CAPÍTULO 1

O ponto

UM POUCO DE **HISTÓRIA**

Introdução à Geometria Analítica

O segundo terço do século XVII foi um importante período da história da Matemática, com destaque para a grande intercomunicação de ideias entre os matemáticos franceses, dos quais destacamos René Descartes e Pierre de Fermat. A eles usualmente atribui-se a invenção da Geometria Analítica. Outros nomes dessa época também devem ser lembrados, como Roberval, Desargues, Mersenne e Pascal.

René Descartes (1596-1650) recebeu, desde cedo, uma educação diferenciada e dedicou grande parte de sua vida à filosofia e à ciência. Sua obra mais importante, datada de 1637, é o *Discurso sobre o método*, em que apresenta as bases filosóficas do seu método para o estudo das ciências. Descartes acreditava que o conhecimento matemático é mais cumulativo e progressivo que o de outras áreas do conhecimento, crescendo por acréscimos e não por substituições, como ocorria em outras ciências, à medida que eram feitas novas descobertas. As demonstrações usadas para validar determinadas propriedades na Matemática possibilitavam a aquisição segura do conhecimento, e esse poderia ser o caminho para a verdade e para novas descobertas das ciências. Segundo Descartes, não se poderia aceitar nada como verdade se não fossem apresentadas provas com clareza e distinção. Esse método de organizar o pensamento científico, conhecido como racionalismo, rompia com o empirismo do passado.

Em um dos três apêndices do *Discurso sobre o método* encontra-se "Le Geométric". A maior contribuição desse texto é a ideia de dar significado às operações algébricas por meio de interpretações geométricas e, reciprocamente, "libertar" a Geometria dos diagramas por meio de processos algébricos.

Esses princípios originaram a Geometria Analítica que conhecemos hoje e que passaremos a estudar nos primeiros quatro capítulos desse volume. Os pontos são representados por pares ordenados de números reais; as retas, circunferências e outras curvas podem ser descritas por meio de expressões algébricas, com as quais podemos estudar propriedades das figuras geométricas. As figuras são representadas em um referencial formado por dois eixos perpendiculares, conhecido

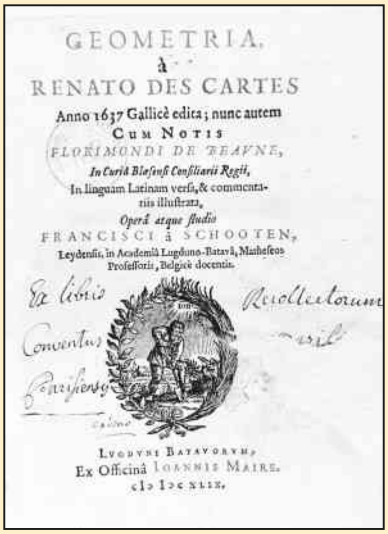
COLEÇÃO PARTICULAR/SHEILA TERRY/SPL/LATINSTOCK

René Descartes ensinando astronomia à rainha Cristina I da Suécia, por volta de 1649. Ilustração de D. Jaime Seix, 1876.

como **sistema de coordenadas cartesianas**, nome dado em homenagem a Descartes. Vale lembrar, no entanto, que na obra de Descartes não havia nada muito sistemático sobre sistema de coordenadas, distâncias, inclinação de retas, ângulos etc.

Pierre de Fermat (1601-1665), ao contrário de Descartes, dedicava-se à Ciência e à Matemática por prazer. Sua grande contribuição para a Geometria Analítica foi a descoberta (um ano antes do aparecimento de "Le Geométric" de Descartes) do seguinte princípio: "Uma equação que apresenta duas quantidades incógnitas descreve uma linha, reta ou curva". Fermat estudou desde casos de equações lineares simples até equações quadráticas mais gerais. Sua obra, mais sistemática e didática que a de Descartes, não foi publicada em vida e, por esse motivo, a Geometria Analítica era considerada, na época, invenção única de Descartes.

Fonte de pesquisa: BOYER, Carl B. *História da Matemática*. 3ª ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2010.



