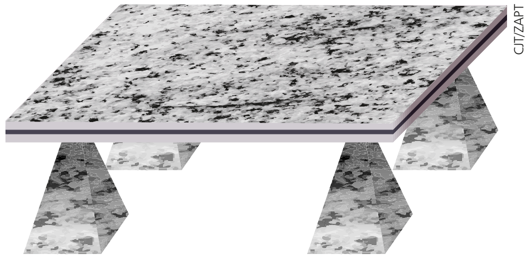
41 Sabe-se que a área da base de uma pirâmide é igual à área da base de um prisma e que o volume do prisma é igual ao quíntuplo do volume da pirâmide. Nessas condições, a medida da altura da pirâmide é igual a que porcentagem da medida da altura do prisma?

42 Na figura abaixo tem-se a planificação da superfície de um tetraedro regular:



Determine a área total, a altura e o volume desse tetraedro.

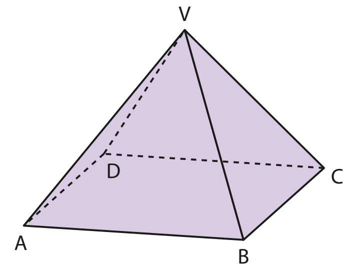
43 O tampo da mesa mostrada na figura a seguir apoia-se em quatro pirâmides regulares quadrangulares, feitas de granito. Se a área lateral de cada pirâmide é 0,28 m² e o lado do quadrado da base mede 0,20 m, calcule o volume de granito das estruturas das quatro pirâmides.



Elementos sem proporção entre si.

44 Saulo comprou uma barraca de lona para acampar. Sabendo que, quando montada, ela tem a forma de uma pirâmide quadrangular regular de 2 m de altura e que a área de sua superfície lateral é 15 m², determine o volume de ar que essa barraca comporta.

45 (UF-PR) Na figura a seguir, está representada uma pirâmide de base quadrada que tem todas as arestas com o mesmo comprimento.



a) Sabendo que o perímetro do triângulo DBV é igual a $6 + 3\sqrt{2}$, qual é a altura da pirâmide?

b) Qual é o volume e a área total da pirâmide?

46 Pretende-se construir uma escultura de concreto, de forma piramidal regular, na qual a aresta da base quadrangular meça 6 m e a aresta lateral meça $3\sqrt{5}$ m. Determine:

a) a área total da superfície da escultura;

b) o volume da escultura;

c) a medida do ângulo α, cujos lados são o apótema da pirâmide e o apótema da base.

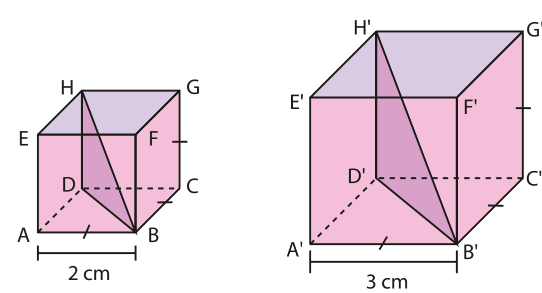
Sólidos semelhantes

- 1ª situação:

Observe os cubos 1 e 2, representados nas figuras ao lado.

A razão entre as medidas das arestas de 1 e 2, nessa ordem, é: $\dfrac{2 \text{ cm}}{3 \text{ cm}} = \dfrac{2}{3}$.

A razão entre as medidas das diagonais das bases de 1 e 2, nessa ordem, é:



cubo 1

cubo 2

$$\frac{DB}{D'B'} = \frac{2\sqrt{2} \text{ cm}}{3\sqrt{2} \text{ cm}} = \frac{2}{3}$$

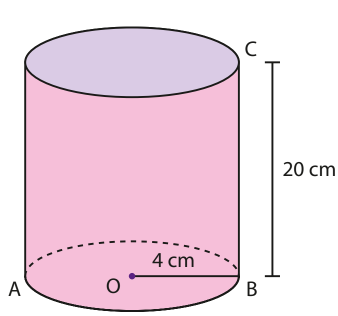
A razão entre as medidas das diagonais de 1 e 2, nessa ordem, é:

$$\frac{HB}{H'B'} = \frac{2\sqrt{3} \text{ cm}}{3\sqrt{3} \text{ cm}} = \frac{2}{3}$$

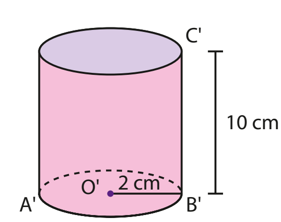
Dizemos que o cubo 2 é uma "ampliação" do cubo 1.

- 2ª situação:

As figuras ao lado representam duas latas de óleo de soja, comercializadas num supermercado. Ambas têm a mesma forma cilíndrica. Note que **O** e **O**' são os centros dos círculos das bases.



lata I



lata II

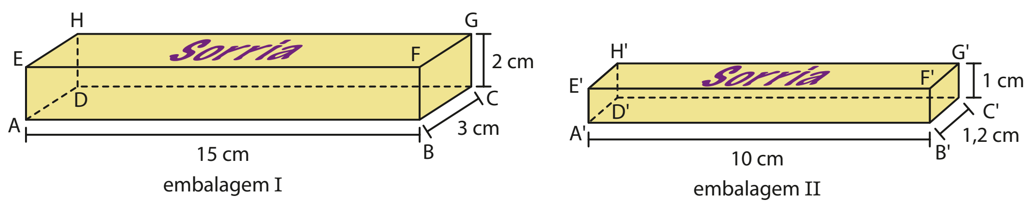
Vamos calcular a razão entre as medidas de um segmento da lata I e o correspondente segmento na lata II:

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{20\text{ cm}}{10\text{ cm}} = 2; \quad \frac{OB}{O'B'} = \frac{4\text{ cm}}{2\text{ cm}} = 2; \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{8\text{ cm}}{4\text{ cm}} = 2$$

Dizemos que a lata II é uma "redução" da lata I.

- 3ª situação:

  Veja agora as representações de duas embalagens do creme dental "Sorria", ambas em forma de paralelepípedo retorretângulo:



Vamos calcular a razão entre uma dimensão da embalagem I e a dimensão correspondente da embalagem II:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{15\text{ cm}}{10\text{ cm}} = \frac{3}{2}; \quad \frac{BC}{B'C'} = \frac{3\text{ cm}}{1{,}2\text{ cm}} = \frac{3}{\frac{6}{5}} = \frac{5}{2}; \quad \frac{CG}{C'G'} = \frac{2\text{ cm}}{1\text{ cm}} = 2$$

Embora as duas embalagens sejam parecidas, as razões obtidas não são iguais! A embalagem II não é uma "redução" da embalagem I.

