CAPÍTULO 9

Corpos redondos

Cilindro

Observe abaixo alguns objetos que encontramos no nosso dia a dia.

FOTOS: CRISTINA XAVIER

Todos esses objetos lembram uma forma geométrica chamada **cilindro**, que estudaremos neste tópico.

Note que a lata mostrada na figura ao lado lembra a forma de um sólido com as seguintes características:

- apresenta dois círculos com raios de medidas iguais que estão contidos em planos paralelos;
- sua superfície lateral é constituída por todos os segmentos de reta de igual comprimento, paralelos à reta que contém os centros dos círculos e que têm extremidades nas circunferências desses círculos.

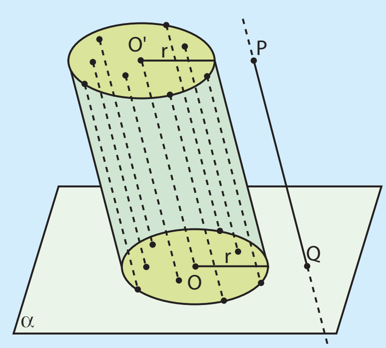
THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Por essas razões, podemos afirmar que a lata tem a forma de um **cilindro**.

Consideremos um círculo de centro **O** e raio de medida **r**, contido em um plano α, e um segmento de reta $\overline{PQ}$, cuja reta suporte intersecta α.

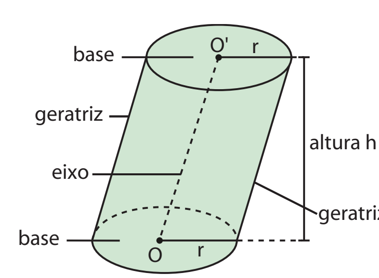
Tomemos segmentos de reta paralelos e congruentes a $\overline{PQ}$, cada um deles com uma extremidade em um ponto do círculo e com a outra extremidade em um mesmo semiespaço determinado por α.

A reunião de todos esses segmentos é um sólido chamado **cilindro circular** ou, simplesmente, **cilindro**.



Elementos e classificação

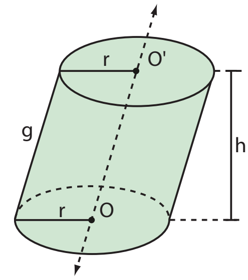
No cilindro representado ao lado, temos:



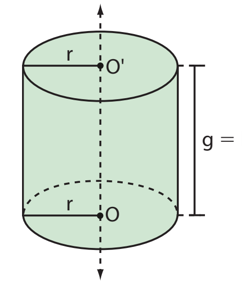
- os círculos de centros **O** e **O**' e raio de medida **r**, contidos em planos paralelos, chamados **bases** do cilindro;
- os segmentos paralelos a $\overline{OO'}$, com extremidades em pontos das circunferências das bases, chamados **geratrizes** do cilindro;
- a reta $\overleftrightarrow{OO'}$, que é o **eixo** do cilindro;
- a distância, entre os planos das bases, que é a **altura** do cilindro.

Quanto à inclinação da geratriz em relação aos planos de suas bases, um cilindro classifica-se em:

- **cilindro oblíquo**, se a geratriz é oblíqua aos planos das bases;
- **cilindro reto**, se a geratriz é perpendicular aos planos das bases. Nesse caso, a geratriz é a altura do cilindro.



cilindro oblíquo



cilindro reto

Áreas do cilindro circular reto

Área da base (A_b)

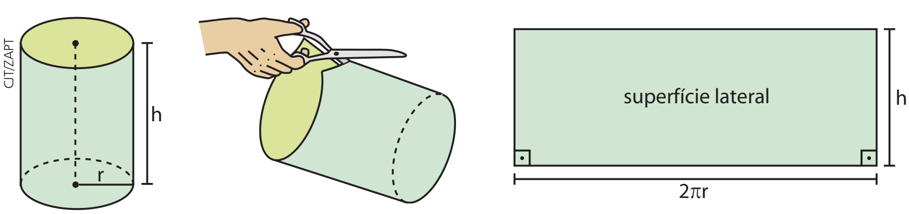
A área da base é a área de um círculo de raio de medida **r**.

$$A_b = \pi r^2$$

Área lateral (A_ℓ)

Dá-se o nome de **área lateral** à área de um retângulo de base $2\pi r$ (comprimento da circunferência da base) e altura **h**, em que **r** é a medida do raio da base do cilindro e **h** a medida da altura do cilindro.

Isso pode ser visualizado se planificarmos a superfície lateral do cilindro.

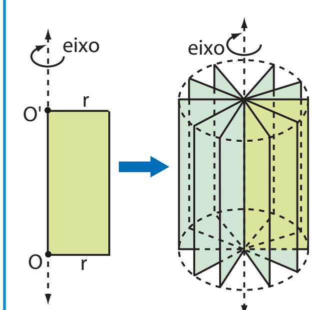


Assim, A_ℓ = área de um retângulo $\Rightarrow$ $A_\ell = 2\pi r \cdot h$

OBSERVAÇÃO

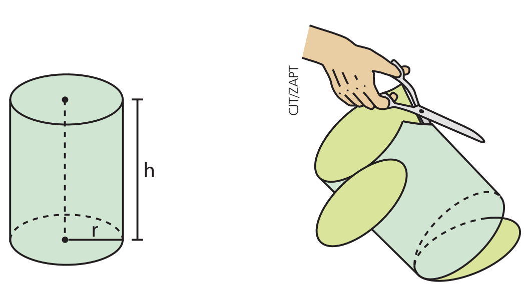
O cilindro circular reto é também chamado **cilindro de revolução**, pelo fato de ser gerado pela rotação de um retângulo em torno de um de seus lados.

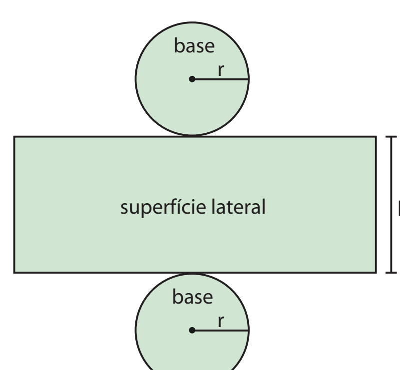
A reta $\overleftrightarrow{OO'}$ é o eixo de rotação.



Área total (A_t)

A **área total** de um cilindro é a soma da área da superfície lateral com a área dos círculos das bases.





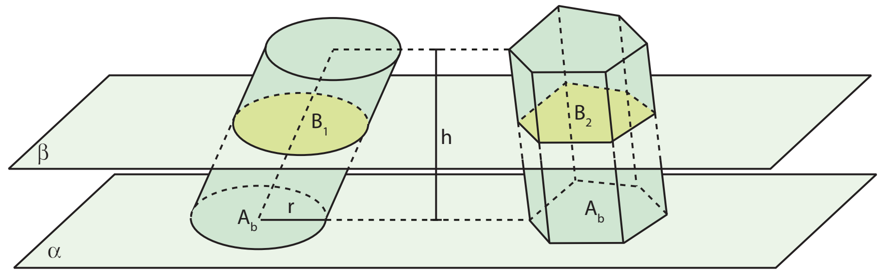
Assim, a área total do cilindro é dada por:

$$A_t = A_\ell + 2A_b$$

Substituindo $A_\ell = 2\pi r \cdot h$ e $A_b = \pi r^2$, temos:

$$A_t = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2 \Rightarrow A_t = 2\pi r \cdot (h + r)$$

Volume (V) do cilindro



Consideremos um cilindro de altura de medida **h** e área da base $\mathbf{A_b}$. Consideremos também um prisma de altura de medida **h** e área da base $\mathbf{A_b}$. Note que o cilindro e o prisma têm alturas iguais e bases equivalentes.

Suponhamos que os dois sólidos tenham as bases contidas em um mesmo plano α e fiquem no mesmo semiespaço de origem α. Qualquer plano β paralelo a α que secione o cilindro também seciona o prisma, e as seções $\mathbf{B_1}$ e $\mathbf{B_2}$ têm áreas iguais a $\mathbf{A_b}$, pois são congruentes às respectivas bases. Então, pelo princípio de Cavalieri, o cilindro e o prisma têm volumes iguais.

$$V_{\text{cilindro}} = V_{\text{prisma}}$$

Como $V_{\text{prisma}} = A_b \cdot h$, então o volume de um cilindro é igual ao produto da área da base pela medida da altura:

$$V_{\text{cilindro}} = A_b \cdot h$$

Como $A_b = \pi r^2$, temos:

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

EXEMPLO 1

Pretende-se pintar externamente a base inferior e a superfície lateral de um vaso que tem a forma de um cilindro reto em que o diâmetro da base mede 40 cm e a altura mede 36 cm. Considerando a espessura do vaso desprezível, vamos usar $\pi \simeq 3$ para calcular a área da superfície a ser pintada e a maior quantidade de terra que pode ser colocada em seu interior.

Como r = 20 cm e h = 36 cm, temos:

A = área da superfície a ser pintada $\Rightarrow A = \pi \cdot r^2 + 2\pi \cdot r \cdot h \Rightarrow$

$\Rightarrow A = 3 \cdot 20^2 + 2 \cdot 3 \cdot 20 \cdot 36 \Rightarrow A = 5\,520 \text{ cm}^2$

V = volume do vaso $\Rightarrow V = \pi \cdot r^2 \cdot h \Rightarrow V = 3 \cdot 20^2 \cdot 36 \Rightarrow V = 43\,200 \text{ cm}^3$

Logo, a área da superfície a ser pintada é 5 520 cm² e o volume máximo de terra que pode ser colocado no vaso é 43 200 cm³.

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

1 Uma vela tem a forma de um cilindro reto, com área total igual a 108π cm² e medida do raio da base igual a $\frac{1}{5}$ da medida da altura. Determine sua área lateral e seu volume.

FERNANDO FAVORETTO/CRIAR IMAGEM

Solução:

Sendo **r** a medida do raio da base e **h** a medida da altura, temos:

$$r = \frac{1}{5}h \quad \text{e} \quad A_t = 108\pi$$

Como $A_t = A_\ell + 2 \cdot A_b$, então $108\pi = 2\pi rh + 2\pi r^2 \Rightarrow rh + r^2 = 54$.

Substituindo $r = \frac{1}{5}h$, obtemos:

$$\frac{1}{5}h \cdot h + \left(\frac{1}{5}h\right)^2 = 54 \Rightarrow \frac{h^2}{5} + \frac{h^2}{25} = 54 \Rightarrow 6h^2 = 1\,350 \Rightarrow h^2 = 225 \Rightarrow h = 15 \text{ cm}$$

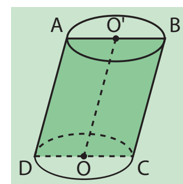
Temos, então: $r = \frac{1}{5}h \Rightarrow r = \frac{1}{5} \cdot 15 \Rightarrow r = 3$ cm.

Logo, $\begin{cases} A_\ell = 2\pi \cdot r \cdot h \Rightarrow A_\ell = 2\pi \cdot 3 \cdot 15 = 90\pi \\ V = \pi \cdot r^2 \cdot h \Rightarrow V = \pi \cdot 3^2 \cdot 15 = 135\pi \end{cases}$, ou seja, a área lateral é 90π cm² e o volume é 135π cm³.

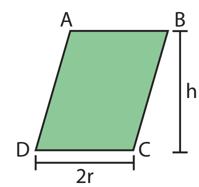
Seção meridiana e cilindro equilátero

Sejam **O** e **O'** os centros dos círculos das bases de um cilindro e $\overleftrightarrow{OO'}$ o eixo do cilindro. **Seção meridiana** de um cilindro é a interseção deste com um plano que contém o segmento $\overline{OO'}$.

A seção meridiana de um cilindro oblíquo é um paralelogramo.

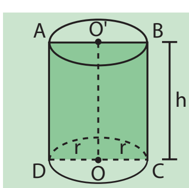


cilindro oblíquo

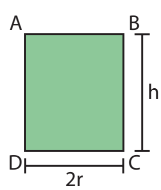


seção meridiana

A seção meridiana de um cilindro reto é um retângulo de dimensões 2r (medida do diâmetro da base) e **h** (medida da altura do cilindro).

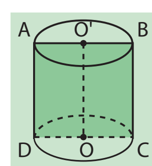


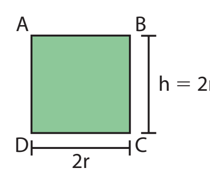
cilindro reto



seção meridiana

Cilindro equilátero é um cilindro reto cuja seção meridiana é um quadrado. Num cilindro equilátero, $g = h = 2r$.





seção meridiana

EXEMPLO 2

Vejamos como obter a área lateral $\mathbf{A_\ell}$, a área total $\mathbf{A_t}$ e o volume **V** de um cilindro equilátero cujo raio mede 3 cm.

- Área lateral

  $\left.\begin{array}{l} A_\ell = 2\pi rh \\ h = 2r \end{array}\right\} \Rightarrow A_\ell = 2\pi r \cdot 2r = 4\pi r^2 \Rightarrow A_\ell = 4 \cdot \pi \cdot 3^2 \Rightarrow A_\ell = 36\pi$

  Logo, a área lateral desse cilindro é 36π cm².

- Área total

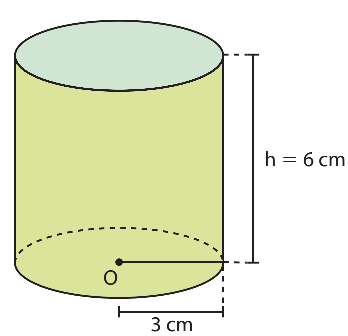
  $\left.\begin{array}{l} A_t = A_\ell + 2A_b \\ A_b = \pi r^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow A_t = 4\pi r^2 + 2\pi r^2 = 6\pi r^2 \Rightarrow A_t = 6 \cdot \pi \cdot 3^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow A_t = 54\pi \end{array}$

  Logo, a área total desse cilindro é 54π cm².

- Volume

  $\left.\begin{array}{l} V = \pi r^2 h \\ h = 2r \end{array}\right\} \Rightarrow V = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3 \Rightarrow V = 2 \cdot \pi \cdot 3^3 \Rightarrow V = 54\pi$

  Logo, o volume desse cilindro é 54π cm³.

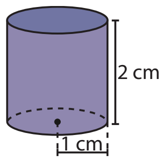


EXERCÍCIOS

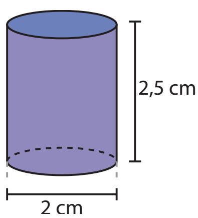
FAÇA NO CADERNO

1 Calcule a área lateral, a área total e o volume dos sólidos cujas medidas estão indicadas nas figuras.

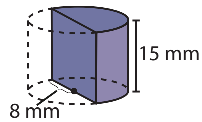
a) cilindro equilátero



b) cilindro reto



c) semicilindro reto



2 Uma lata de óleo cilíndrica possui as seguintes medidas internas: raio da base = 4 cm e altura = 22 cm. Nessa lata, é possível armazenar mais que um litro de óleo?

3 Determine o volume de um cilindro, sabendo que sua área lateral é igual a 250π cm² e que o raio de sua base mede 10 cm.

4 Um reservatório cilíndrico de armazenamento de água possui internamente 8 m de diâmetro e 14 m de altura e está vazio. Se ele receber água à razão de 160 litros por minuto, qual é o menor número inteiro de dias necessários para enchê-lo completamente? Use $\pi \simeq \frac{22}{7}$.