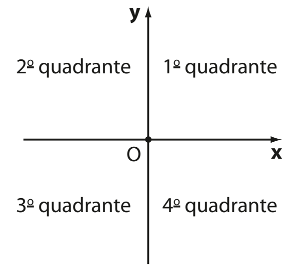
COLEÇÃO PARTICULAR/CCI ARCHIVES/SPL/LATINSTOCK

"Geometria" foi publicado em 1637 como um apêndice do *Discurso sobre o método*.

Plano cartesiano

Consideremos dois eixos orientados, **x** e **y**, perpendiculares em **O**. O plano determinado por esses eixos é chamado **plano cartesiano**.

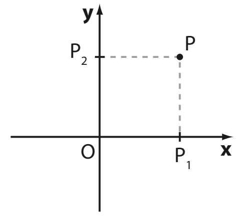
Cada uma das partes em que o plano fica dividido pelos eixos **x** e **y** recebe o nome de **quadrante**. Os quatro quadrantes são numerados no sentido anti-horário, como mostra a figura ao lado:



- O eixo **x** (ou eixo Ox) recebe o nome de **eixo das abscissas**.
- O eixo **y** (ou eixo Oy) recebe o nome de **eixo das ordenadas**.
- O ponto **O** é a **origem** do sistema de eixos cartesianos ortogonal ou retangular. Esse sistema é frequentemente indicado por xOy.

Dado um ponto **P** qualquer do plano cartesiano, traçamos por **P** as retas paralelas aos eixos **x** e **y**. Sejam $\mathbf{P_1}$ e $\mathbf{P_2}$ os pontos de interseção dessas retas com os eixos **x** e **y**, respectivamente.

Dizemos que:

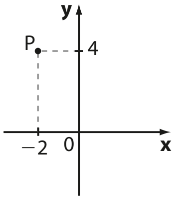


- a abscissa de **P** (indica-se por $\mathbf{x_P}$) é a medida algébrica do segmento $\overline{OP_1}$;
- a ordenada de **P** (indica-se por $\mathbf{y_P}$) é a medida algébrica do segmento $\overline{OP_2}$;
- as **coordenadas** de **P** são os números reais $\mathbf{x_P}$ e $\mathbf{y_P}$, indicados, em geral, na forma do par ordenado (x_P, y_P).

EXEMPLO 1

Um ponto **P** possui coordenadas dadas por P(−2, 4). Isso significa que a abscissa de **P** vale −2 e sua ordenada vale 4.

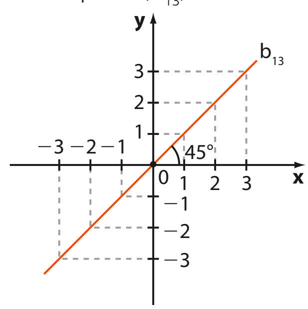
P encontra-se no 2º quadrante, como mostra a figura ao lado.



OBSERVAÇÕES

- A cada ponto **P** do plano cartesiano corresponde um par ordenado (x_P, y_P) de números reais e, inversamente, para cada par ordenado (x_P, y_P) de números reais corresponde um ponto **P** do plano.
- Um ponto pertence ao eixo das abscissas se sua ordenada é nula. Desse modo, para todo a ∈ ℝ, o ponto (a, 0) pertence ao eixo **x**.
- Um ponto pertence ao eixo das ordenadas se sua abscissa é nula. Assim, para todo b ∈ ℝ, o ponto (0, b) pertence ao eixo **y**.
- Um ponto pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares ($\mathbf{b}_{13}$) se suas coordenadas são iguais.

Assim, para todo a ∈ ℝ, o ponto (a, a) pertence à bissetriz $\mathbf{b}_{13}$.

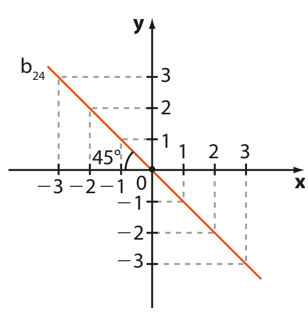


PENSE NISTO:

Por que o ângulo indicado no sistema cartesiano ao lado mede 45°?

- Um ponto pertence à bissetriz dos quadrantes pares ($\mathbf{b}_{24}$) se suas coordenadas são opostas.

Para todo a ∈ ℝ, o ponto (a, −a) pertence à bissetriz $\mathbf{b}_{24}$.