Os sólidos representados na 1ª e na 2ª situações são semelhantes, mas as duas caixas representadas na 3ª situação não são semelhantes.

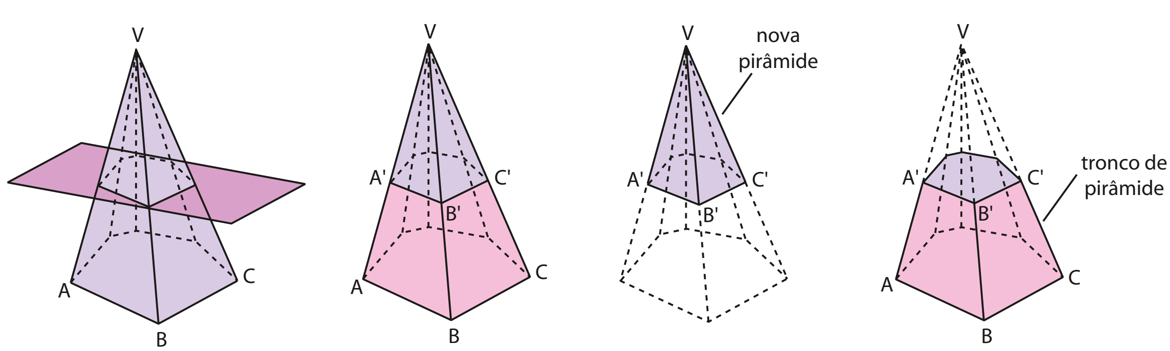
PENSE NISTO:

Duas esferas quaisquer são semelhantes?
E duas pirâmides regulares de bases quadradas?

Pirâmides semelhantes

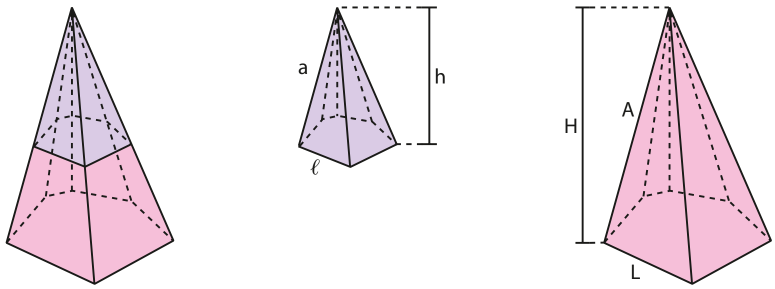
Quando secionamos uma pirâmide por um plano paralelo à base de modo que este plano não contenha o vértice da pirâmide, ela fica dividida em dois sólidos:

- o que contém o vértice, que é uma nova pirâmide; e
- o que contém a base da pirâmide dada, que é um tronco de pirâmide de bases paralelas.



Os troncos de pirâmides serão estudados na próxima seção deste capítulo.

Vamos agora comparar a pirâmide obtida da seção e a pirâmide "primitiva" (ou original).



Temos:

- os polígonos das bases têm o mesmo número de lados (veja, nesse exemplo, que ambas são pirâmides hexagonais);
- os ângulos dos polígonos de duas faces homólogas são congruentes dois a dois;
- os elementos lineares homólogos (como arestas das bases, arestas laterais, alturas etc.) são proporcionais.

A nova pirâmide é uma "cópia reduzida" da pirâmide "primitiva". As duas pirâmides são semelhantes.

A razão **k** entre dois elementos lineares homólogos — arestas ou alturas — é chamada **razão de semelhança** entre as pirâmides. Escolhendo, por exemplo, escrever a razão de semelhança entre a pirâmide obtida da seção e a "primitiva", nesta ordem, temos:

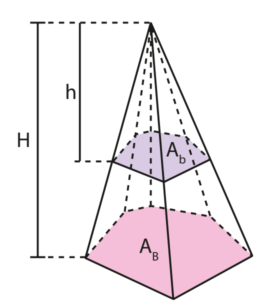
$$\boxed{\frac{a}{A} = \frac{\ell}{L} = \frac{h}{H} = k}$$

Considerando duas pirâmides regulares semelhantes, temos as seguintes propriedades:

- A razão entre as áreas das bases é igual ao quadrado da razão de semelhança.

  Como as bases são polígonos semelhantes, então $\frac{p}{P}$ e $\frac{x}{X}$, razões entre os respectivos semiperímetros e as medidas dos apótemas das bases homólogas, são tais que: $\frac{p}{P} = \frac{x}{X} = k$

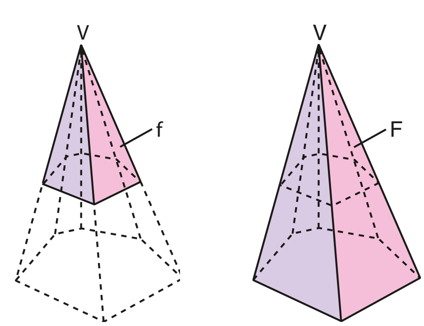
  Assim: $\frac{A_b}{A_B} = \frac{p \cdot x}{P \cdot X} = \frac{p}{P} \cdot \frac{x}{X} = k \cdot k \Rightarrow \boxed{\frac{A_b}{A_B} = k^2}$



- A razão entre as áreas laterais é igual ao quadrado da razão de semelhança.

  Como duas faces laterais homólogas **f** e **F** são triângulos semelhantes, sabemos que a razão entre suas áreas é igual ao quadrado da razão de semelhança $\left(\frac{\text{área f}}{\text{área F}} = k^2\right)$.

  Lembrando que a área lateral de uma pirâmide é igual à soma das áreas de suas faces laterais, temos:



$$\boxed{\frac{A_\ell}{A_L} = k^2} \quad \text{em que: } \begin{cases} \mathbf{A_\ell}\text{: área lateral da nova pirâmide} \\ \mathbf{A_L}\text{: área lateral da pirâmide primitiva} \end{cases}$$

- A razão entre as áreas totais é igual ao quadrado da razão de semelhança.

De fato, como $\dfrac{A_b}{A_B} = k^2$ e $\dfrac{A_\ell}{A_L} = k^2$, decorre $\dfrac{A_b + A_\ell}{A_B + A_L} = k^2$, ou seja:

$$\boxed{\dfrac{A_t}{A_T} = k^2}$$

- A razão entre os volumes é igual ao cubo da razão de semelhança.