5 O perímetro da seção meridiana de um cilindro reto mede 28 cm. Sabendo que a área lateral do cilindro é 48π cm², determine seu volume.

6 Seja uma caixa-d'água, de formato cilíndrico, em que a área lateral é igual a $\frac{6\pi}{5}$ m² e o raio da base mede 80 cm. Determine:

a) a medida da altura dessa caixa;

b) a capacidade da caixa, em litros. Use $\pi \simeq 3{,}14$.

7 Um recipiente cilíndrico tem 20 cm de altura e diâmetro interno de 10 cm. Determine quantos quilogramas de mercúrio são necessários para encher completamente esse vaso, sabendo que a densidade do mercúrio é 13,6 g/cm³. Use $\pi \simeq 3{,}14$.

8 Um cilindro reto tem 30π m² de área lateral e 45π m³ de volume. Determine:

a) a medida de sua altura;

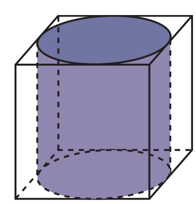
b) sua área total.

9 Calcule a área total da superfície de um cilindro equilátero, sabendo que o seu volume é igual a 250π cm³.

10 A planificação da superfície lateral de um cilindro reto tem dimensões 6 cm e 8 cm. Determine a área total e o volume do cilindro, considerando $\pi \simeq 3{,}1$.

11 Um poço, com a forma de um cilindro reto, deve ser construído em um terreno plano. Se ele deve ter 24 dm de diâmetro por 140 dm de profundidade, quantos metros cúbicos de terra deverão ser removidos para sua construção? Considere $\pi \simeq \frac{22}{7}$.

12 Um cilindro está inscrito em um cubo cuja aresta mede 10 cm, conforme mostra a figura abaixo.



a) Determine, na ordem dada, a razão entre as áreas totais do cubo e do cilindro.

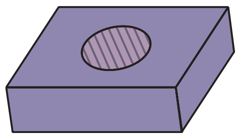
b) Determine os volumes do cubo e do cilindro.

13 Para o intervalo de uma reunião de trabalho foi servido café em uma garrafa térmica cilíndrica, com as seguintes medidas internas: 18 cm de altura e 5 cm de raio de base. O café será servido em copinhos plásticos, também cilíndricos e com espessura desprezível, sendo 4 cm a medida do diâmetro da base e 4 cm a medida da altura. Considere $\pi \simeq 3{,}1$.

a) Se cada um dos 30 participantes quiser se servir uma única vez de café, enchendo completamente o copinho, haverá café suficiente para todos? Explique.

b) Os copinhos de plástico são fabricados a um custo de R$ 8,50 o metro quadrado e vendidos com 30% de lucro sobre o preço de custo do material. Na confecção de cada copinho, são acrescentados 25% de plástico, para reforçar sua "boca". Qual é o valor a ser pago por uma encomenda de 1 500 desses copinhos plásticos?

14 Uma peça de madeira, com a forma de um prisma reto de base quadrada, tem em seu centro um furo cilíndrico de 2,8 cm de raio, conforme mostra a figura abaixo.

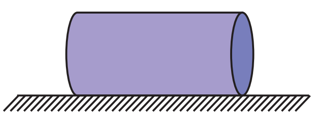


Se o prisma tem 10 cm de altura e o lado do quadrado da base mede 18 cm, então, considerando $\pi \simeq \frac{22}{7}$, determine:

a) o volume da peça;

b) a massa dessa peça, em quilogramas, considerando que a densidade da madeira é 0,93 g/cm^3.

15 Um tambor de forma cilíndrica tem 2 m de comprimento e 1 m de diâmetro. Deseja-se encher o tambor com uma mistura de 90% de gasolina e 10% de álcool. Que volume de álcool será necessário? Use $\pi \simeq 3{,}14$.



16 Dispõe-se de uma folha retangular de metal que tem 8 cm de largura por 12 cm de comprimento. A partir dessa folha, podem ser construídos dois tipos de tubo cilíndrico: $\mathbf{C}_1$, soldando-se os dois lados maiores, ou $\mathbf{C}_2$, soldando-se os outros dois lados. Determine qual das duas opções

a) forneceria um cilindro de maior volume.

b) gastaria menos material na fabricação, considerando os tubos fechados.

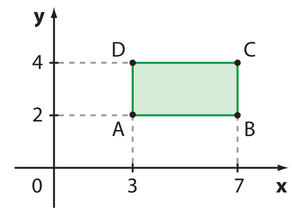
17 Uma construção em forma de uma torre circular cilíndrica possui 240 cm de medida do diâmetro interno e 50 cm de espessura. O volume de concreto usado na construção da torre foi de 449,5 m^3. Considerando $\pi \simeq 3{,}1$, determine a medida da altura da torre.

18 Numa feira livre, o caldo de cana é vendido em dois recipientes cilíndricos: o copo grande, que tem 5 cm de raio da base e 12 cm de altura, e o copo médio, com 3 cm de raio da base e altura de 10 cm. Para o consumidor, qual copo é mais vantajoso, se o maior custa o triplo do médio?

19 Em um experimento, um professor de Química usou um vasilhame cilíndrico de 6 cm de raio da base, contendo água até certa altura. Imediatamente após adicionar 16 pedras cúbicas de gelo, cada uma com aresta de 3 cm, o nível da água atingiu 12 cm. Qual era o nível da água antes da adição do gelo? Considere $\pi \simeq 3$.

20 Com a rotação de um quadrado em torno de um de seus lados obtém-se um cilindro. Determine a medida do lado do quadrado, de modo que a área da seção meridiana do cilindro seja 50 cm^2.

21 Observe a figura:



Qual é o volume do sólido obtido ao girarmos o retângulo ABCD em torno do eixo **y**?

22 Um tanque tem a forma de um cilindro circular reto, sendo 4 m a medida do raio da base e 10 m a medida da altura.
Inicialmente vazio, o tanque irá receber água a uma vazão constante.
Sejam **x** ($0 \leqslant x \leqslant 10$) a altura, em metros, atingida pela água no reservatório e V(x) o volume de água no reservatório, em metros cúbicos.

a) V(x) e **x** são grandezas diretamente proporcionais? Explique.

b) Faça a representação gráfica da função que relaciona V(x) e **x**, obtendo também a sua lei. Não é necessário usar aproximação para π.

23 Deseja-se revestir com tecido a supercifície lateral e as bases de um cilindro reto. As medidas do diâmetro da base e da altura do cilindro são, respectivamente, 40 cm e 50 cm. Considere $\pi \simeq 3{,}1$.

a) É possível fazer esse revestimento com um retalho retangular do tecido medindo 1,3 m por 0,9 m? Explique. (Admita que os cortes no tecido possam proporcionar o máximo de aproveitamento, não havendo perdas.)

b) Em caso de resposta afirmativa do item *a*, determine a área do retalho que vai sobrar.

24 Um reservatório na forma de cilindro reto possui, como medidas internas, altura igual a 9 m e raio da base igual a 4 m. O combustível contido no reservatório ocupa $\frac{5}{8}$ de sua capacidade. Considere $\pi \simeq 3$.

a) Qual é a altura (nível) do combustível no reservatório?

b) Se forem adicionados 2 400 L de combustível, quantos centímetros se elevará o seu nível no reservatório?

c) Qual é a quantidade máxima de litros de combustível que pode ser despejada no reservatório sem que haja transbordamento?

TROQUE **IDEIAS**

A Matemática e as chuvas

O agravamento da crise hídrica na região Sudeste nos últimos anos, as secas "permanentes" em algumas regiões do Nordeste e os eventos climáticos extremos decorrentes do aquecimento global fizeram com que assuntos como *índice pluviométrico*, nível dos mananciais que abastecem a população, desperdício e consumo consciente de água ganhassem cada vez mais espaço no cotidiano do brasileiro.

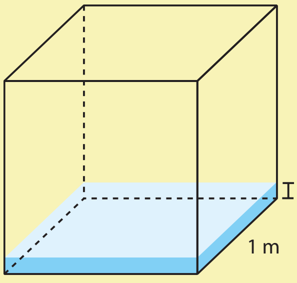
Conhecer o índice pluviométrico de uma região é importante para que se reúnam informações úteis para a economia local (agricultura, pecuária etc.), além de auxiliar no planejamento urbano, prevendo usos mais adequados para áreas onde possam ocorrer desabamentos, deslizamentos de terra ou inundações, por exemplo.

E você? Quando ouve notícias com dados do índice pluviométrico, como "Neste mês, as chuvas em Curitiba superaram o índice de 100 mm", sabe o que significa? Nesta atividade vamos construir o significado desse conceito.

O índice pluviométrico indica a **quantidade de chuva por metro quadrado** registrada em certo local, em um determinado período de tempo.

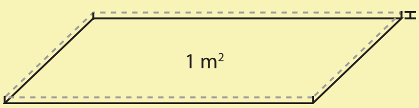
a) Quando dizemos que o índice pluviométrico em certa região foi de 25 mm na semana, significa que, se tivéssemos um reservatório aberto de 1 m² da área de base, o nível de água atingiria a altura de 25 mm (veja a figura ao lado).

Qual é o volume total de água da chuva recolhida no reservatório ao lado? Expresse a resposta em m³ e, em seguida, transforme em litros.



Elementos sem proporção entre si.

b) No índice pluviométrico, em certo período de tempo, cada 1 mm de precipitação corresponde a quantos litros de chuva por metro quadrado?



c) É claro que os pluviômetros, instrumentos usados para medir a quantidade de chuva, não precisam ter, como base, um quadrado de área 1 m².

Imagine que se pretenda medir a quantidade de chuva em uma região por meio de um cilindro reto graduado, ao qual se acopla um funil, como mostra a imagem ao lado.

Considere que a abertura maior do funil, por onde a chuva será coletada, tenha diâmetro com medida 10 cm e que, em certo dia, o volume de água da chuva coletado tenha sido de 300 mL (ou 0,3 L).

Qual foi, em mm, a precipitação nesse dia? Use $\pi \simeq 3{,}14$.

LUCIANO GALVÃO/EASYPIX

Por fim, vale a pena destacar que, em uma cidade grande, há várias estações de medição da intensidade da chuva. A média das intensidades de precipitação medidas nesses pontos, em certo período (mês, por exemplo), fornece o **índice pluviométrico** da região, no período considerado.

Fontes de pesquisa: SAEMA. Disponível em: <saema.com.br/portal/home/indice-pluviometrico>. Acesso em: 10 mar. 2016.; INPE. Disponível em: <www.inpe.br/acessoainformacao/node/402>. Acesso em: 10 mar. 2016.; Agritempo. Disponível em: <www.agritempo.gov.br/agritempo/jsp/Estatisticas/index.jsp>. Acesso em:10 mar. 2016.

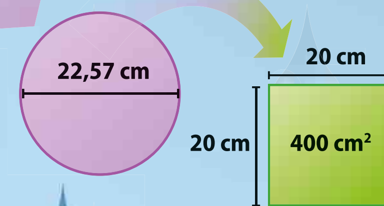
Aplicações

Conheça os pluviômetros oficiais

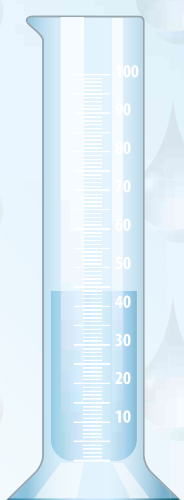
O pluviômetro é um dos instrumentos que permitem verificar a quantidade de chuva que cai em determinado local. Há outros meios, como os satélites meteorológicos, mas não oferecem a precisão de um pluviômetro quando há a necessidade de registrar pequenas quantidades de chuva. Há vários tipos de pluviômetros e, no Brasil, o Instituto Nacional de Meteorologia (Inmet) utiliza o modelo *Ville de Paris*.

1

O *Ville de Paris* tem um bocal de 22,57 centímetros de diâmetro, equivalente a uma área de captação de chuvas de 400 centímetros quadrados, medida recomendada pelas normas internacionais.



Casa Paulistana de Comunicação



proveta graduada

2

A leitura do pluviômetro é feita uma vez por dia, geralmente pela manhã, quando se recolhe a água acumulada. No *Ville de Paris* essa leitura é feita com o auxílio de uma proveta, tubo cilíndrico de vidro ou plástico graduado em milímetros.

3

O controle diário permite fazer o levantamento da quantidade de chuva em um local ou em determinada região ao longo de um ano ou de outros períodos menores de tempo, por exemplo um mês. É possível fazer comparações dos índices entre diferentes cidades, estados e regiões do Brasil. Consegue-se investigar em que mês choveu mais ou menos, em que dias do mês ou do ano costuma chover com mais intensidade ou até saber quantos dias de chuva ocorreram em uma década. Todas essas informações podem ser transformadas em gráficos ou mapas, possibilitando melhor visualização das informações obtidas.

4

Os dados pluviométricos podem ser utilizados de várias maneiras, tanto nas cidades quanto no campo. Permitem conhecer desde o momento certo para iniciar o manejo do solo e o plantio até planejar medidas preventivas contra enchentes e alagamentos, como fazem as prefeituras. O setor privado utiliza os dados para, por exemplo, planejar a melhor época para realizar obras.

SAMANTHA MARTINS/ESTAÇÃO METEOROLÓGICA DO IAG-USP

pluviômetro Ville de Paris

Outros tipos de pluviômetros utilizados no Brasil:

Paulista, com abertura de 500 cm² para a captação de chuvas. É utilizado pelo governo do estado de São Paulo;

Casella, com área de captação de chuvas de 200 cm². É o mais utilizado pelo setor privado, que inclui empresas envolvidas com o agronegócio. Esses modelos geralmente são feitos de plástico resistente. Diferencial: incluem em sua estrutura a gradação em milímetros, o que dispensa o uso da proveta.

Cone

Os objetos e alimentos abaixo podem ser encontrados no nosso dia a dia. Todos se assemelham com a forma geométrica chamada **cone**, que vamos estudar neste tópico.

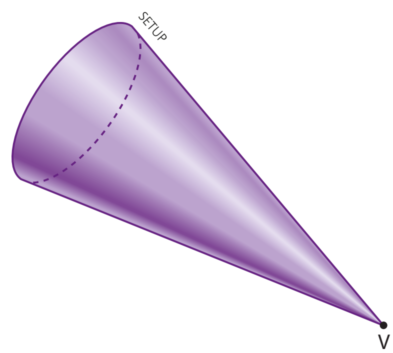
FOTOS: THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Elementos sem proporção entre si.

Observe a figura ao lado.
Ela apresenta as seguintes características:

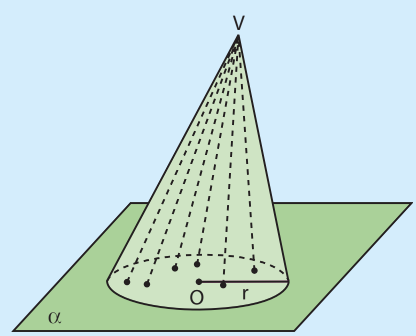
- uma superfície circular, que chamaremos **base**;
- um ponto em **V**, que chamaremos **vértice**;
- superfície lateral constituída por todos os segmentos de reta que têm uma extremidade na circunferência do círculo da base e a outra extremidade no ponto **V**.