PENSE NISTO:

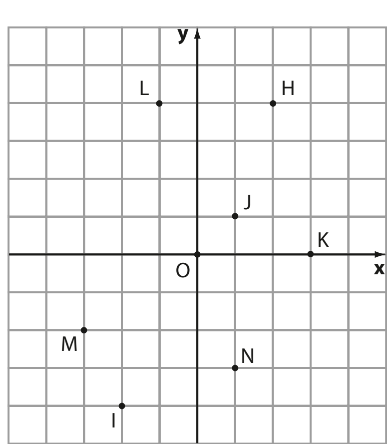
O ponto (a, −a) pode pertencer ao 2º quadrante? E ao 4º quadrante?

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

1 Situe no mesmo sistema de eixos cartesianos os pontos A(1, 3), B(−2, 1), C(0, −4), D(−3, 0), E(−2, −3), F(2, −1), G(3, −4) e H$\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

2 Forneça as coordenadas dos pontos dados no plano cartesiano abaixo.



3 Dados os seguintes pontos:

A(−3, 3)	E$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$	I$\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$
B$\left(\frac{11}{5}, 0\right)$	F(0, −5)	J(0, π)
C(−4, −5)	G$\left(3, \frac{11}{2}\right)$	K$\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$
D$\left(0, \sqrt{2}\right)$	H(1; −3,2)	L(−4, 2)

Indique quais pertencem:

a) ao 1º quadrante.
b) ao 2º quadrante.
c) ao 3º quadrante.
d) ao 4º quadrante.
e) ao eixo **x**.
f) ao eixo **y**.
g) à bissetriz $\mathbf{b}_{13}$.
h) à bissetriz $\mathbf{b}_{24}$.

4 Determine o sinal do produto das coordenadas de um ponto:

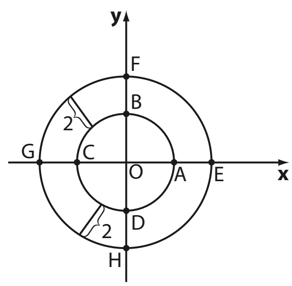
a) do 1º quadrante.
b) da bissetriz $\mathbf{b}_{24}$.
c) do 3º quadrante.
d) do eixo das ordenadas.

5 Determine os valores reais de **k** para os quais o ponto $P(k^2 - 9, 5)$ pertence ao eixo das ordenadas.

6 Sendo **a** um número real positivo e **b** um número real negativo, determine em que quadrante se encontra cada um destes pontos:

a) $P(a, b)$
b) $Q(-a, b)$
c) $R\left(2a, \frac{b}{3}\right)$
d) $S(-a, -b)$

7 Na figura a seguir as duas circunferências têm centro na origem. Sabendo que a abscissa de **A** é igual a 3, determine as coordenadas dos pontos **A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F**, **G** e **H**.

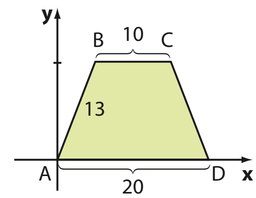


8 Para quais valores reais de **m** o ponto $P(m, 2m - 1)$ pertence ao 3º quadrante?

9 Os pontos $A(3, 5)$, $B(2, m)$ e $C(-4, n)$ pertencem a uma reta paralela ao eixo das abscissas. Determine **m** e **n**.

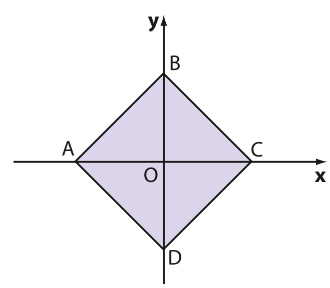
10 Os pontos $(3, -2)$, $(a, 5)$ e $(b, 100)$ pertencem a uma reta paralela ao eixo **y**. Determine **a** e **b**.

11 Determine as coordenadas dos vértices **A**, **B**, **C** e **D** do trapézio isósceles abaixo.



12 Os vértices de um triângulo são os pontos $A(-4, 5)$, $B(-4, 0)$ e $C(1, 5)$. Mostre que esse triângulo é retângulo. Que segmento representa a hipotenusa desse triângulo?