Sejam **v** o volume da nova pirâmide e **V** o volume da pirâmide "primitiva" (ou original).

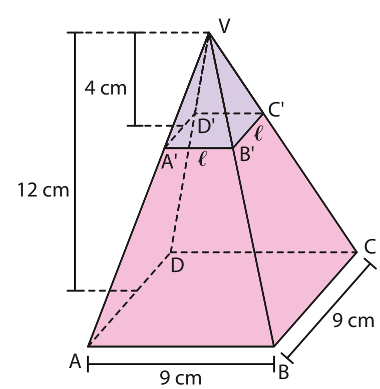
Já vimos que $\dfrac{A_b}{A_B} = k^2$ e $\dfrac{h}{H} = k$.

Vamos obter a razão entre seus volumes:

$$\frac{v}{V} = \frac{\frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h}{\frac{1}{3} \cdot A_B \cdot H} = \frac{A_b}{A_B} \cdot \frac{h}{H} = k^2 \cdot k = k^3 \Rightarrow \boxed{\frac{v}{V} = k^3}$$

EXEMPLO 7

Uma pirâmide quadrangular regular é secionada por um plano paralelo à base, a 4 cm do vértice. A pirâmide tem 12 cm de altura, e sua aresta da base mede 9 cm. A pirâmide VABCD é semelhante à pirâmide VA'B'C'D'. Vamos calcular as áreas das bases e o volume das duas pirâmides e constatar a validade das propriedades estudadas anteriormente.



Observe, inicialmente, que a razão entre os elementos lineares das duas pirâmides pode ser obtida comparando-se suas alturas:

$$k = \frac{h}{H} = \frac{4 \text{ cm}}{12 \text{ cm}} = \frac{1}{3}$$

Se ℓ é a medida do lado do quadrado A'B'C'D', então:

$$\frac{\ell}{9} = \frac{1}{3} \Rightarrow \ell = 3 \text{ cm}$$

A área da base (**A_b**) da pirâmide VA'B'C'D' é $A_b = (3 \text{ cm})^2 = 9 \text{ cm}^2$, e a área da base (**$A_B$**) da pirâmide VABCD é $(9 \text{ cm})^2 = 81 \text{ cm}^2$. Observe que a razão entre **A_b** e **A_B** é: $\dfrac{9 \text{ cm}^2}{81 \text{ cm}^2} = \dfrac{1}{9} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = k^2$.

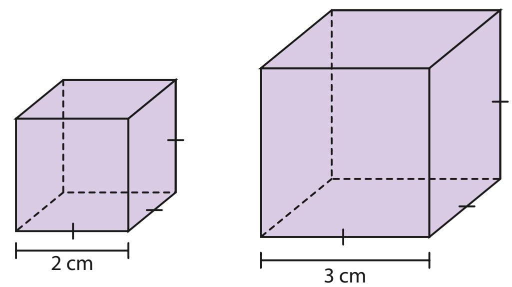
O volume **v** da pirâmide VA'B'C'D' é dado por: $v = \dfrac{A_b \cdot h}{3} = \dfrac{9 \cdot 4}{3} \Rightarrow v = 12 \text{ cm}^3$

Já o volume **V** da pirâmide VABCD é dado por: $V = \dfrac{A_B \cdot H}{3} = \dfrac{81 \cdot 12}{3} \Rightarrow V = 324 \text{ cm}^3$

A razão entre **v** e **V** é: $\dfrac{12 \text{ cm}^3}{324 \text{ cm}^3} = \dfrac{1}{27} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^3 = k^3$

OBSERVAÇÃO

As propriedades estudadas podem ser estendidas para dois sólidos semelhantes quaisquer.
Voltemos aos dois cubos apresentados na introdução do tópico *Sólidos semelhantes*.
Já vimos que a razão de semelhança entre o cubo menor e o maior é $k = \frac{2}{3}$.
A área total do cubo menor é $6 \cdot (2\ \text{cm})^2 = 24\ \text{cm}^2$ e a área total do cubo maior é $6 \cdot (3\ \text{cm})^2 = 54\ \text{cm}^2$.
A razão entre a área do cubo menor e a área do cubo maior é:



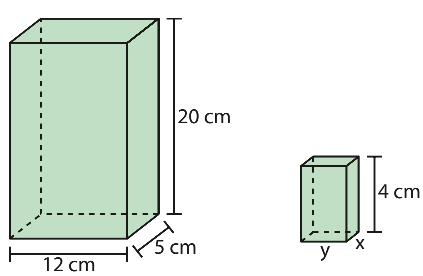
$$\frac{24\ \text{cm}^2}{54\ \text{cm}^2} = \frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = k^2$$

O volume do cubo menor é $(2\ \text{cm})^3 = 8\ \text{cm}^3$ e o volume do cubo maior é $(3\ \text{cm})^3 = 27\ \text{cm}^3$. A razão entre o volume do cubo menor e o volume do cubo maior é $\frac{8\ \text{cm}^3}{27\ \text{cm}^3} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = k^3$.

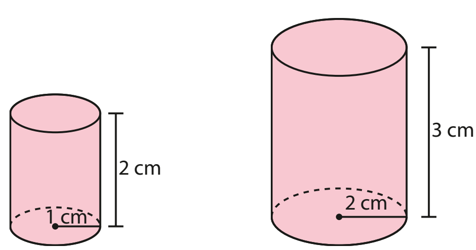
EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

47 Determine os valores de **x** e **y**, a fim de que as caixas seguintes sejam semelhantes:



48 Os cilindros 1 e 2 representados a seguir são semelhantes?



cilindro 1 cilindro 2

49 Uma pequena indústria produz caixas de um único tipo, em forma de paralelepípedo retângulo, com as seguintes dimensões: 2 dm, 5 dm e 7 dm. Sabe-se que, a partir do próximo ano, as caixas serão substituídas por outras semelhantes, de modo que a capacidade de cada uma seja oito vezes a capacidade da anteriormente produzida. Nessas condições, qual será a área total da superfície da nova caixa?

50 Sabe-se que a altura de uma pirâmide mede 20 cm e sua base é um quadrado cujo lado mede 12 cm. Calcule a medida da altura e da aresta da base de uma pirâmide semelhante à primeira cujo volume é igual a $120\ \text{cm}^3$.