Essa figura tem a forma de um sólido chamado **cone**.



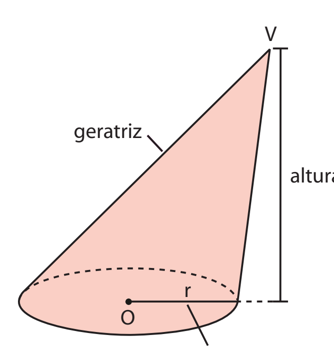
Consideremos um círculo de centro **O** e raio de medida **r**, contido em um plano α, e um ponto **V**, não pertencente a α.

Chama-se **cone circular**, ou apenas cone, a reunião dos segmentos com uma extremidade em **V** e a outra em um ponto do círculo.



Elementos e classificação

- O ponto **V** é o **vértice** do cone.
- O círculo de centro **O** e raio de medida **r** é a **base** do cone.
- Cada segmento com uma extremidade em **V** e a outra num ponto da circunferência da base é uma **geratriz** do cone.
- A distância do vértice ao plano da base é a **altura** do cone.

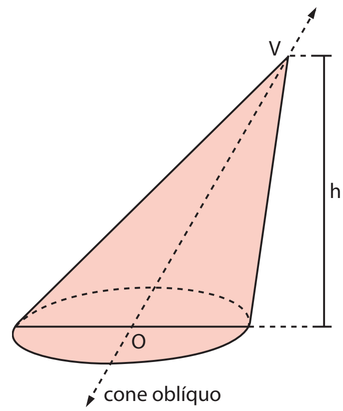


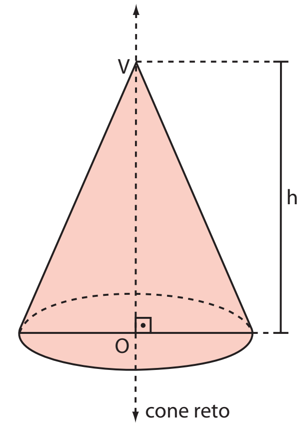
Quanto à inclinação da reta $\overleftrightarrow{VO}$ em relação ao plano da base, um cone classifica-se em:

- **cone oblíquo**, se a reta $\overleftrightarrow{VO}$ é oblíqua ao plano da base;
- **cone reto**, se a reta $\overleftrightarrow{VO}$ é perpendicular ao plano da base. Nesse caso, $\overline{VO}$ é a altura do cone.

PENSE NISTO:

As geratrizes de um cone oblíquo são congruentes? E as de um cone reto?

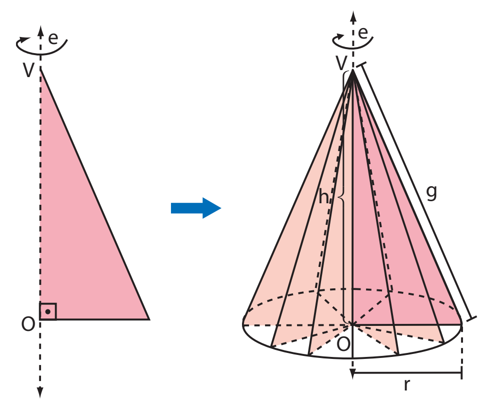




OBSERVAÇÃO

O cone circular reto é também chamado **cone de revolução**, pelo fato de ser gerado pela rotação de um triângulo retângulo em torno de um de seus catetos.
Observe que em um cone de revolução vale a relação:

$$r^2 + h^2 = g^2$$



Áreas do cone circular reto

Área da base (A_b)

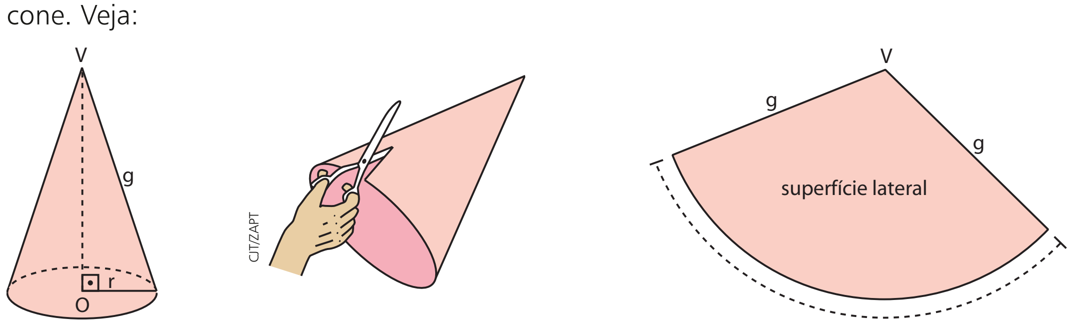
A base do cone é um círculo de raio de medida **r**, então a **área da base** é:

$$A_b = \pi \cdot r^2$$

Área lateral (A_ℓ)

Área lateral é a área de um setor circular cujo raio mede **g** (medida da geratriz do cone) e cujo comprimento do arco é $2\pi r$ (perímetro da base).

A área lateral pode ser visualizada se planificarmos a superfície lateral do cone. Veja:



A área do setor circular de raio de medida **g** e comprimento de arco $2\pi r$, isto é, a área lateral $\mathbf{A}_\ell$, pode ser obtida por uma regra de três:

comprimento do arco		área do setor
$2\pi g$	———	πg^2
$2\pi r$	———	A_ℓ

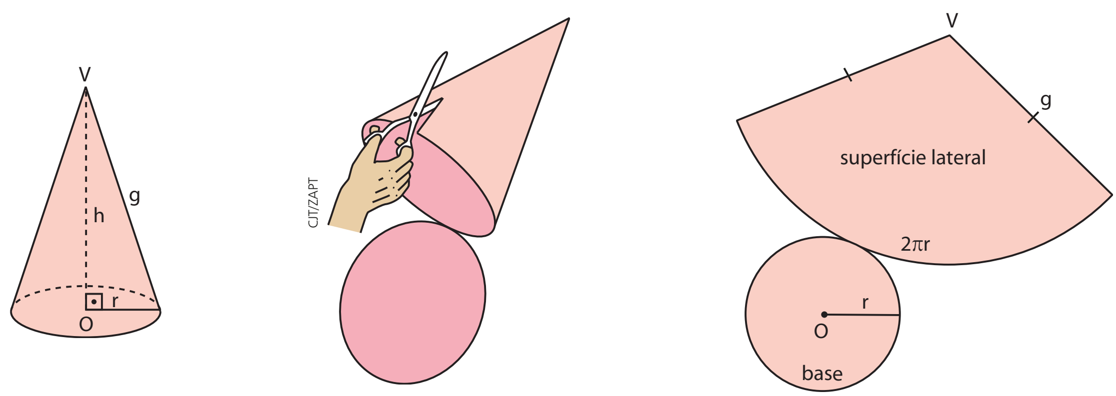
Então:

$$A_\ell = \frac{(\pi g^2) \cdot (2\pi r)}{2\pi g} \Rightarrow \boxed{A_\ell = \pi \cdot r \cdot g}$$

Área total (A_t)

A superfície total de um cone é a reunião da superfície lateral com o círculo da base. Assim, a **área total** do cone é dada por:

$$A_t = A_\ell + A_b$$

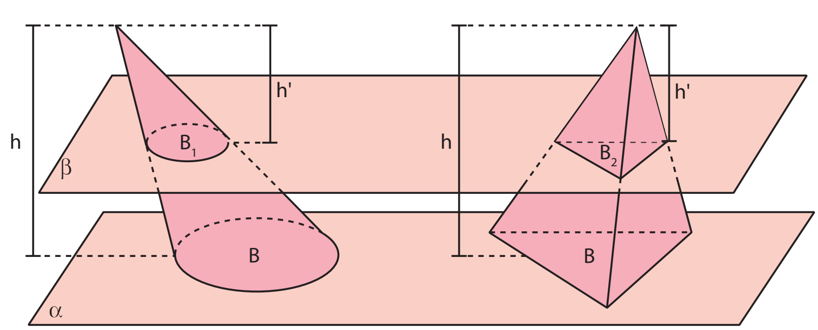


Substituindo $A_\ell = \pi \cdot r \cdot g$ e $A_b = \pi \cdot r^2$, temos:

$$A_t = \pi rg + \pi r^2 \Rightarrow \boxed{A_t = \pi \cdot r \cdot (g + r)}$$

Volume (V) do cone

Consideremos um cone de altura de medida **h** e base circular com área **B**. Consideremos também um tetraedro cuja altura mede **h** e base com área **B**. Note que o cone e o tetraedro têm alturas congruentes e bases equivalentes.



Suponhamos que os dois sólidos tenham as bases contidas em um mesmo plano α e que seus vértices estejam no mesmo semiespaço de origem α. Qualquer plano β paralelo a α que secione o cone a uma distância **h**' do vértice também seciona o tetraedro à mesma distância **h**' do vértice.

A seção do cone pelo plano β é um círculo de área $\mathbf{B_1}$. Como os dois cones obtidos são semelhantes, temos:

$$\frac{B_1}{B} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2 \quad (1)$$

A seção do tetraedro pelo plano β é um triângulo de área $\mathbf{B_2}$. Como os dois tetraedros são semelhantes, temos:

$$\frac{B_2}{B} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2 \quad (2)$$

De (1) e (2), resulta:

$$\frac{B_1}{B} = \frac{B_2}{B}$$

e, então, $B_1 = B_2$. Logo, as seções obtidas são equivalentes e, pelo princípio de Cavalieri, o cone e o tetraedro têm volumes iguais.

$$V_{cone} = V_{tetraedro}$$

Como $V_{tetraedro} = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h$, então o volume de um cone é igual a $\frac{1}{3}$ do produto da área da base pela medida da altura:

$$V_{cone} = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$$

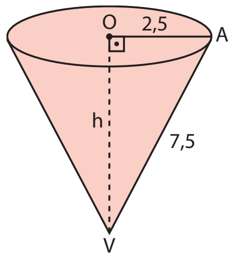
Como $A_b = \pi r^2$, temos:

$$\boxed{V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h}$$

EXEMPLO 3

Uma casquinha de sorvete tem a forma de um cone reto em que a geratriz mede 7,5 cm e o raio da base mede 2,5 cm. Vamos determinar seu volume, considerando $\sqrt{2} \simeq 1{,}4$ e $\pi \simeq \frac{22}{7}$.

Determinemos a altura **h** da casquinha, vista no esquema ao lado.



No △AVO, retângulo, temos: $h^2 = (7{,}5)^2 - (2{,}5)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow h^2 = 50 \Rightarrow h = 5\sqrt{2} \Rightarrow h \simeq 7$ cm

Logo:

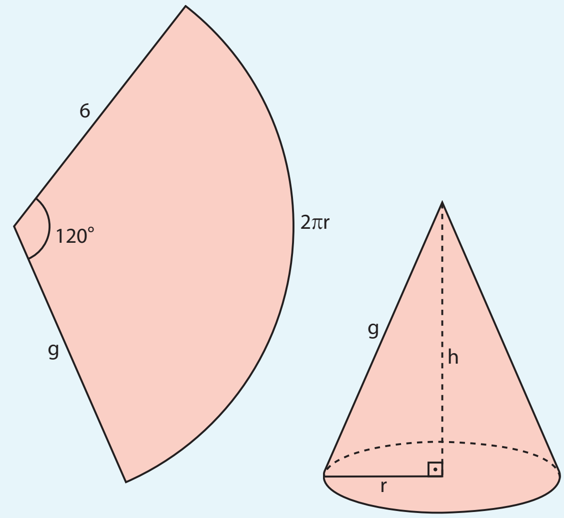
$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \frac{22}{7} \cdot 6{,}25 \cdot 7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V \simeq 45{,}8 \text{ cm}^3$$

Portanto, o volume aproximado da casquinha de sorvete é 45,8 cm³, ou seja, 45,8 mL.

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

2 Quais são as medidas do raio e da altura de um cone de revolução cuja planificação da superfície lateral é um setor circular de 120° e 6 cm de raio?



Solução:

- Área lateral

A área lateral é a área do setor. Então:

$$\left.\begin{array}{l}360° \text{ — } \pi \cdot 6^2 \\ 120° \text{ — } A_\ell\end{array}\right\} \Rightarrow A_\ell = \frac{120°}{360°} \cdot \pi \cdot 6^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A_\ell = 12\pi \text{ cm}^2$$

- Cálculo de **r** e **h**

Como $A_\ell = \pi \cdot r \cdot g$ e $g = 6$ cm, temos:

$$12\pi = \pi \cdot r \cdot 6 \Rightarrow r = 2 \text{ cm}$$

Como $r^2 + h^2 = g^2$, temos:

$$2^2 + h^2 = 6^2 \Rightarrow h^2 = 32 \Rightarrow h = 4\sqrt{2} \text{ cm}$$

Logo, o cone tem $4\sqrt{2}$ cm de altura e o raio da base mede 2 cm.

3 Um reservatório tem a forma de um cone circular reto invertido com raio de medida R = 3 m e altura de medida H = 4 m. Ele está preenchido com água até metade da sua altura, como ilustra a figura abaixo. Qual é o volume do reservatório? Que volume de água ele contém?

Solução:

- Volume do reservatório

$$V = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot H}{3} = \frac{\pi \cdot 3^2 \cdot 4}{3} \Rightarrow V = 12\pi \text{ m}^3$$

Logo, o volume do reservatório é 12π m³.

- Cone de água

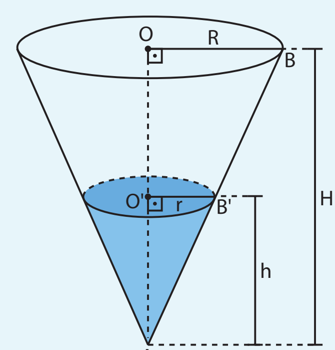
Sabemos que $h = \dfrac{H}{2} = 2$ m.

Como:

$$\triangle OAB \sim \triangle O'AB' \Rightarrow \frac{OB}{O'B'} = \frac{OA}{O'A} \Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{H}{h} \Rightarrow \frac{R}{r} = 2$$

então:

$$r = \frac{R}{2} = 1{,}5 \text{ m}$$



- Volume de água

$$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot (1{,}5)^2 \cdot 2}{3} \Rightarrow V = 1{,}5\pi \text{ m}^3$$

Portanto, o volume de água contido no reservatório é $1{,}5\pi$ m³.

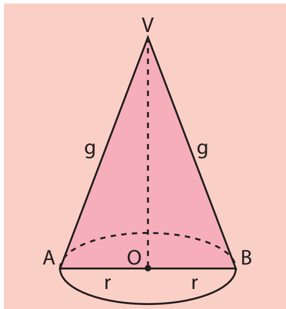
PENSE NISTO:

Se o reservatório em forma de cone está preenchido com água até metade de sua altura, então o volume dessa água corresponde a metade do volume do reservatório?

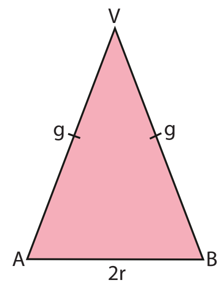
Seção meridiana e cone equilátero

Sejam **V** o vértice de um cone e **O** o centro de seu círculo da base.

Seção meridiana de um cone é a interseção dele com um plano que contém o segmento $\overline{VO}$. A seção meridiana de um cone reto é um triângulo isósceles.