51 Uma das arestas de um tetraedro de volume $80\sqrt{3}\ \text{cm}^3$ mede 10 cm. Determine o volume de um tetraedro semelhante ao primeiro, sabendo que a aresta homóloga mede 5 cm.

52 Considere uma pirâmide regular hexagonal, $\mathbf{P_1}$, em que a aresta da base mede 6 dm e cuja altura mede 12 dm. Se uma seção transversal é feita em $\mathbf{P_1}$, a 4 dm de seu vértice, determine:

a) a área da seção transversal;

b) o volume de $\mathbf{P_2}$, pirâmide obtida da seção transversal.

53 A altura de uma pirâmide regular quadrangular é 45 cm. Ela é intersectada, a 15 cm de seu vértice, por um plano paralelo à base, que determina uma nova pirâmide e um tronco de pirâmide. Sabendo que a aresta da base da pirâmide primitiva é 60 cm, determine:

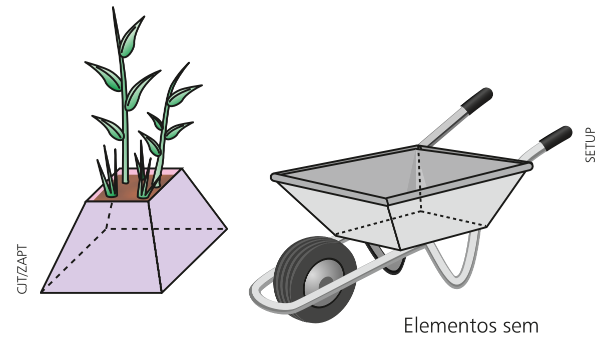
a) a medida da aresta da base da pirâmide obtida;

b) a razão entre as áreas totais da pirâmide primitiva e da pirâmide obtida.

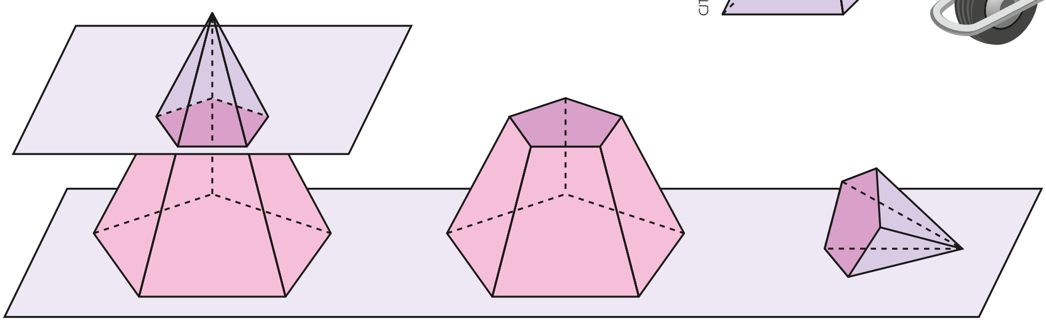
Tronco de pirâmide

Observe o vaso e a caçamba de um carrinho de mão que estão representados nas figuras ao lado.

Elas são obtidas a partir da seção de uma pirâmide por um plano paralelo à sua base. Esses poliedros recebem o nome de **tronco de pirâmide**.

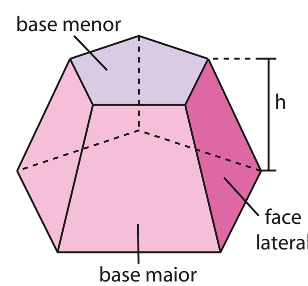


Elementos sem proporção entre si.



Vamos reconhecer os elementos principais de um tronco de pirâmide:

- **base maior do tronco**: é a base da pirâmide "original" ou "primitiva".
- **base menor do tronco**: é a seção determinada pelo plano que intersecta a pirâmide. Essa seção é um polígono semelhante ao da base da pirâmide.
- **altura do tronco (h)**: é a distância entre os planos das bases.
- **faces laterais do tronco**: são as superfícies planas limitadas por trapézios.



Áreas

- **Áreas das bases (A_B e A_b)**

  Área da base maior (**A_B**): é a área do polígono da base maior.

  Área da base menor (**A_b**): é a área de um polígono semelhante ao da base maior.

- **Área lateral (A_ℓ)**

  A área lateral (**A_ℓ**) é a soma das áreas das faces laterais.

- **Área total (A_t)**

  Somando-se as áreas das duas bases com a área lateral, obtém-se a área total:

$$A_t = A_B + A_b + A_\ell$$

Volume

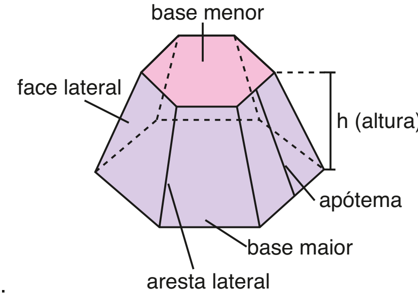
O volume de um tronco de pirâmide pode ser calculado por meio da diferença entre o volume da pirâmide original e o volume da pirâmide obtida a partir da seção.

Tronco de pirâmide regular

O tronco de bases paralelas obtido de uma pirâmide regular é denominado **tronco de pirâmide regular**.

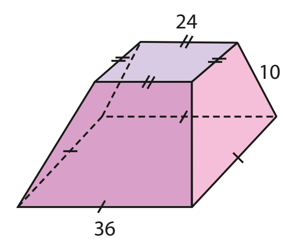
Num tronco de pirâmide regular:

- as **arestas laterais** são congruentes entre si;
- as **bases** são polígonos regulares semelhantes;
- as **faces laterais** são trapézios isósceles congruentes entre si;
- a altura de qualquer face lateral chama-se **apótema do tronco**.



EXEMPLO 8

Vamos calcular a área total e o volume de um tronco de pirâmide regular quadrangular, cujas arestas das bases medem 24 cm e 36 cm e cuja aresta lateral mede 10 cm.