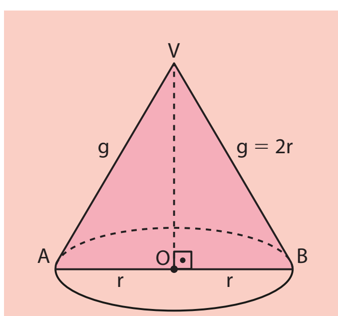
cone reto



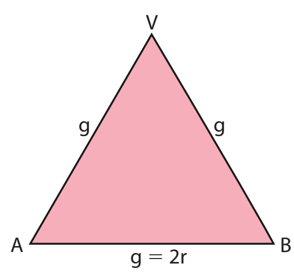
seção meridiana

Cone equilátero é um cone reto cuja seção meridiana é um triângulo equilátero.

Num cone equilátero, $g = 2r$.



cone equilátero



seção meridiana

PENSE NISTO:

Ao planificarmos a superfície lateral de um cone equilátero, qual é a medida do ângulo do setor obtido?

EXEMPLO 4

Vejamos como obter a área lateral $\mathbf{A_\ell}$, a área total $\mathbf{A_t}$ e o volume **V** de um cone equilátero de raio 4 cm.

- Área lateral

$$\left.\begin{array}{l} A_\ell = \pi \cdot r \cdot g \\ g = 2r \end{array}\right\} \Rightarrow A_\ell = \pi \cdot r \cdot 2r = 2\pi \cdot r^2 \Rightarrow A_\ell = 2\pi \cdot 4^2 \Rightarrow A_\ell = 32\pi \text{ cm}^2$$

Logo, a área lateral desse cone equilátero é 32π cm².

- Área total

$$\left.\begin{array}{l} A_t = A_\ell + A_b \\ A_b = \pi \cdot r^2 \end{array}\right\} \Rightarrow A_t = 32\pi + \pi \cdot r^2 \Rightarrow A_t = 32\pi + \pi \cdot 4^2 \Rightarrow A_t = 48\pi \text{ cm}^2$$

Portanto, a área total desse cone equilátero é 48π cm².

- Volume

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Vejamos agora como calcular a altura **h**:

$$h^2 + r^2 = g^2 \Rightarrow h^2 = (2r)^2 - r^2 \Rightarrow h^2 = 3r^2 \Rightarrow h = r\sqrt{3} \Rightarrow h = 4\sqrt{3} \text{ cm}$$

Logo:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 4\sqrt{3} \Rightarrow V = \frac{64\pi\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3$$

Portanto, o volume desse cone equilátero é $\frac{64\pi\sqrt{3}}{3}$ cm³.

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

25 Calcule o volume do cone cujo raio da base mede 4 cm e cuja altura mede 5 cm.

26 Determine a área da base de um cone de revolução de 6 cm de altura cujo volume é 128π cm^3.

27 Um cone circular reto tem 20 dm de altura e sua geratriz mede 25 dm. Determine a área total e o volume desse cone.

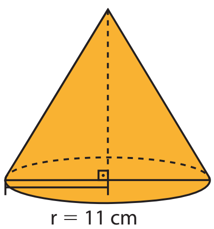
28 Em alguns comércios, encontramos "guarda--chuvas" de chocolate.

EXPERIENCIAGASTRONOMICA.WORDPRESS.COM

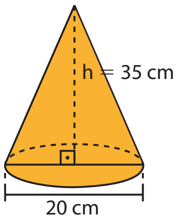
Considere que cada guarda-chuva tem o formato de um cone circular reto com 4 cm de diâmetro da base e 6 cm de altura. Sabendo que a densidade do cacau usado na fabricação desse chocolate é de 1,05 g/cm^3, determine a massa de cacau, em quilogramas, necessária para preparar 2 500 desses cones. Use $\pi \simeq 3,1$.

29 Calcule a área lateral, a área total e o volume de cada um dos sólidos, cujas medidas estão indicadas.

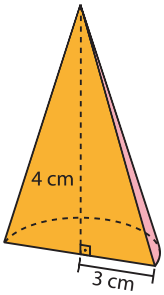
a) cone equilátero



b) cone reto



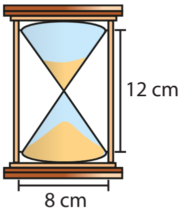
c) semicone



30 Dona Charlote produz sobremesas para eventos como casamentos e aniversários. Para produzir uma *mousse* de maracujá, ela utilizou um recipiente cilíndrico cujas medidas internas do diâmetro e da altura são, respectivamente, 0,4 m e 0,8 m. Depois distribuiu a *mousse* em copos com formato cônico invertido com 8 cm de medida do diâmetro, 18 cm de medida da altura e espessura desprezível. Considerando que o recipiente que dona Charlote utilizou estava completamente cheio, determine o número mínimo de copos de formato cônico necessários para fazer a transferência de toda a *mousse*.

31 Sabe-se que a seção meridiana de um cone circular reto é um triângulo isósceles de área igual a 36 cm^2. Se esse cone tem 15 cm de altura, qual é o seu volume?

32 A ampulheta é um instrumento constituído de dois vasos cônicos idênticos que se comunicam pelos vértices e é usada para medir o tempo mediante a passagem de certa quantidade de areia finíssima do vaso superior para o inferior.



CIT/ZAPT

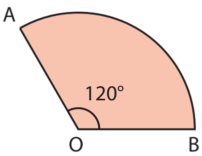
Considerando que a ampulheta mostrada na figura acima está inscrita em uma estrutura semelhante a um cilindro de 12 cm de altura e cujo diâmetro da base mede 8 cm, calcule o volume de ar existente no espaço compreendido entre o cilindro e os dois cones.

33 Qual é a medida do ângulo central de um setor circular obtido pela planificação da superfície lateral de um cone cuja geratriz mede 18 cm e o raio da base mede 3 cm?

34 Seja o triângulo retângulo cujos catetos medem 9 dm e 12 dm. Em cada caso seguinte, determine o volume do sólido gerado pela rotação desse triângulo, em torno:

a) do cateto menor; **b)** do cateto maior.

35 Um setor circular foi recortado de uma cartolina, de modo que o arco $\overset{\frown}{AB}$ desse setor mede 120° e tem comprimento igual a $\frac{10\pi}{3}$ cm.



Fazendo-se coincidir os pontos **A** e **B**, obtemos a superfície lateral de um cone reto de vértice **O**. Qual é o volume desse cone?

36 O chapéu do bruxo mostrado na figura lembra a superfície lateral de um cone de revolução de 12 cm de altura e 100π cm^3 de volume. Se ele é feito de cartolina, quanto desse material foi usado na sua confecção?

GRAPHORAMA

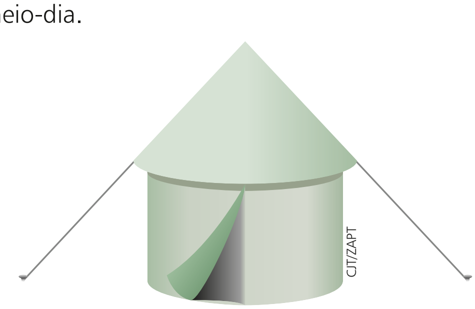
37 Para uma festa infantil do dia das bruxas foram encomendados 120 chapéus de bruxa idênticos, cada um confeccionado a partir de um semicírculo de 56 cm de diâmetro. Use $\pi \simeq 3$.

a) Que altura terá cada chapéu?

b) Sabendo que os semicírculos são recortados a partir de folhas quadradas de papel-cartão, cada uma com 56 cm de lado, determine a quantidade mínima, em metros quadrados, do material desperdiçado na confecção dos chapéus.

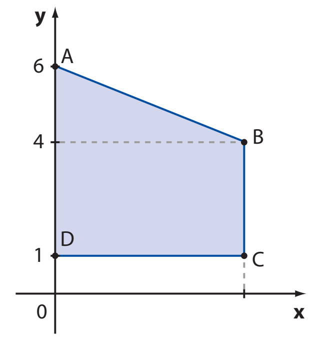
38 Em uma festa de casamento, serviram-se bebidas em taças em forma de cone reto, com base de diâmetro 4 cm e geratriz de medida $\sqrt{53}$ cm. Determine quantos litros de bebida foram necessários para encher as 600 taças que foram servidas nessa festa. Considere $\pi \simeq \dfrac{22}{7}$.

39 Sabe-se que a cúpula da barraca mostrada na figura tem a forma de um cone circular reto de 1,5 m de altura, no qual as medidas da geratriz e do raio da base somam 4,5 m. Determine a área da parte dessa barraca que fica exposta ao sol do meio-dia.



CIT/ZAPT

40 Girando-se o quadrilátero ABCD em torno do eixo **y**, obtemos um sólido cujo volume é $\dfrac{275\pi}{3}$ u.v. (unidades de medida de volume).



Qual é a abscissa do ponto **C**?

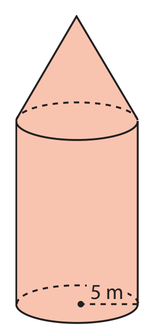
41 Dobrando-se, simultaneamente, as medidas da altura e do diâmetro de um cone circular reto, por quanto ficam multiplicados:

a) sua área total? **b)** seu volume?

42 Girando-se em torno da hipotenusa um triângulo de catetos com medidas $\sqrt{65}$ cm e $2\sqrt{26}$ cm, qual é o volume do sólido obtido?

43 Determine a medida da altura de um cone equilátero cuja área total é 54π m^2.

44 O silo representado ao lado possui altura total de 15 metros. Nele podem ser armazenados 325π m^3 de cereais. Determine:



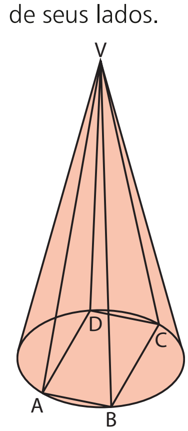
a) a medida da altura do cone;

b) o custo de fabricação do silo, sabendo que a chapa de aço utilizada em sua confecção custa R$ 200,00 por m^2. Considere $\pi \simeq 3{,}1$ e $\sqrt{34} \simeq 5{,}8$.

45 A altura de um triângulo equilátero mede $6\sqrt{3}$ cm. Determine o volume do sólido gerado pela rotação desse triângulo em torno de um de seus lados.

46 Na figura, VABCD é uma pirâmide regular quadrangular cuja base está inscrita na base do cone de vértice **V**.

Determine a razão entre o volume da pirâmide e o volume do cone, nesta ordem.



TROQUE IDEIAS

O volume do cone e as funções

Um fabricante de funis metálicos para óleo de motores de veículo (carros, caminhões, ônibus etc.) está analisando a possibilidade de lançar uma nova linha de funis em formato aproximado de cone circular reto, em vários tamanhos.

Primeiramente, ele pensou em manter fixa a medida do raio do cone em 10 cm e variar a medida da altura. Intuitivamente, ele sabe que, quanto maior for a medida da altura, maior será o volume de óleo que o funil comportará. Vamos analisar essa relação.

Foram consideradas quatro possibilidades, como mostra a tabela seguinte:

	Modelo I	Modelo II	Modelo III	Modelo IV
Raio	10 cm	10 cm	10 cm	10 cm
Altura	5 cm	10 cm	12 cm	15 cm

a) Para cada modelo apresentado, calcule o volume de óleo que o funil comportaria.

b) Mantida constante a medida do raio, o volume **V** do cone varia apenas em função da medida **h** de sua altura. Qual é a lei da função que relaciona **V** e **h**? Como classificamos essa função?

c) Em seu caderno, faça o gráfico de $V \times h$. Para facilitar, considere $\pi \simeq 3$ e use "escalas" diferentes nos dois eixos.

O fabricante pretende agora estudar novas possibilidades de tamanho para o funil. Ele vai manter fixa a medida da altura em 15 cm e variar a "boca" do funil, alterando a medida de seu raio, como mostra a tabela seguinte:

	Modelo I	Modelo II	Modelo III	Modelo IV
Altura	15 cm	15 cm	15 cm	15 cm
Raio	5 cm	10 cm	15 cm	20 cm

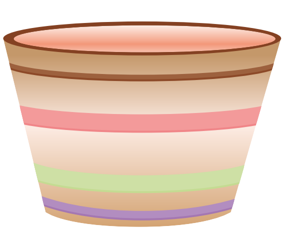
d) Para cada modelo apresentado, calcule o volume do cone.

e) Se a medida **h** da altura é mantida fixa, o volume **V** do cone varia apenas em função da medida **r** do raio da base. Qual é a lei da função que relaciona **V** e **r**? Como classificamos essa função? **V** e **r** são grandezas diretamente proporcionais?

f) Nessas condições, represente, em seu caderno, o gráfico de $V \times r$. Para facilitar, considere $\pi \simeq 3$ e preste atenção nas escalas escolhidas nos dois eixos.

Tronco de cone

Observe as figuras seguintes:


vaso


cúpula do abajur

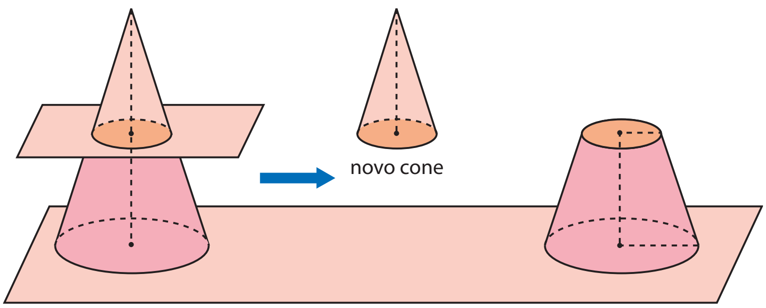
copo

Elementos sem proporção entre si.

Elas lembram a forma de um sólido denominado **tronco de cone**, o qual vamos estudar agora.

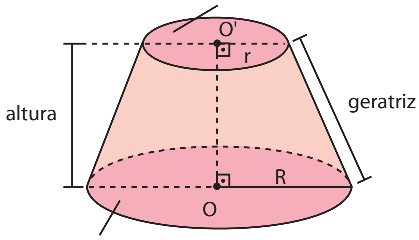
Quando secionamos um cone circular reto, por um plano paralelo à base (supondo que o plano não contém o vértice do cone), ele fica dividido em dois sólidos:

- o sólido que contém o vértice é um novo cone, obtido pelo secionamento;
- o sólido que contém a base do cone original é um tronco de cone de bases paralelas.



Façamos a identificação dos principais elementos de um tronco de cone:

- **base maior do tronco**: é a base do cone original ou primitivo.
- **base menor do tronco**: é a seção determinada pelo plano ao intersectar o cone. Essa seção é um círculo e corresponde à base do novo cone.
- **altura do tronco**: é a distância entre os planos das bases.
- **geratriz do tronco**: é um segmento contido em uma geratriz do cone original, cujas extremidades são pontos das circunferências das bases (sendo um ponto em cada base).



Áreas

- Área da base maior ($\mathbf{A_B}$)

A área do círculo de raio de medida **R** é chamada **área da base maior** do tronco.

Logo:

$$A_B = \pi R^2$$

- Área da base menor ($\mathbf{A_b}$)

A área do círculo de raio de medida **r** recebe o nome de **área da base menor** do tronco.