- Área da base menor

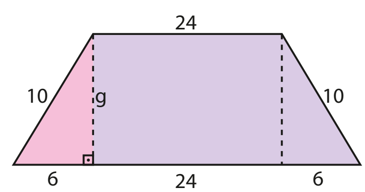
$$A_b = (24 \text{ cm})^2 = 576 \text{ cm}^2$$

- Área da base maior

$$A_B = (36 \text{ cm})^2 = 1\,296 \text{ cm}^2$$

- Área lateral

$$A_\ell = 4 \cdot (\text{área de um trapézio isósceles})$$



g: apótema do tronco (altura do trapézio)

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo destacado, obtemos:

$$10^2 = g^2 + 6^2 \Rightarrow 100 = g^2 + 36 \Rightarrow g = 8 \text{ cm}$$

Assim:

$$A_\ell = 4 \cdot \frac{(36 + 24) \cdot 8}{2} \Rightarrow A_\ell = 960 \text{ cm}^2$$

- Área total

$$A_t = A_\ell + A_b + A_B = 960 \text{ cm}^2 + 576 \text{ cm}^2 + 1\,296 \text{ cm}^2 = 2\,832 \text{ cm}^2$$

Logo, a área total desse tronco de pirâmide é 2 832 cm².

- Volume

Para determinar o volume desse tronco, é necessário conhecer a medida de sua altura (**h**).

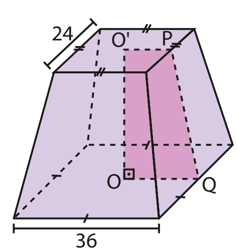
Temos:

O e **O'** são centros das bases;

$\overline{OO'}$ = altura do tronco

No triângulo PP'Q, temos:

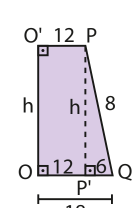
$8^2 = h^2 + 6^2 \Rightarrow h^2 = 28 \Rightarrow h = 2\sqrt{7}$ cm



$$OQ = \frac{36}{2} = 18$$

$$O'P = \frac{24}{2} = 12$$

$$PQ = g = 8$$



Cálculo do volume:

Vamos imaginar a pirâmide que deu origem a esse tronco:

h: medida da altura do tronco

x: medida da altura da pirâmide obtida

x + h: medida da altura da pirâmide original

A razão entre os elementos lineares das duas pirâmides é $\frac{36}{24} = \frac{3}{2}$.

Podemos, então, escrever: $\frac{h + x}{x} = \frac{3}{2} \Rightarrow x = 2h$

mas $h = 2\sqrt{7}$ cm $\Rightarrow x = 4\sqrt{7}$ cm; $h + x = 6\sqrt{7}$ cm

- Volume da pirâmide original:

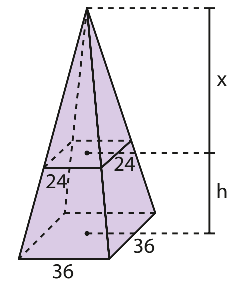
$$V = \frac{1}{3} \cdot 36^2 \cdot 6\sqrt{7} \Rightarrow V = 2\,592\sqrt{7} \text{ cm}^3$$

- Volume da nova pirâmide:

$$V' = \frac{1}{3} \cdot 24^2 \cdot 4\sqrt{7} \Rightarrow V' = 768\sqrt{7} \text{ cm}^3$$

Logo, o volume do tronco é:

$2\,592\sqrt{7}$ cm³ $-$ $768\sqrt{7}$ cm³ $=$ $1\,824\sqrt{7}$ cm³



PENSE NISTO:

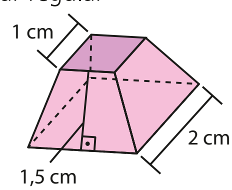
É possível calcular o volume de uma das pirâmides, conhecendo-se o volume da outra?

EXERCÍCIOS

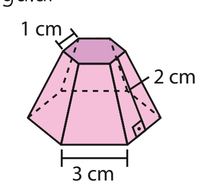
FAÇA NO CADERNO

54 Calcule a área total de cada tronco seguinte:

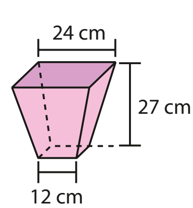
a) quadrangular regular



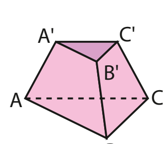
b) hexagonal regular



55 Um vaso tem o formato de um tronco de pirâmide regular de base quadrada, como mostrado na figura. Quantos litros de água são necessários para encher totalmente esse vaso? Considere desprezível sua espessura.



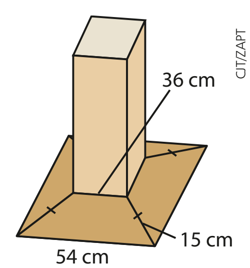
56 A figura mostra um tronco de pirâmide regular em que as bases são triângulos equiláteros cujos lados medem 8 cm e 12 cm. Sabendo que a área lateral do tronco é igual a 180 cm², determine:



a) sua área total;

b) a medida do seu apótema.

57 Um suporte de mesa, feito de madeira maciça, é constituído de um prisma reto cuja base quadrada coincide com a base menor de um tronco de pirâmide regular quadrangular, como mostra a figura. Sabe-se que a altura do prisma é 20 cm.



a) Quantos metros cúbicos de madeira foram usados na confecção desse suporte? Considere $\sqrt{7} \simeq 2,65$.

b) Deseja-se pintar a superfície desse suporte com um material impermeabilizante cujo preço é R\$ 28,00 o litro. Sabendo que cada 1000 cm² necessitam de 400 mL do impermeabilizante, determine o custo aproximado dessa pintura.

58 As bases de um tronco de pirâmide são dois pentágonos regulares cujos lados medem 5 dm e 3 dm, respectivamente. Sendo essas bases paralelas e a medida do apótema do tronco de pirâmide 10 dm, determine a área lateral desse tronco.

59 Calcule o volume de um tronco de pirâmide regular quadrangular de 4 dm de altura e cujas áreas das bases são iguais a 36 dm² e 144 dm².

Complementos sobre poliedros

Poliedros convexos

Observe os sólidos geométricos seguintes. Todos são exemplos de **poliedros**.

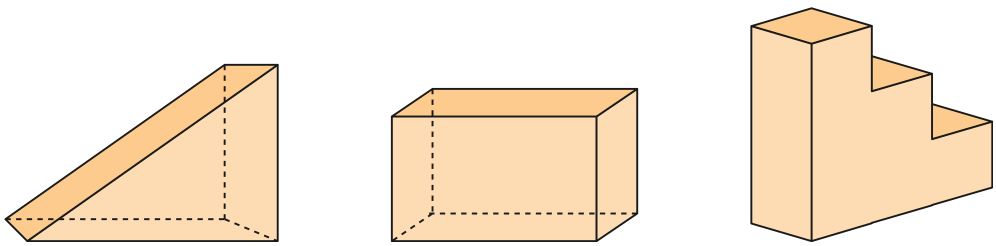


figura 1 figura 2 figura 3

Vamos lembrar que:

- a superfície de cada poliedro é formada por polígonos planos, chamados **faces** do poliedro;
- os lados dos polígonos são chamados **arestas** do poliedro;
- os vértices dos polígonos são os **vértices** do poliedro.

Assim, os poliedros representados nas figuras 1, 2 e 3 são tais que:

- figura 1: tem 5 faces, 9 arestas e 6 vértices;
- figura 2: tem 6 faces, 12 arestas e 8 vértices;
- figura 3: tem 10 faces, 24 arestas e 16 vértices.

Agora veja os mesmos poliedros representados acima, nos quais destacamos os planos α, β e γ que contêm, cada um, uma face de cada poliedro.

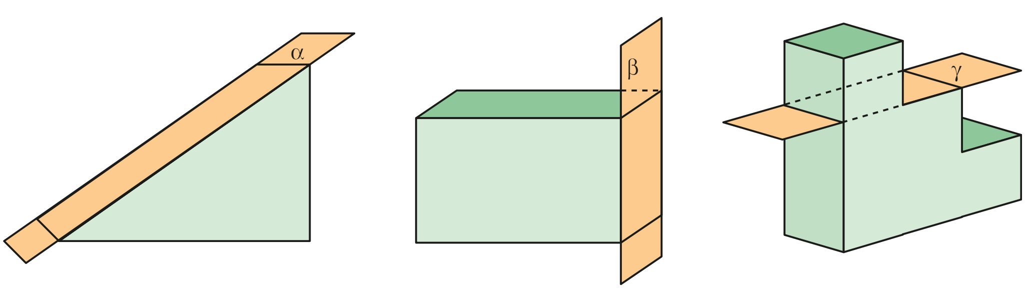


figura 1 figura 2 figura 3

Note que α e β deixam todas as outras faces dos poliedros em um mesmo semiespaço e que isso não ocorre com γ, que deixa algumas faces em semiespaços opostos.

Nos poliedros das figuras 1 e 2, qualquer plano que contenha uma face deixa as demais faces no mesmo semiespaço. Por isso, esses poliedros são chamados de **poliedros convexos**.

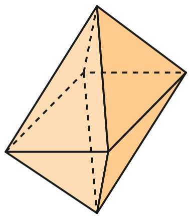
No poliedro da figura 3, existe pelos menos um plano que contém uma face mas deixa as demais faces em dois semiespaços opostos. Por isso, esse poliedro é denominado **poliedro não convexo**.

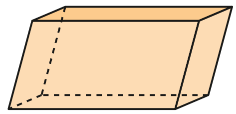
OBSERVAÇÃO

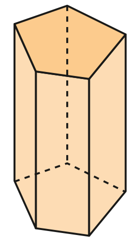
A reunião das faces de um poliedro convexo recebe o nome de superfície poliédrica convexa.

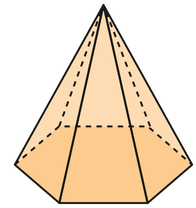
EXEMPLO 9

São poliedros convexos:

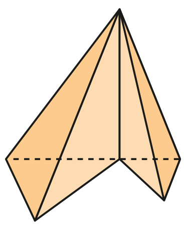

poliedro 1

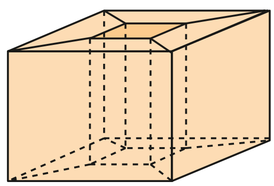

poliedro 2

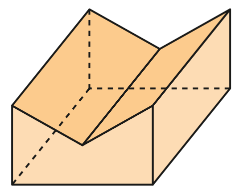

poliedro 3

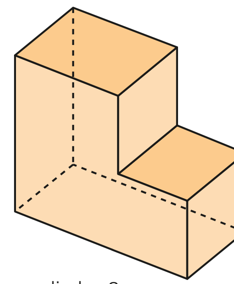

poliedro 4

São poliedros não convexos:


poliedro 5


poliedro 6


poliedro 7


poliedro 8

Em várias partes do mundo, modernas construções de engenharia nos remetem a poliedros convexos e não convexos.

SEBASTIAN VIVALLO OÑATE/AGÊNCIA MAKRO/GETTY IMAGES


O edifício em *Las Condes* lembra um poliedro não convexo. Santiago, Chile, 2015.

JALES VALQUER/FOTOARENA


O edifício à esquerda na foto lembra um poliedro não convexo; já o edifício mais alto, à direita, lembra um poliedro convexo. São Paulo (SP), 2016.

BINGDIAN/THINKSTOCK/GETTY IMAGES


Essa surpreendente construção (sede da Televisão Central da China) também lembra um poliedro não convexo. Pequim, China, 2015.

Relação de Euler

Pode-se mostrar que para todo **poliedro convexo** vale a relação:

$$V - A + F = 2$$

em que **V**, **A** e **F** são, respectivamente, o número de vértices, arestas e faces do poliedro. Essa relação foi demonstrada pelo matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783).

Considerando-se os poliedros convexos do exemplo anterior, temos:

	V	A	F	V − A + F
Poliedro 1	6	12	8	6 − 12 + 8 = 2
Poliedro 2	8	12	6	8 − 12 + 6 = 2
Poliedro 3	10	15	7	10 − 15 + 7 = 2
Poliedro 4	7	12	7	7 − 12 + 7 = 2

Vamos fazer a contagem de **V**, **A** e **F** para os poliedros não convexos do exemplo 9:

	V	A	F	V − A + F
Poliedro 5	6	10	7	6 − 10 + 7 = 3
Poliedro 6	16	32	16	16 − 32 + 16 = 0
Poliedro 7	10	15	7	10 − 15 + 7 = 2
Poliedro 8	12	18	8	12 − 18 + 8 = 2

Os poliedros não convexos 5 e 6 não satisfazem a relação de Euler; os poliedros não convexos 7 e 8 satisfazem a relação de Euler. Isso nos sugere que um poliedro não convexo pode ou não satisfazer a relação de Euler.

Se um poliedro (convexo ou não) satisfaz a relação de Euler, diz-se que é um **poliedro euleriano**.

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

7 Quantas arestas e quantos vértices tem um poliedro convexo de 20 faces, todas triangulares?

Solução:

Determinemos o número **A** de arestas. Como um triângulo possui 3 lados, nas 20 faces triangulares teríamos 60 arestas ($20 \cdot 3 = 60$). Nesse cálculo, cada aresta, por ser comum a duas faces, foi contada duas vezes.