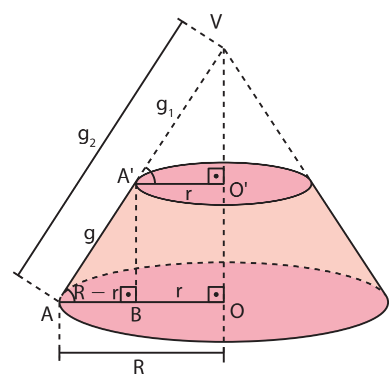
Logo:

$$A_b = \pi r^2$$

- Área lateral ($\mathbf{A_\ell}$)

A superfície lateral de um tronco de cone é a reunião das geratrizes do tronco. A área dessa superfície é a **área lateral** do tronco.

A fórmula que permite calcular $\mathbf{A_\ell}$ pode ser obtida subtraindo-se da área lateral do cone original a área lateral do novo cone, obtido pelo secionamento, ou seja:



$$A_\ell = \pi R g_2 - \pi r g_1$$
$$A_\ell = \pi R \cdot (g_1 + g) - \pi r g_1$$
$$A_\ell = \pi[R \cdot g + (R - r) \cdot g_1] \quad (1)$$

Os triângulos VA'O' e A'AB são semelhantes; por isso, podemos escrever:

$$\frac{VA'}{A'A} = \frac{A'O'}{AB} \Rightarrow \frac{g_1}{g} = \frac{r}{R - r} \Rightarrow g_1 = \frac{r \cdot g}{R - r} \quad 2$$

Substituindo 2 em 1, obtemos:

$$A_\ell = \pi\left[R \cdot g + \cancel{(R - r)} \cdot \frac{r \cdot g}{\cancel{R - r}}\right] = \pi[R \cdot g + r \cdot g] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{A_\ell = \pi \cdot g \cdot (R + r)}$$

- Área total (**A_t**)

A **área total** é igual à soma das áreas das duas bases com a área lateral.

$$\boxed{A_t = A_B + A_b + A_\ell}$$

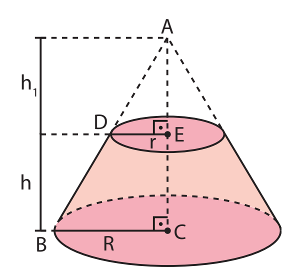
Volume

Considere um tronco de cone de bases paralelas, cuja medida da altura é **h**. Sendo **R** a medida do raio da base maior e **r** a medida do raio da base menor, então o volume **V** do tronco é:

$$\boxed{V = \frac{\pi \cdot h}{3} \cdot [R^2 + R \cdot r + r^2]}$$

Demonstração:

O volume **V** do tronco de cone é obtido pela diferença entre os volumes dos dois cones, ou seja:



$$V = \underbrace{\frac{1}{3} \cdot \pi R^2 \cdot (h + h_1)}_{\substack{\text{volume do cone original} \\ \text{(ou primitivo)}}} - \underbrace{\frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h_1}_{\substack{\text{volume do} \\ \text{novo cone}}}$$

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot [R^2 \cdot h + (R^2 - r^2) \cdot h_1] \quad 1$$

Como os triângulos ACB e AED são semelhantes, temos:

$$\frac{h_1 + h}{h_1} = \frac{R}{r} \Rightarrow h_1R - h_1r = hr \Rightarrow h_1 = \frac{h \cdot r}{R - r} \quad 2$$

Substituindo 2 em 1, obtemos:

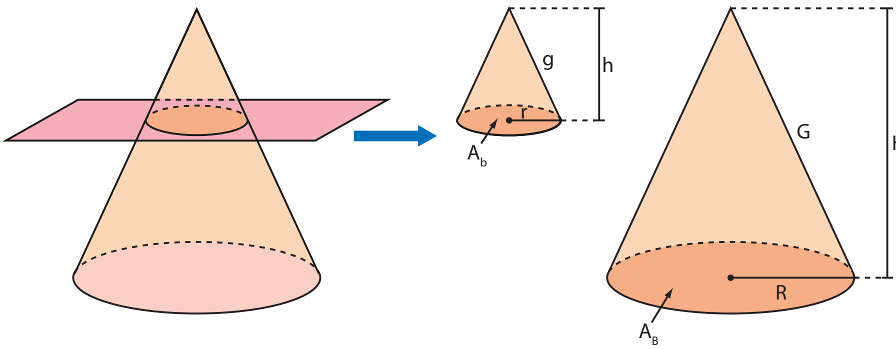
$$V = \frac{\pi}{3} \cdot \left[R^2 \cdot h + (R^2 - r^2) \cdot \frac{h \cdot r}{R - r}\right]$$

Como $R^2 - r^2 = (R + r) \cdot (R - r)$, então:

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot [R^2 \cdot h + (R + r) \cdot hr] \Rightarrow V = \frac{\pi h}{3} \cdot [R^2 + Rr + r^2]$$

Cones semelhantes

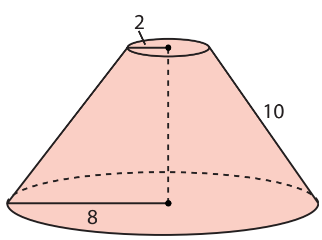
Já vimos que, quando um cone circular reto é secionado por um plano paralelo à sua base (o plano não contém o vértice do cone), ele fica dividido em um tronco de cone e em um novo cone. Podemos notar que os dois cones (o original e o novo, obtido pelo secionamento) são semelhantes; assim, todas as propriedades estudadas para pirâmides semelhantes podem ser estendidas para cones semelhantes:



- razão entre elementos lineares: $\frac{h}{H} = \frac{g}{G} = \frac{r}{R} = k$
- razão entre áreas: $\frac{A_b}{A_B} = k^2$; $\frac{A_\ell}{A_L} = k^2$; $\frac{A_t}{A_T} = k^2$
- razão entre volumes: $\frac{v}{V} = k^3$

EXEMPLO 5

Calculemos a área lateral, a área total e o volume de um tronco de cone reto cuja geratriz mede 10 cm e os raios das bases medem 8 cm e 2 cm, respectivamente.



- Área lateral, em cm²:

$A_\ell = \pi(R + r) \cdot g \Rightarrow A_\ell = \pi(8 + 2) \cdot 10 \Rightarrow A_\ell = 100\pi$

Logo, a área lateral desse tronco de cone é 100π cm².

- Área total:

$$A_t = A_\ell + A_B + A_b$$

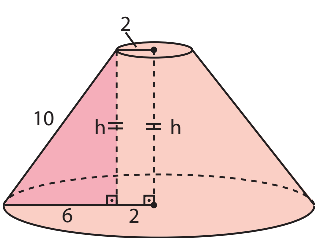
em que $A_B = \pi \cdot (8 \text{ cm})^2 = 64\pi \text{ cm}^2$ e $A_b = \pi \cdot (2 \text{ cm})^2 = 4\pi \text{ cm}^2$.

Logo, $A_t = 100\pi + 64\pi + 4\pi = 168\pi \Rightarrow A_t = 168\pi \text{ cm}^2$

Portanto, a área total é 168π cm².

- Volume:

É preciso, inicialmente, determinar a medida **h** da altura do tronco:



$10^2 = h^2 + 6^2$

$100 - 36 = h^2$

$h^2 = 64 \Rightarrow h = 8$ cm

O volume desse tronco pode ser obtido com ou sem o uso da fórmula:

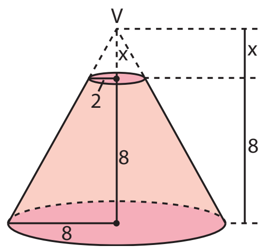
- Usando a fórmula:

$V = \frac{\pi h}{3}[R^2 + Rr + r^2]$

$V = \frac{\pi \cdot 8}{3}[8^2 + 8 \cdot 2 + 2^2] = \frac{\pi \cdot 8}{3} \cdot 84 = 224\pi \Rightarrow V = 224\pi \text{ cm}^3$

- Sem a fórmula:
  Imaginemos o cone original e o cone "retirado" correspondentes a esse tronco.
  Como os cones são semelhantes, vamos comparar as medidas de seus elementos lineares (raio da base e altura):
  $$\frac{8}{2} = \frac{8 + x}{x} \Rightarrow 4 = \frac{8 + x}{x} \Rightarrow x = \frac{8}{3} \text{ cm}$$
- Volume do cone original: $\frac{1}{3}\pi \cdot 8^2 \cdot \left(8 + \frac{8}{3}\right) = \frac{2\,048\pi}{9}$ cm³
- Volume do cone "retirado": $\frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 \cdot \frac{8}{3} = \frac{32\pi}{9}$ cm³

  O volume do tronco é: $\frac{2\,048\pi}{9}\text{ cm}^3 - \frac{32\pi}{9}\text{ cm}^3 = \frac{2\,016\pi}{9}\text{ cm}^3 = 224\pi\text{ cm}^3$

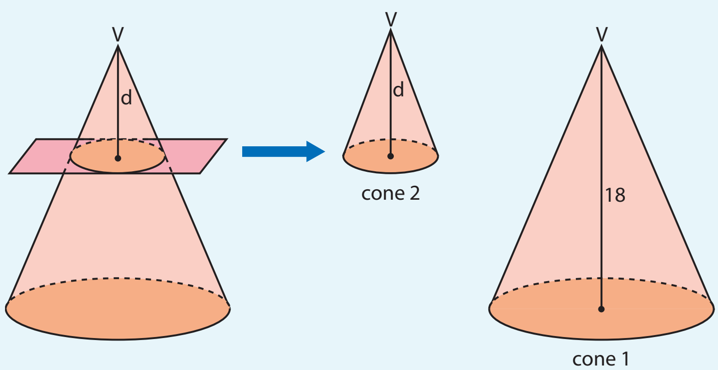


EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

4 Um cone circular reto tem 18 dm de altura. A que distância de seu vértice deve passar um plano paralelo à base, de modo que o volume desse cone seja oito vezes o volume do novo cone, obtido pelo secionamento?

Solução:

Sejam:
- **d**: distância do vértice **V** do cone ao plano
- $\mathbf{V_1}$: volume do cone "primitivo"
- $\mathbf{V_2}$: volume do novo cone



Temos:

$$V_1 = 8 \cdot V_2 \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = 8 \Rightarrow k^3 = 8 \Rightarrow k = \sqrt[3]{8} = 2$$

O valor encontrado para **k** significa que a razão entre um elemento linear do cone "primitivo" e seu homólogo do novo cone obtido é igual a 2.

Desse modo, comparando as medidas das alturas dos dois cones, temos:

$$\frac{18}{d} = 2 \Rightarrow d = 9$$

Portanto, a distância do vértice ao plano é 9 dm.

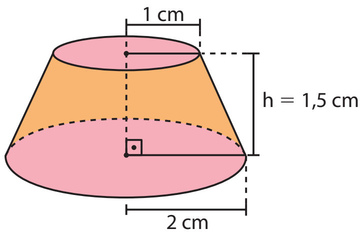
PENSE NISTO:

Qual a razão entre a área da base do cone 1 e a área da base do cone 2?

EXERCÍCIOS

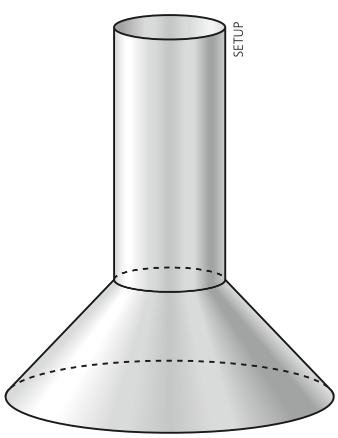
FAÇA NO CADERNO

47 Obtenha o volume e a área total do tronco de cone abaixo.



48 Determine o volume de um tronco de cone reto, sabendo que a medida de sua geratriz é 29 cm e que os raios das bases medem 10 cm e 30 cm, respectivamente.

49 A coifa abaixo é constituída de um cilindro reto, com 0,40 m de altura e 0,20 m de raio da base, acoplado a um tronco de cone reto, cuja medida da altura é igual à medida do raio da base maior e cuja geratriz mede $\frac{\sqrt{5}}{5}$ m.

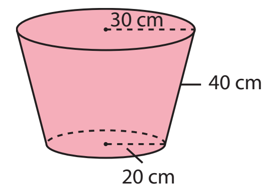


Considerando a superfície total da coifa como a reunião das superfícies laterais do cilindro e do tronco de cone, determine a sua área total.

50 Em uma estufa, determinadas mudas de espécies vegetais são plantadas em vasos de vidro, cada um em forma de paralelepípedo retorretângulo, cujas dimensões são 40 cm, 30 cm e 20 cm.

Deseja-se transferir a terra desses recipientes (que se encontram completamente cheios) para um outro, cujos formato e dimensões são dados a seguir.

Qual é o número mínimo de vasos de vidro necessários para encher completamente de terra o novo recipiente?



Use $\pi \simeq 3$ e $\sqrt{15} \simeq 3{,}9$. Considere desprezível a espessura do vidro.

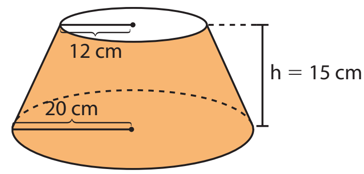
51 Um cone de 10 cm de altura é intersectado, a 4 cm de seu vértice, por um plano paralelo à sua base, determinando uma seção de área 36π m^2. Determine:

a) a área da base do cone;

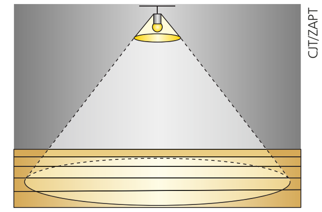
b) os volumes dos dois cones;

c) a razão entre as geratrizes do cone original e do cone obtido na seção, nessa ordem.

52 Uma fábrica produz abajures cuja cúpula, feita em tecido rústico, tem a forma de um tronco de cone de bases paralelas e cujas dimensões estão indicadas na figura. Sabe-se que o custo de confecção da cúpula é de R$ 250,00/m^2 e o custo de fabricação do pé do abajur é de R$ 40,00. Qual é o custo total de fabricação de um lote com 125 abajures? Considere $\pi \simeq 3{,}1$.



53 Um quebra-luz, cuja forma é um cone com 3 dm de altura e 5 dm de raio da base, tem presa, em seu vértice, uma lâmpada de comprimento desprezível. Em certo momento, esta projeta, no chão, um círculo de área 400π dm^2. A que distância do chão encontra-se a lâmpada?



54 Os raios das bases de um tronco de cone de revolução medem 6 m e 4 m. Determine a altura desse tronco para que a área total seja o dobro da área lateral.

Esfera

Observe os objetos seguintes:

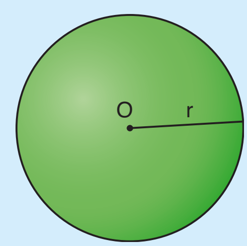
FOTOS: THINKSTOCK/GETTY IMAGES

M.C.ESCHER.SELF PORTRAIT IN SPHERICAL MIRROR,1935/M.C. ESCHER MUSEUM

Autorretrato no espelho esférico. Litografia de 1935 do artista holandês M. C. Escher, exposta no museu M. C. Escher, Holanda.

Todos eles lembram a forma de uma esfera, sólido que passaremos a estudar agora.

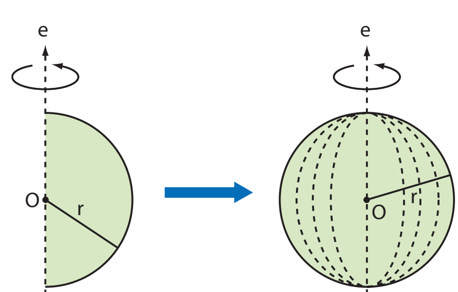
Consideremos um ponto **O** e um segmento de medida **r**. Denomina-se **esfera** de centro **O** e raio **r** o conjunto dos pontos do espaço cuja distância ao ponto **O** é menor ou igual a **r**.



É importante diferenciarmos esfera de superfície esférica: a **superfície esférica** de centro **O** e raio **r** é o conjunto de pontos do espaço cuja distância ao ponto **O** é igual a **r**.

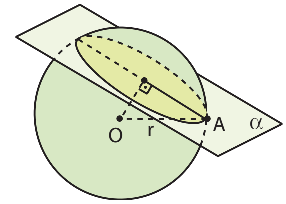
OBSERVAÇÕES

- A **superfície esférica** de centro **O** e raio **r** é a superfície gerada pela rotação de uma semicircunferência em torno de um eixo que contém seu diâmetro.
- A **esfera** de centro **O** e raio **r** é o sólido de revolução gerado pela rotação de um semicírculo em torno de um eixo que contém o diâmetro.



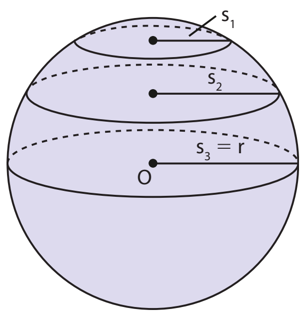
Seção de uma esfera

Quando um plano α intersecta, em mais de um ponto, uma esfera de centro **O** e raio de medida **r**, o conjunto de pontos comuns ao plano e à esfera é um **círculo**, como mostra a figura ao lado.



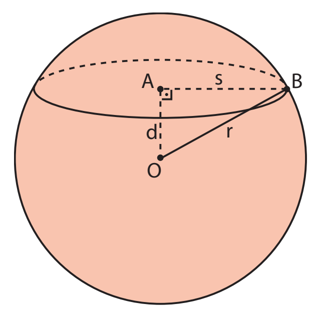
Dizemos, assim, que toda seção plana de uma esfera é um círculo. A medida do raio desse círculo varia de acordo com a distância do plano α ao centro **O**. Quanto mais próximo de **O** o plano α intersectar a esfera, maior será a medida **s** do raio da seção. Se α passar pelo centro **O**, o raio da seção determinada será o próprio raio da esfera e, nesse caso, a seção recebe o nome de **círculo máximo da esfera**.

Acompanhe a figura abaixo.



EXEMPLO 6

Suponha que um plano α intersecte uma esfera, a 5 cm de seu centro, determinando nela um círculo de raio 12 cm. Vamos encontrar a medida do raio dessa esfera.



Sejam:

d: distância de α ao centro **O**; d = 5 cm

s: medida do raio da seção; s = 12 cm

r: medida do raio da esfera

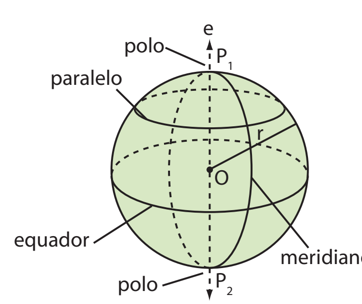
No $\triangle AOB$ temos:

$r^2 = s^2 + d^2 \Rightarrow r^2 = 12^2 + 5^2 \Rightarrow r^2 = 144 + 25 \Rightarrow r^2 = 169 \Rightarrow r = 13$ cm

Assim, o raio da esfera mede 13 cm.

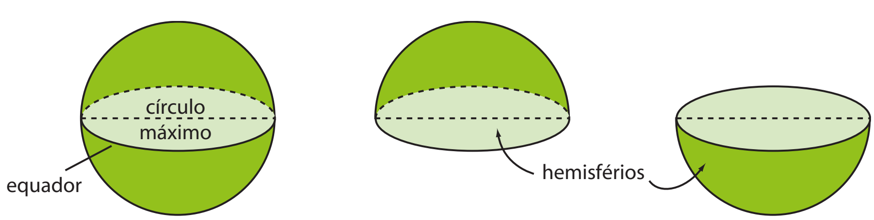
Elementos de uma esfera

Observando a figura ao lado, vamos caracterizar os elementos de uma esfera de centro **O**, raio **r** e eixo de rotação **e**.



- **Polos**: os polos $\mathbf{P_1}$ e $\mathbf{P_2}$ correspondem aos pontos de interseção da superfície esférica com o eixo **e**.
- **Equador**: é a circunferência do círculo (seção) obtido ao se intersectar a esfera por um plano perpendicular ao eixo **e**, pelo centro da esfera.

  O círculo associado ao equador (círculo máximo da esfera) divide a esfera em duas "partes" iguais, conhecidas como hemisférios ou semiesferas.




THINKSTOCK/GETTY IMAGES

As duas metades de uma laranja, como na foto ao lado, remetem à ideia de hemisférios.

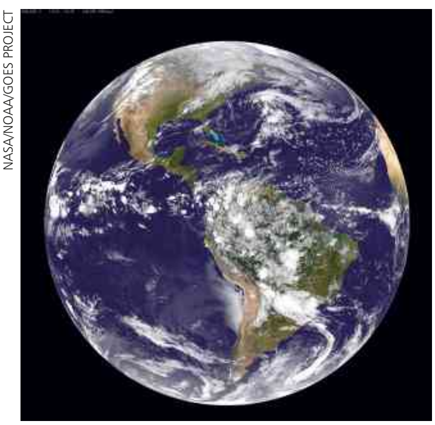
- **Paralelo**: é a circunferência do círculo obtido ao se intersectar a esfera por um plano perpendicular ao eixo **e**.

  O plano que contém um paralelo é paralelo ao plano que contém o equador.
- **Meridiano**: é a circunferência do círculo obtido ao se intersectar a esfera por um plano que contém o seu eixo.

OBSERVAÇÃO

Sabemos que o planeta Terra não tem a forma exata de uma esfera, devido a um achatamento nos polos. No entanto, é comum considerar seu formato aproximadamente esférico. Nesse sentido, observe que a caracterização dos elementos de uma esfera está relacionada às linhas imaginárias do nosso planeta, estudadas em Geografia, que servem para localizar pontos na superfície esférica da Terra e também definir os 24 fusos horários.
Procure visualizar, em um globo terrestre, os seguintes elementos: polo Norte e polo Sul, hemisfério Norte e hemisfério Sul, linha do Equador, trópico de Câncer e trópico de Capricórnio, e o meridiano de Greenwich. Estabeleça uma relação entre esses elementos e os elementos de uma esfera.

NASA/NOAA/GOES PROJECT



Nosso planeta não tem a forma exata de uma esfera.

PENSE NISTO:

Se o raio da Terra mede aproximadamente 6 370 km, quantos quilômetros mede a linha do Equador?

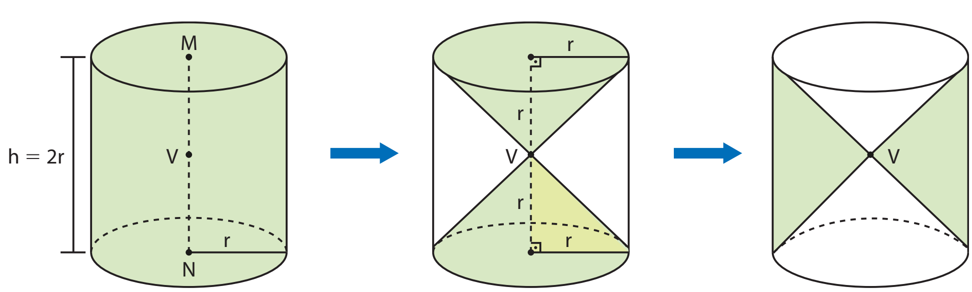
Volume da esfera

O volume **V** de uma esfera de raio **r** é dado por: $V = \dfrac{4\pi r^3}{3}$

Demonstração:

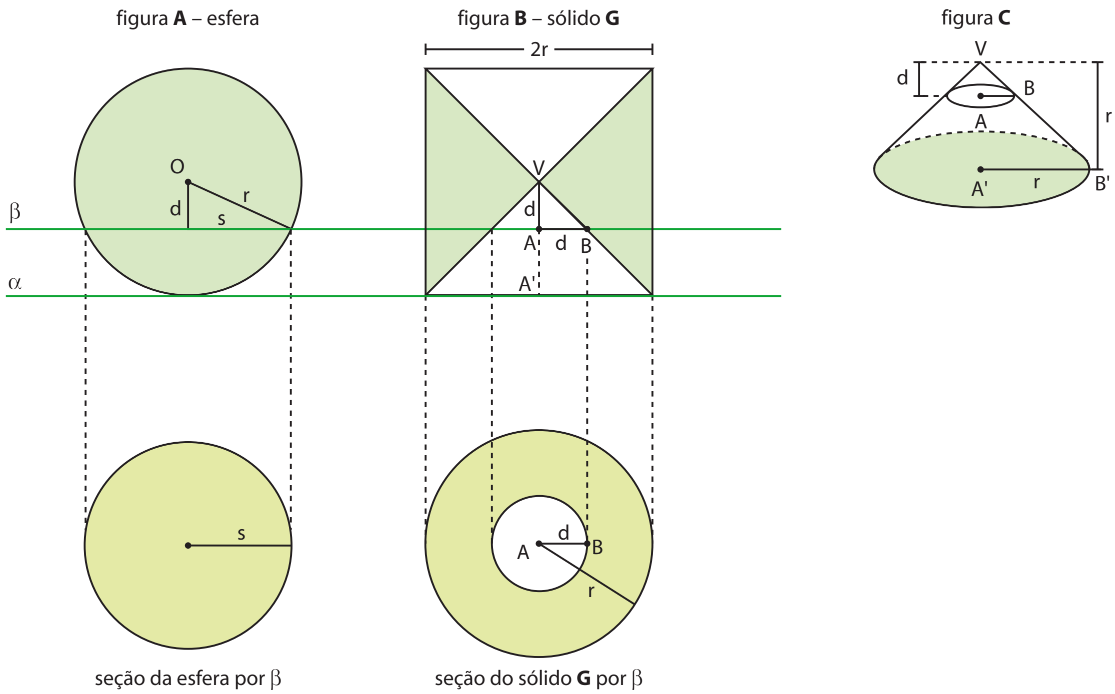
Vamos tomar um cilindro equilátero, cujo raio da base mede **r** e a altura mede **2r**.

Seja **V** o ponto médio do segmento $\overline{MN}$, contido no eixo do cilindro. Desse cilindro retiramos dois cones cujas bases coincidem com as bases do cilindro. Esses cones têm como vértice comum o ponto **V**, e a medida de suas alturas é **r**, como mostra a sequência de figuras abaixo. O sólido geométrico obtido será indicado por **G**.



cilindro equilátero — dois cones retirados — sólido **G**

Considere agora uma esfera de raio **r** e o sólido **G** obtido anteriormente. Imagine que essa esfera seja tangente a um plano α e que o cilindro original descrito tenha uma das bases contida em α.



Quando um plano β, paralelo a α, intersecta a esfera a uma distância **d** de seu centro, ele determina nela um círculo de raio **s** cuja área é:

$$\pi s^2 = \pi \cdot (r^2 - d^2) \quad \text{(1)} \quad \text{(Veja a figura } \textbf{A}.)$$

O plano β, naturalmente, também intersecta o sólido **G**, a uma distância **d** de **V**, determinando, como seção, uma coroa circular. Essa coroa circular é limitada por duas circunferências: uma de raio **r** e a outra de raio **d**, com $r > d$, cuja área é dada por:

$\pi \cdot (r^2 - d^2)$ (2) (Observe nas figuras **B** e **C** que o triângulo VAB é isósceles e, portanto, $AB = d$.)

Por (1) e (2), concluímos que as áreas das seções na esfera e no sólido **G** são iguais. Logo, pelo princípio de Cavalieri, a esfera e o sólido **G** têm o mesmo volume.

O volume do sólido **G** pode ser calculado por:

$$V_G = V_{cilindro} - 2 \cdot V_{cone}$$

$$V_G = \underbrace{\pi \cdot r^2}_{A_b} \cdot \underbrace{2r}_{h} - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \underbrace{\pi \cdot r^2}_{A_b} \cdot \underbrace{r}_{h} \Rightarrow V_G = 2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3 \Rightarrow V_G = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Segue, daí, que o volume da esfera também é dado por: $V_{esfera} = \dfrac{4\pi r^3}{3}$

EXEMPLO 7

Quantos litros de gás pode conter um reservatório industrial em formato esférico e com raio interno medindo 2 m?

É preciso calcular o volume de uma esfera cujo raio mede 2 m:

$V = \dfrac{4}{3}\pi \cdot 2^3 = \dfrac{32\pi}{3}$ ou aproximadamente 33,49 m^3 (usamos $\pi \simeq 3{,}14$).

Logo, o reservatório pode conter aproximadamente 33 490 litros de gás.

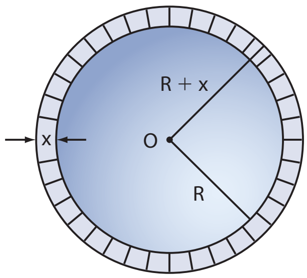
Área da superfície esférica

Diferentemente do cilindro e do cone, a esfera é um corpo redondo cuja superfície não pode ser planificada, isto é, não é possível "colocar" a superfície de uma esfera em um plano sem dobrá-la nem esticá-la.

A seguir, veja uma justificativa para a fórmula da área de uma superfície esférica, cuja demonstração formal exige conhecimentos mais avançados.

Seja uma esfera de centro **O**, raio de medida **R** e área da superfície igual a **A**.

Dado um número real positivo **x**, vamos considerar a esfera de centro **O** e raio de medida R + x. Observe as duas esferas concêntricas na figura ao lado.



O sólido limitado por essas duas esferas é uma espécie de "casca" formada por segmentos de reta cujo comprimento é **x**.

Intuitivamente, vamos imaginar a superfície da primeira esfera como uma "placa sólida de espessura suficientemente pequena" (essa ideia pode ser estendida para qualquer superfície).

Assim, para valores de **x** cada vez mais próximos do zero (indica-se $x \to 0$ e lê-se "x tende a zero"), o volume **V** do sólido limitado pelas duas esferas é aproximadamente igual a $A \cdot x$, em que **A** é a área da superfície esférica cujo raio mede **R**.

Expressando também **V** como a diferença entre os volumes das duas esferas, temos:

$$A \cdot x = \frac{4\pi}{3}(R + x)^3 - \frac{4\pi}{3}R^3$$

$$A \cdot x = \frac{4\pi}{3}(R^3 + 3R^2x + 3Rx^2 + x^3 - R^3)$$

$$A \cdot x = \frac{4\pi}{3}x \cdot (3R^2 + 3Rx + x^2)$$

$$A = \frac{4\pi}{3} \cdot (3R^2 + 3Rx + x^2)$$

Se x tende a 0, as parcelas $3Rx$ e x^2 também tendem a zero e daí:

$$A = \frac{4\pi}{3} \cdot 3R^2 = 4\pi R^2$$

Assim, a área de uma superfície esférica de raio de medida **R** é dada por:

$$\boxed{A = 4\pi R^2}$$

EXEMPLO 8

Uma indústria recebeu uma encomenda para a confecção de 5 000 bolinhas de pingue-pongue. O plástico usado na confecção das bolinhas custa R$ 5,00 o metro quadrado. Se o diâmetro de uma bolinha é de 3 cm, qual é o custo mínimo da indústria com o material para essa encomenda? Vamos usar 3,14 como aproximação de π.