Então:

$$A = \frac{60}{2} = 30$$

Temos $F = 20$ e $A = 30$.

Como o poliedro é convexo, ele satisfaz a relação de Euler. Daí:

$$V - 30 + 20 = 2$$
$$V = 12$$

Esse poliedro possui 30 arestas e 12 vértices.

8 Um poliedro convexo possui 1 face octogonal e 8 faces triangulares. Determine o número de arestas e vértices desse poliedro.

Solução:

Vamos determinar o número **A** de arestas:

- em uma face octogonal, temos 8 arestas ($1 \cdot 8 = 8$).
- em oito faces triangulares, temos 24 arestas ($3 \cdot 8 = 24$).

Como cada aresta é comum a duas faces, no cálculo anterior cada aresta foi contada duas vezes:

Daí: $A = \dfrac{8 + 24}{2} = 16$

$V - A + F = 2 \Rightarrow V - 16 + 9 = 2 \Rightarrow V = 9$

Esse poliedro possui 16 arestas e 9 vértices.

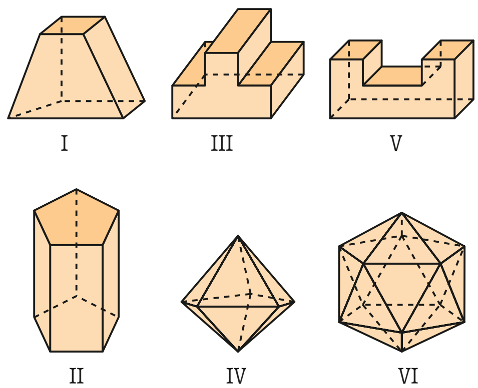
PENSE NISTO:

Você conhece algum poliedro nessas condições?

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

60 Dados os poliedros representados nas figuras:



a) classifique-os em convexo ou não convexo;

b) determine o número **V** de vértices, **A** de arestas, e **F** de faces de cada um deles;

c) indique quais são eulerianos.

61 Um poliedro convexo possui 12 faces, todas pentagonais. Qual é o número de arestas e vértices desse poliedro?

62 Um poliedro convexo composto de 12 faces pentagonais e 20 faces hexagonais foi confeccionado inspirado numa bola de futebol. Determine o número de arestas e o número de vértices desse poliedro.

63 Um poliedro convexo possui 13 faces, das quais 6 são triângulos, 6 são retângulos e 1 é um hexágono. Qual é o número de vértices desse poliedro?

64 Um poliedro convexo possui apenas faces triangulares e quadrangulares. Se esse poliedro tem 20 arestas e 10 vértices, determine o número de faces de cada tipo.

Poliedros de Platão

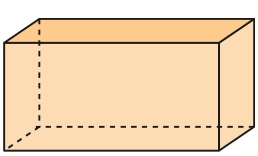
Um poliedro é chamado **poliedro de Platão** se satisfaz três condições:

- 1ª condição: Todas as faces têm o mesmo número **n** de arestas.
- 2ª condição: Todos os vértices são pontos em que concorre o mesmo número **m** de arestas.
- 3ª condição: O poliedro é euleriano, isto é, satisfaz a relação de Euler.

Aplicando as condições, vejamos se os poliedros dos exemplos abaixo são poliedros de Platão:

EXEMPLO **10**

Todo paralelepípedo é um poliedro de Platão, pois:



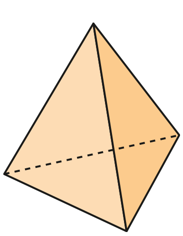
1ª) todas as faces são quadriláteros ($n = 4$);

2ª) em cada um de seus vértices concorrem três arestas ($m = 3$);

3ª) $V - A + F = 8 - 12 + 6 = 2$, portanto o poliedro é euleriano.

EXEMPLO **11**

Todo tetraedro é um poliedro de Platão, pois:



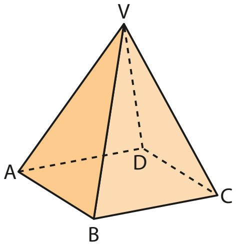
1ª) todas as faces são triângulos ($n = 3$);

2ª) cada um de seus vértices é ponto de encontro de três arestas ($m = 3$);

3ª) é euleriano, pois $V - A + F = 4 - 6 + 4 = 2$.

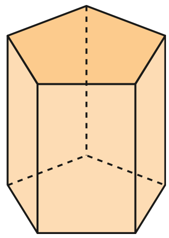
EXEMPLO 12

Uma pirâmide quadrangular não é um poliedro de Platão, pois sua base é um quadrilátero e suas faces laterais são triângulos. Além disso, em **V** concorrem 4 arestas e em **A**, por exemplo, concorrem 3 arestas.



EXEMPLO 13

Um prisma reto pentagonal não é um poliedro de Platão, pois suas bases são pentágonos e suas faces laterais são quadriláteros.



Propriedade

Existem cinco, e somente cinco, tipos de poliedros de Platão.

Demonstração:

É preciso mostrar que as três condições que caracterizam um poliedro de Platão são satisfeitas apenas para 5 tipos de poliedros.

- 1ª condição: Cada uma das **F** faces do poliedro tem **n** arestas (com $n \geqslant 3$) e, como cada aresta está contida em duas faces, temos:

$$n \cdot F = 2A \Rightarrow F = \frac{2A}{n} \quad (1)$$

- 2ª condição: Cada um dos **V** vértices do poliedro é ponto de concorrência ("encontro") de **m** arestas (com $m \geqslant 3$) e, como cada aresta contém dois vértices, temos:

$$m \cdot V = 2A \Rightarrow V = \frac{2A}{m} \quad (2)$$

- 3ª condição: Como o poliedro é euleriano, temos:

$$V - A + F = 2 \quad (3)$$

Substituindo (1) e (2) em (3), temos:

$$\frac{2A}{m} - A + \frac{2A}{n} = 2$$

Dividindo os dois membros por 2A (com $A \neq 0$), obtemos:

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = \frac{1}{A} \quad (4)$$

Já sabemos que $n \geqslant 3$ e $m \geqslant 3$. Notemos, porém, que **m** e **n** não podem ser ambos maiores que 3, pois se isso ocorresse teríamos:

$$\left.\begin{array}{l} m > 3 \Rightarrow m \geqslant 4 \Rightarrow \dfrac{1}{m} \leqslant \dfrac{1}{4} \\ n > 3 \Rightarrow n \geqslant 4 \Rightarrow \dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{1}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leqslant 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leqslant 0$$

Isso contraria a igualdade 4, uma vez que $\dfrac{1}{m} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{A} > 0$, pois $A > 0$.