O raio de cada bolinha mede:

$$r = \frac{3}{2}\text{ cm} = 1{,}5\text{ cm}$$

A área da superfície de uma bolinha é:

$$4\pi \cdot (1{,}5\text{ cm})^2 = 9\pi\text{ cm}^2 = 9 \cdot 3{,}14\text{ cm}^2 = 28{,}26\text{ cm}^2$$

Para confeccionar as 5 000 bolinhas, são necessários, no mínimo:

$$5\,000 \cdot (28{,}26\text{ cm}^2) = 141\,300\text{ cm}^2 = 14{,}13\text{ m}^2$$

O custo em reais para a confecção das bolinhas é:

$$14{,}13 \cdot 5 = 70{,}65\text{, ou seja, R\$ }70{,}65$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

5 A superfície de uma bolha de sabão, de formato esférico, tem 36π cm^2 de área. Qual é o volume de ar contido nessa bolha?

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Solução:

Com base na informação sobre a área da superfície esférica, é possível encontrar a medida **r** de seu raio:

$$A = 36\pi \Rightarrow 4\pi r^2 = 36\pi \Rightarrow r^2 = 9 \Rightarrow r = 3 \text{ cm}$$

O volume de ar contido na bolha corresponde ao volume da esfera, ou seja:

$$V = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4\pi \cdot 3^3}{3} \Rightarrow V = 36\pi \text{ cm}^3$$

Portanto, $V = 36\pi$ cm^3.

PENSE NISTO:

Nesse exercício, você pode constatar que a área da superfície de uma esfera de raio 3 e o volume da esfera são numericamente iguais. Essa coincidência ocorre para algum outro valor de **r**?

6 Duas esferas de gelo cujos raios medem 2 cm e 1 cm são derretidas. A água obtida pela fusão (passagem do estado sólido para o líquido) é colocada integralmente em um recipiente cúbico de vidro cuja aresta mede 4 cm. Qual é o nível, em centímetros, atingido pela água nesse recipiente? Considere $\pi \simeq 3{,}1$ e despreze a espessura do vidro.

Solução:

O volume total de água obtida por derretimento corresponde à soma dos volumes das duas esferas, ou seja:

$$V = \frac{4\pi \cdot 2^3}{3} + \frac{4\pi \cdot 1^3}{3} = \frac{32\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} \Rightarrow V = 12\pi \text{ cm}^3 = 37{,}2 \text{ cm}^3$$

A área da base do recipiente cúbico é $(4 \text{ cm})^2 = 16$ cm^2.

Assim, considerando **x** o nível, em centímetros, que a água atinge no recipiente temos:

$$A_b \cdot x = 37{,}2 \Rightarrow 16 \cdot x = 37{,}2 \Rightarrow x \simeq 2{,}3 \text{ cm}$$

Portanto, a água atinge o nível de 2,3 cm nesse recipiente.

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

55 Se uma esfera tem 12 cm de diâmetro, qual é a área de sua superfície e qual é o seu volume?

56 Calcule o volume de uma esfera, sabendo que a área de sua superfície é igual a 576π cm^2.

57 O raio de uma esfera mede 4 cm. Um plano que seciona essa esfera determina nela um círculo com raio de medida 1 cm. Determine a distância do plano ao centro da esfera.

58 Um plano intersecta uma esfera a uma distância do centro igual à medida do raio da seção que ele determina na esfera. Sabendo que o raio da esfera mede 4 cm, determine:

a) a área da seção;

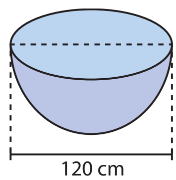
b) a área do círculo máximo dessa esfera;

c) a área da superfície esférica.

59 Uma esfera oca tem 1 dm de raio exterior e 1 cm de espessura. Qual é o volume da parte oca da esfera?

60 Um recipiente, na forma de paralelepípedo retângulo, está completamente cheio de terra. Suas dimensões são 4 m de comprimento, 2 m de largura e 1 m de altura. Deseja-se distribuir toda a terra do recipiente em vasos idênticos, cada um com a forma de um hemisfério, como mostra a figura. Qual é o número mínimo de vasos que serão necessários?

Use $\pi \simeq 3{,}14$.



61 Duas esferas são concêntricas, e seus raios medem 4 cm e 2 cm, respectivamente. Um plano tangente à esfera menor intersecta a outra esfera, determinando uma seção **S**.

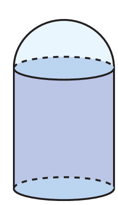
a) Qual é a área de **S**?

b) Qual é o comprimento da circunferência de **S**?

62 A área de uma superfície esférica é 144π cm^2. Em quantos centímetros deve-se aumentar a medida do raio para que a área da superfície passe a ser 256π cm^2?

63 Um plano intersecta uma esfera determinando uma seção de área 36π cm^2. Sabendo que a área da superfície dessa esfera é 400π cm^2, determine a distância do centro da esfera ao plano.

64 A figura mostra um reservatório industrial de aço usado para armazenamento de cereais, conhecido como silo.



Ele é formado por um cilindro circular reto, com 8 m de altura e raio interno da base 2 m, encimado por uma semiesfera.

Usando $\pi \simeq 3{,}1$, responda:

a) Quantos metros quadrados de aço são gastos na confecção desse silo?

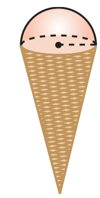
b) Quantos metros cúbicos de cereais o silo pode armazenar?

65 Um joalheiro necessita confeccionar uma esfera de ouro cuja medida do raio seja 3 cm. Ele dispõe de algumas esferas menores do mesmo material, cada qual com raio de medida 2 cm.

a) Determine o número mínimo de esferas menores a serem fundidas para que ele possa confeccionar a esfera maior.

b) A sobra do ouro fundido, nas condições do item *a*, será vendida ao preço de R$ 140,00 por grama. Sabendo que a densidade do ouro é de 19,3 g/cm^3, determine o valor que será arrecadado com a venda da sobra. Considere $\pi \simeq 3$.

66 A casquinha de um sorvete tem a forma de um cone circular reto, com $\sqrt{241}$ cm de geratriz e 8 cm de diâmetro da base. Uma bola de sorvete foi servida, de modo que a parte que ficou visível corresponde a uma semiesfera, como mostra a figura.


CJT/ZAPT

Determine quantos centímetros cúbicos da casquinha não contêm sorvete. Considere $\pi \simeq 3$.

67 Uma esfera de raio **r** tem volume **V** e a área de sua superfície é **A**. Expresse, em função de **V** e de **A**, o volume e a área da superfície da esfera obtida em cada um dos seguintes casos:

a) **r** é dobrado;

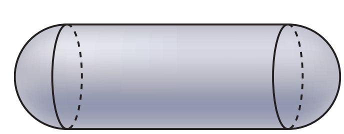
b) **r** é reduzido à sua terça parte.

68 Para enfeite de Natal, Silvana colocou, em um recipiente de vidro na forma de cone circular reto, 200 bolinhas de mesmo tamanho coloridas e maciças e preencheu o espaço vazio com um líquido colorido. As medidas do diâmetro da base e da altura do recipiente são 20 cm e 30 cm, respectivamente, e a medida do diâmetro de cada bolinha é 3 cm. Considere $\pi \simeq 3{,}1$.

a) Determine o volume do líquido usado para preencher o recipiente.

b) Qual seria a resposta do item *a* caso Silvana tivesse comprado 200 bolinhas, cada qual com diâmetro medindo metade do diâmetro da bolinha utilizada?

69 Um aquecedor a gás tem a forma de um cilindro com duas semiesferas acopladas em suas extremidades, como mostra a figura.



Sabendo que o diâmetro da base do cilindro é 0,90 m e que o comprimento total do aquecedor é 1,90 m, calcule:

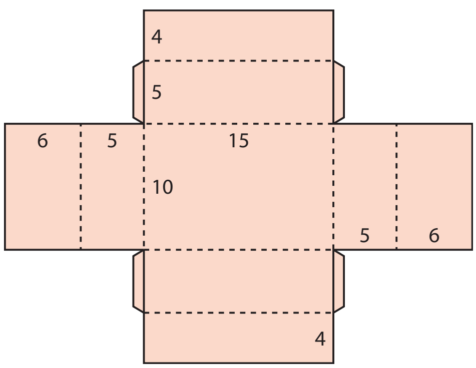
a) a área de sua superfície;

b) o volume máximo de gás que o seu interior pode conter, em litros.

Use $\pi \simeq 3$.

70 Uma pedra com formato esférico e 21 cm de medida do raio foi mergulhada em um tanque que tem a forma de um cilindro reto cujo raio da base mede 0,7 m. Considerando que o nível da água no tanque elevou-se **x** centímetros, sem que houvesse transbordamento, determine o valor de **x**.

71 (Enem-MEC) Um fabricante de brinquedos recebeu o projeto de uma caixa que deverá conter cinco pequenos sólidos, colocados na caixa por uma abertura em sua tampa. A figura representa a planificação da caixa, com as medidas dadas em centímetros.



Os sólidos são fabricados nas formas de:

I. um cone reto de altura 1 cm e raio da base 1,5 cm.

II. um cubo de aresta 2 cm.

III. uma esfera de raio 1,5 cm.

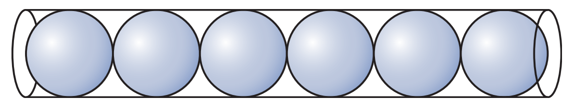
IV. um paralelepípedo retangular reto, de dimensões 2 cm, 3 cm e 4 cm.

V. um cilindro reto de altura 3 cm e raio da base 1 cm.

O fabricante não aceitou o projeto, pois percebeu que, pela abertura dessa caixa, só poderia colocar os sólidos dos tipos

a) I, II e III.
b) I, II e V.
c) I, II, IV e V.
d) II, III, IV e V.
e) III, IV e V.

72 Uma loja vende bolinhas de gude em embalagens cilíndricas, cada qual contendo seis unidades, conforme mostra a figura abaixo.



Se cada bolinha tem 2 cm de diâmetro, determine o volume do ar existente entre a embalagem e as bolinhas.

Considere $\pi \simeq 3{,}14$.

73 Um objeto de decoração tem a forma de uma esfera inscrita em um cubo. Se a área de uma face do cubo é 196 cm^2, determine a área da superfície esférica.

74 Um cubo oco de aresta de medida 20 cm contém em seu interior 8 esferas maciças iguais, tangentes entre si e tangentes também às paredes internas do cubo. Considere $\pi \simeq 3$ e determine:

a) a área do quadrilátero cujos vértices são quatro pontos de contato de 4 esferas com a base inferior do cubo;

b) o volume do sólido cujos vértices são os centros das 8 esferas.

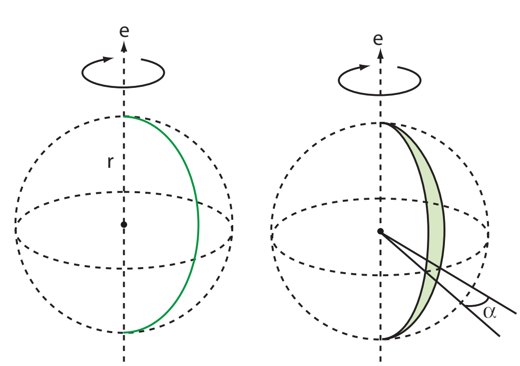
Partes da esfera

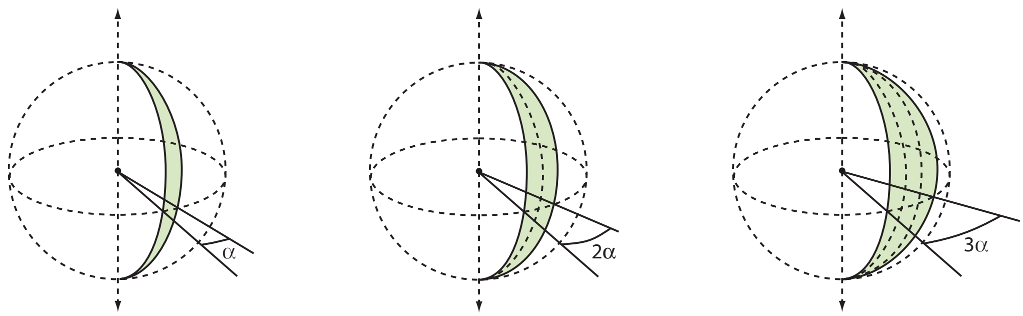
Fuso esférico

Fuso esférico é a superfície gerada pela rotação de uma semicircunferência, a qual gira α graus ($0° < \alpha \leqslant 360°$) em torno do eixo que contém seu diâmetro.

Quando α é dobrado, a área do fuso é dobrada; triplicando α, também a área do fuso é triplicada; e assim sucessivamente. No caso de $\alpha = 360°$, o fuso transforma-se na superfície da esfera, cuja área é $A = 4\pi r^2$.

De modo geral, a área do fuso é proporcional a α e, portanto, pode ser calculada por uma regra de três simples.





Vejamos como ficam as expressões da área de um fuso em função da medida (α) do ângulo de giro, em graus e radianos:

Para α em graus:

$$\left.\begin{array}{r} 360° — 4\pi r^2 \\ \alpha — A_{fuso} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{A_{fuso} = \frac{\pi r^2 \alpha}{90°}}$$

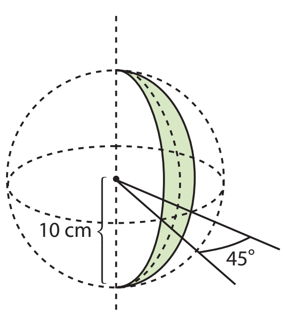
Para α em radianos:

$$\left.\begin{array}{r} 2\pi \text{ rad} — 4\pi r^2 \\ \alpha — A_{fuso} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{A_{fuso} = 2r^2\alpha}$$

Essas expressões não precisam ser memorizadas, pois sempre podem ser obtidas por meio de regra de três simples, como mostra o exemplo a seguir.

EXEMPLO 9

Vamos calcular a área do fuso esférico da figura abaixo.



Para calcular a área do fuso esférico, podemos estabelecer a seguinte proporção:

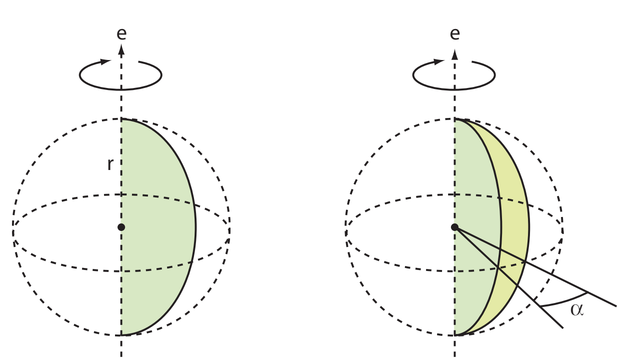
ângulo área

$$\left.\begin{array}{r} 360° — 4\pi \cdot 10^2 \\ 45° — \quad x \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{360°}{45°} = \frac{400\pi}{x} \Rightarrow 8 = \frac{400\pi}{x} \Rightarrow x = 50\pi$$

A área desse fuso é 50π cm².