Concluímos então que, nos poliedros de Platão devemos ter $m = 3$ ou $n = 3$.

- Se $m = 3$ (em cada vértice do poliedro concorrem 3 arestas), retomando a igualdade 4, temos:

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = \frac{1}{A} \Leftrightarrow \frac{1}{n} - \frac{1}{6} = \frac{1}{A} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{6} \Leftrightarrow n < 6$$

  Então, $n = 3$ ou $n = 4$ ou $n = 5$.

  Assim, há três poliedros nos quais concorrem 3 arestas em cada vértice:

  $\underset{(1)}{m = 3 \text{ e } n = 3;}$ $\underset{(2)}{m = 3 \text{ e } n = 4;}$ $\underset{(3)}{m = 3 \text{ e } n = 5}$

- Se $n = 3$ (todas as faces do poliedro são triangulares), obtemos, em 4:

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{A} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{m} - \frac{1}{6} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{m} > \frac{1}{6} \Leftrightarrow m < 6$$

  Assim, podemos ter:

  $\underset{(4)}{n = 3 \text{ e } m = 5;}$ $\underset{(5)}{n = 3 \text{ e } m = 4;}$ $\underset{\text{(coincide com 1)}}{n = 3 \text{ e } m = 3}$

Reunindo os resultados obtidos para $m = 3$ ou para $n = 3$, concluímos que os poliedros de Platão são determinados pelos pares do quadro seguinte, que mostra que existem exatamente cinco tipos de poliedros de Platão:

m	n
3	3
3	4
3	5
5	3
4	3

EXEMPLO **14**

Vamos caracterizar e representar o poliedro de Platão que possui faces pentagonais:

- Como as faces são pentagonais, então $n = 5$.
- Recorrendo ao quadro anterior, para $n = 5$, devemos ter $m = 3$.
- Em cada face há 5 arestas; lembrando que cada aresta é comum a duas faces, temos:

$$5F = 2A \Rightarrow F = \frac{2A}{5} \quad 1$$

- Em cada vértice concorrem 3 arestas; lembrando que cada aresta contém dois vértices, temos:

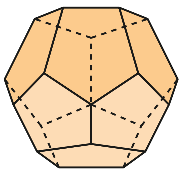
$$3V = 2A \Rightarrow V = \frac{2A}{3} \quad 2$$

- Usando a relação de Euler, 1 e 2 temos:

$$\frac{2A}{3} - A + \frac{2A}{5} = 2 \Rightarrow A = 30$$

Substituindo **A** por 30 em 1, obtemos $F = 12$, e em 2, obtemos $V = 20$.

Trata-se, portanto, de um poliedro convexo de 12 faces ($F = 12$) pentagonais ($n = 5$), chamado dodecaedro (nome determinado pelo número de faces).



dodecaedro

Poliedros regulares

Um poliedro convexo é regular se:

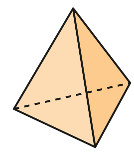
- suas faces são polígonos regulares e congruentes.
- em cada vértice concorre o mesmo número de arestas.

No poliedro regular é possível notar que:

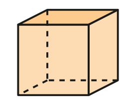
- todas as faces têm o mesmo número de arestas, pois as faces são congruentes.
- todos os vértices são pontos de interseção de um mesmo número de arestas.
- ele satisfaz a relação de Euler, pois é convexo.

Desse modo, todo poliedro regular é poliedro de Platão.

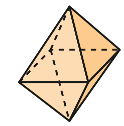
Existem, dessa forma, cinco tipos de poliedros regulares, representados ao lado.



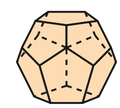
tetraedro regular
(m = 3 e n = 3)



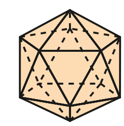
hexaedro regular (cubo)
(m = 3 e n = 4)



octaedro regular
(m = 4 e n = 3)



dodecaedro regular
(m = 3 e n = 5)

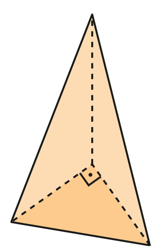


icosaedro regular
(m = 5 e n = 3)

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

65 Observe o tetraedro representado ao lado e responda às perguntas seguintes, justificando.

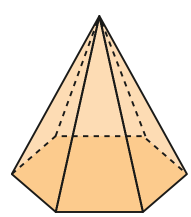


a) Esse poliedro é euleriano?

b) Esse poliedro é de Platão?

c) Esse poliedro é regular?

66 Observe a pirâmide regular hexagonal representada e responda às questões seguintes, justificando.

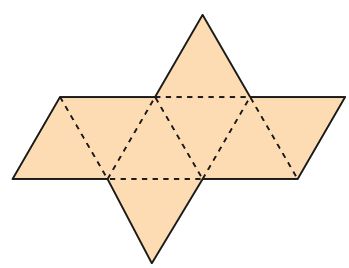


a) Esse poliedro é euleriano?

b) Esse poliedro é de Platão?

c) Esse poliedro é regular?

67 Observe a planificação da superfície de um poliedro, em que todos os segmentos representados são congruentes.

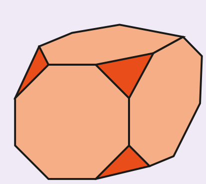


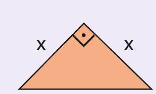
a) Qual é o nome desse poliedro? Caracterize-o. Faça sua representação.

b) Esse poliedro é regular?

DESAFIO

(Unifesp-SP) Um poliedro é construído a partir de um cubo de aresta $a > 0$, cortando-se em cada um de seus cantos uma pirâmide regular de base triangular equilateral (os três lados da base da pirâmide são iguais). Denote por **x**, $0 < x \leq \frac{a}{2}$, a aresta lateral das pirâmides cortadas.





face lateral das pirâmides cortadas

a) Dê o número de faces do poliedro construído.

b) Obtenha o valor de **x**, $0 < x \leq \frac{a}{2}$, para o qual o volume do poliedro construído fique igual a cinco sextos do volume do cubo original. A altura de cada pirâmide cortada, relativa à base equilateral, é $\frac{x}{\sqrt{3}}$.