Cunha esférica

Dá-se o nome de **cunha esférica** ao sólido gerado pela rotação de um semicírculo que gira α graus ($0° < \alpha \leqslant 360°$) em torno de um eixo que contém seu diâmetro.



Note que, se α é dobrado, o volume da cunha esférica é dobrado; se α é triplicado, o volume da cunha esférica também é triplicado; e assim sucessivamente. No caso em que $\alpha = 360°$, a cunha esférica transforma-se em uma esfera, e seu volume é $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

De modo geral, o volume da cunha esférica é proporcional a α e, portanto, pode ser calculado por uma regra de três simples.

Observe as relações obtidas:

Para α em graus:

$$\left.\begin{array}{l} 360° — \frac{4}{3}\pi r^3 \\ \alpha — V_{cunha} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{V_{cunha} = \frac{\pi r^3 \alpha}{270°}}$$

Para α em radianos:

$$\left.\begin{array}{l} 2\pi \text{ rad} — \frac{4}{3}\pi r^3 \\ \alpha — V_{cunha} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{V_{cunha} = \frac{2r^3 \alpha}{3}}$$

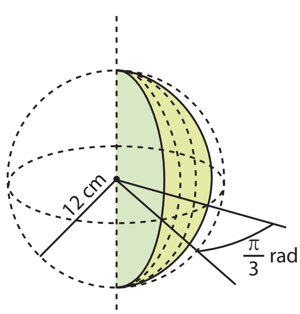
Assim como as fórmulas para o fuso esférico, as fórmulas para a cunha esférica não precisam ser memorizadas; basta estabelecer uma regra de três.

Observe que a superfície de uma cunha esférica contida em uma esfera de raio **r** é a reunião de um fuso esférico com dois semicírculos de raio **r**.

Assim, a área total da cunha esférica é igual à soma da área do fuso esférico com a área de um círculo de raio **r.**

EXEMPLO 10

Vamos calcular o volume e a área total da cunha esférica representada na figura.



- O volume da esfera é $\frac{4}{3}\pi \cdot (12 \text{ cm})^3 = 2\,304\pi \text{ cm}^3$.
  Assim, o volume da cunha pode ser obtido pela regra de três:

$$\left.\begin{array}{l} 2\,304\pi — 2\pi \text{ rad} \\ V_{cunha} — \frac{\pi}{3} \text{ rad} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2\,304}{V_{cunha}} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} \Rightarrow V_{cunha} = 384\pi$$

  Portanto, o volume da cunha é $384\pi \text{ cm}^3$.
- A área da superfície esférica é $4\pi \cdot (12 \text{ cm})^2 = 576\pi \text{ cm}^2$.
  Observe que $\frac{\pi}{3}$ corresponde à sexta parte de 2π; então, a área do fuso esférico é $\frac{576\pi \text{ cm}^2}{6} = 96\pi \text{ cm}^2$

A área da cunha esférica pode ser obtida pela soma:

$$96\pi + \underbrace{\pi \cdot 12^2}_{\text{reunião de dois semicírculos}} = 96\pi + 144\pi = 240\pi$$

Portanto, a área da cunha esférica é $240\pi \text{ cm}^2$.

PENSE NISTO:

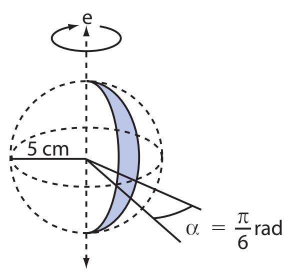
Considerando um gomo de uma laranja esférica, responda: Qual é a forma da casca do gomo? E do gomo?

EXERCÍCIOS

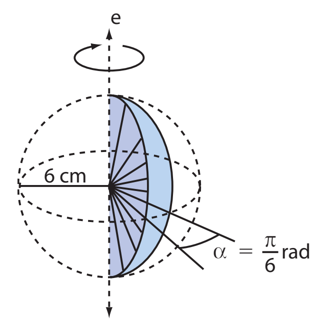
FAÇA NO CADERNO

75 Calcule, com os dados abaixo:

a) a área do fuso;



b) a área total e o volume da cunha.



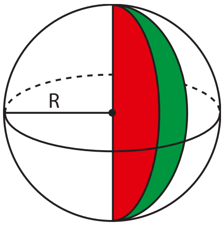
76 Determine a área de um fuso de 45° em uma esfera de 10 cm de raio.

77 Determine, em graus, a medida do ângulo do fuso de uma esfera, sabendo que a área do fuso é 54π cm² e a da superfície esférica é 324π cm².

78 Uma cunha esférica de 10° tem volume 1 078 m³. Qual é a sua área total? Considere $\pi \simeq \frac{22}{7}$.

79 (Vunesp-SP) Uma quitanda vende fatias de melancia embaladas em plástico transparente.

Uma melancia com forma esférica de raio de medida R cm foi cortada em 12 fatias iguais, e cada fatia tem a forma de uma cunha esférica, como representado na figura.



Sabendo-se que a área de uma superfície esférica de raio R cm é $4\pi R^2$ cm², determine, em função de π e de **R**:

a) a área da casca de cada fatia da melancia (fuso esférico);

b) quantos centímetros quadrados de plástico foram necessários para embalar cada fatia (sem nenhuma perda e sem sobrepor camadas de plástico), ou seja, a área da superfície total de cada fatia.

DESAFIO

(Enem-MEC) Os três recipientes da figura têm formas diferentes, mas a mesma altura e o mesmo diâmetro da boca. Neles são colocados líquidos até a metade de sua altura, conforme indicado nas figuras. Representando por $\mathbf{V_1}$, $\mathbf{V_2}$ e $\mathbf{V_3}$ o volume de líquido em cada um dos recipientes, tem-se:

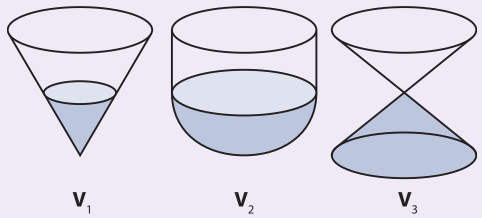
a) $V_1 = V_2 = V_3$

b) $V_1 < V_3 < V_2$

c) $V_1 = V_3 < V_2$

d) $V_3 < V_1 < V_2$

e) $V_1 < V_2 = V_3$



Matemática, natureza e arte

A Geometria dos fractais

A Geometria euclidiana que estudamos em toda fase escolar não é suficiente para descrever determinadas formas geométricas, como a de uma nuvem, a de uma linha de recorte de um litoral, a de uma couve-flor, a de uma folha de samambaia e muitas outras que vemos na natureza. A curiosidade de compreender tais formas desafiou a ciência a estudá-las. A **Geometria dos fractais** nasceu dessa necessidade.

As raízes desse ramo da Matemática estão no século XIX, embora haja algumas indicações em épocas remotas, como na Grécia, na Índia e na China, entre os anos de 1200 a.C. e 800 a.C. Porém, somente há poucos anos, com o desenvolvimento e aperfeiçoamento dos algoritmos computacionais, a Geometria dos fractais vem se consolidando.

O pai dos fractais é o francês Benoît Mandelbrot (1924-2010), que no início dos anos 80 impulsionou os estudos sobre essas formas geométricas. Esta frase atribuída a ele sintetiza o espírito da Geometria de que falamos: "Nuvens não são esferas, montanhas não são cones, continentes não são círculos, o som de um latido não é contínuo e nem o raio viaja em linha reta".

SANDRA DIAS CAMPOS

O pai dos fractais

Benoît Mandelbrot nasceu na Polônia em 1924 e, após o início da Segunda Guerra Mundial, em 1939, se mudou com a família para a França e naturalizou-se francês. Passou por várias instituições de ensino, incluindo a *École Polytechnique* e a *Sorbonne*, em Paris. Insatisfeito com a geometria clássica, desenvolveu diversos estudos em diferentes áreas do saber para buscar novas respostas aos seus problemas científicos e à compreensão da natureza. Com o apoio de recursos de computação de empresas privadas, onde passou a trabalhar a partir de 1958, desenvolveu a geometria fractal. Publicou alguns livros, entre eles a sua obra clássica *The Fractal Geometry of Nature*, traduzida e publicada em língua portuguesa com o título *Objectos Fractais*.


STEVE JURVETSON

Benoît Mandelbrot (1924-2010), em 1985.

O que é fractal?

O termo fractal refere-se ao adjetivo *fractus*, cujo verbo *frangere*, em latim, significa quebrar. Um fractal é uma forma geométrica que tem duas características essenciais:

Complexidade infinita

Os fractais caracterizam-se por repetir, indefinidamente, um determinado padrão com ligeiras variações.

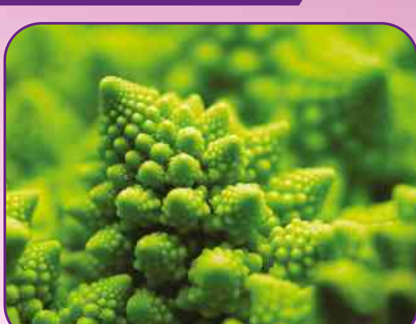
Autossimilaridade

Quando ampliamos uma pequena parte de um fractal, ela se parece com o todo. Assim, os fractais têm cópias aproximadas de si em seu interior.

Fractais da natureza

Vejamos algumas formas fractais presentes na natureza:

PASIEKA/SPL/LATINSTOCK



Detalhe de uma variedade de couve-flor.

LUCIDIO STUDIO INC./CORBIS/LATINSTOCK

Cada pequena parte da folha da samambaia se parece com a folha inteira.

CLAUDE NURIDSANY & MARIE PERENNOU/SPL/LATINSTOCK

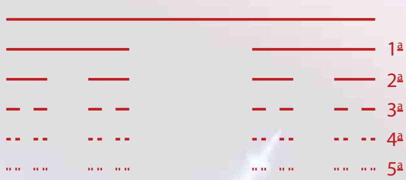
Floco de neve.

Fractais geométricos

Vejamos alguns exemplos de fractais geométricos:

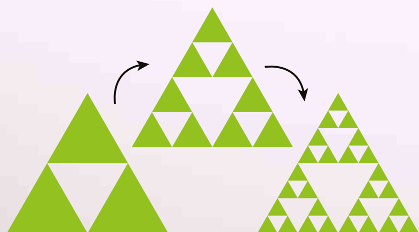
Poeira de Cantor

O russo Georg Cantor (1845-1918) criou um tipo simples de fractal obtido pela divisão de um segmento em três partes de mesma medida e supressão da parte central. Repetindo-se o processo indefinidamente, chegamos a uma sucessão de pontos, conhecida como **poeira de Cantor**. Observe, na figura seguinte, as cinco primeiras repetições desse processo:



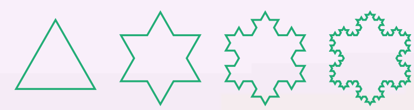
Triângulo de Sierpinski

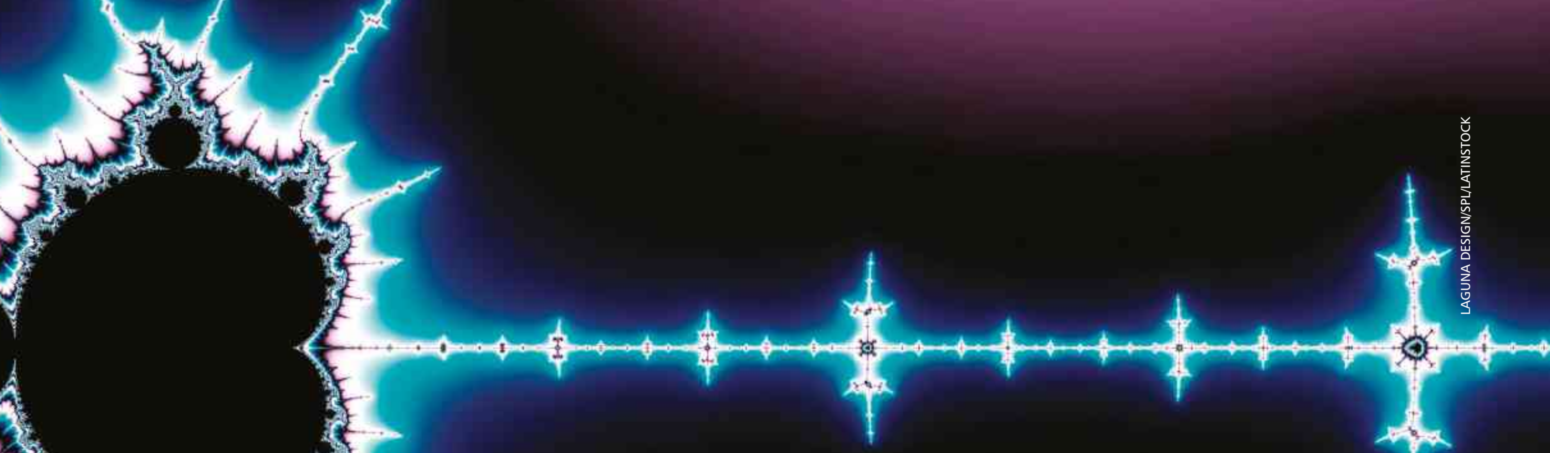
Criado pelo polonês Waclaw Sierpinski (1882-1969), esse fractal é resultante da remoção sucessiva do triângulo equilátero do centro quando se divide um triângulo equilátero em quatro triângulos congruentes. Observe, na figura seguinte, as três primeiras repetições desse processo:



Floco de neve de Koch

Proposto pelo sueco Helge Von Koch (1870-1924), esse fractal é obtido a partir de um triângulo equilátero: divide-se cada lado do triângulo em três partes iguais. Na parte do centro (meio), acrescenta-se um novo triângulo equilátero, cujo lado mede a terça parte da medida do lado do triângulo anterior e assim sucessivamente, como mostra a figura seguinte:



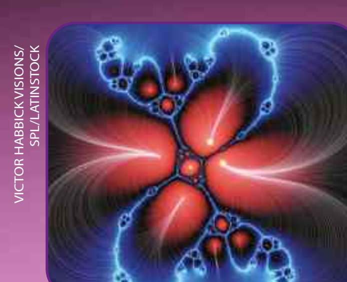


Segundo Mandelbrot, o floco de neve de Koch é "um modelo grosseiro, mas vigoroso de uma linha costeira".

A Geometria dos fractais tem aplicações importantes na Física, Biologia e Medicina, entre outras áreas do conhecimento. Uma notável aplicação visual dos fractais é na Arte: quando os computadores são alimentados por **processos iterativos**, criam magníficos desenhos abstratos, permitindo a visualização de belas imagens. Vejamos algumas delas:

Iteração é um conjunto de regras e algoritmos que são executados sucessivas vezes.

Fractal de Mandelbrot.



Fractal de Mandelbrot.

Conjunto de Mandelbrot.

Fontes de pesquisa: SALLUM, E. M. Fractais no Ensino Médio. *Revista do professor de matemática*. n. 57, 2005.; Fractais: propriedades e construção. Disponível em: <people.ufpr.br/~ewkaras/ic/geralic2003.pdf>. Acesso em: 10 mar. 2016.; O Quadrado de Koch. Disponível em: <m3.ime.unicamp.br/recursos/1023>. Acesso em: 10 mar. 2016.