13 Na figura, ABCD é um quadrado cujo lado mede 6. Obtenha as coordenadas dos quatro vértices do quadrado.

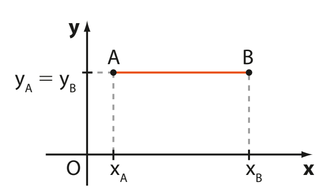


Distância entre dois pontos

Dados dois pontos distintos **A** e **B** do plano cartesiano, chama-se **distância** entre eles a medida do segmento de reta que tem esses dois pontos por extremidades.

Indicaremos a distância entre **A** e **B** por d_{AB}.

- **1º caso**: O segmento $\overline{AB}$ é paralelo ao eixo **x**.



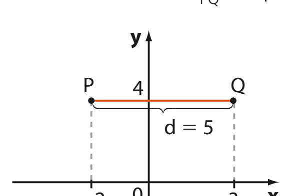
A distância entre **A** e **B** é dada pelo módulo da diferença entre as abscissas de **A** e **B**, isto é:

$$d_{AB} = |x_A - x_B|$$

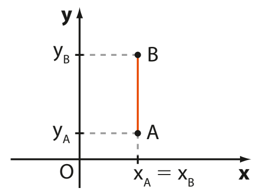
EXEMPLO 2

A distância entre os pontos $P(-2, 4)$ e $Q(3, 4)$ é $d_{PQ} = |-2 - 3| = |3 - (-2)| = 5$.

Assim, $d_{PQ} = 5$ u.c. (unidades de medida de comprimento).



- **2º caso**: O segmento $\overline{AB}$ é paralelo ao eixo **y**.



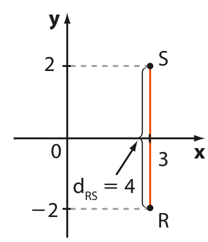
A distância entre **A** e **B** é dada pelo módulo da diferença entre as ordenadas de **A** e **B**, isto é:

$$d_{AB} = |y_A - y_B|$$

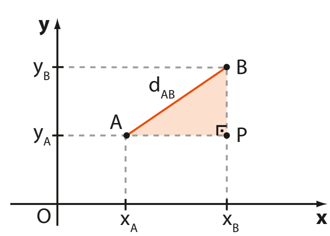
EXEMPLO 3

A distância entre os pontos R(3, −2) e S(3, 2) é $d_{RS} = |-2 - 2| = |2 - (-2)| = 4$.

Assim, $d_{RS} = 4$ u.c. (unidades de medida de comprimento).



- **3º caso**: O segmento $\overline{AB}$ não é paralelo a qualquer um dos eixos coordenados.



Observe que:

- $d_{AP} = |x_A - x_B|$
- $d_{BP} = |y_A - y_B|$

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo APB, temos:

$$(d_{AB})^2 = (d_{AP})^2 + (d_{BP})^2$$

$$(d_{AB})^2 = (|x_A - x_B|)^2 + (|y_A - y_B|)^2$$

Como para todo $a \in \mathbb{R}$, $|a|^2 = a^2$, podemos escrever:

$$(d_{AB})^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2$$

$$d_{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

Podemos observar ainda que, como $(x_A - x_B)^2 = (x_B - x_A)^2$ e $(y_A - y_B)^2 = (y_B - y_A)^2$, a ordem das diferenças que aparecem no radicando não importa. Assim, pode-se escrever, também:

$$d_{AB} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

com Δx representando a diferença entre as abscissas, e Δy, a diferença entre as ordenadas dos pontos.

PENSE NISTO:

A expressão $d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, usada para calcular a distância entre dois pontos, pode ser aplicada tanto no primeiro caso apresentado quanto no segundo?

EXEMPLO 4

Vamos calcular a distância entre os pontos A(2, 3) e B(5, 1).

Temos:

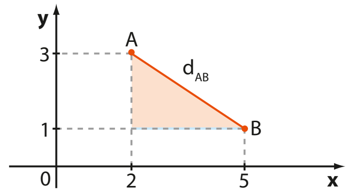
$d_{AB} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$

$d_{AB} = \sqrt{(2 - 5)^2 + (3 - 1)^2}$

$d_{AB} = \sqrt{9 + 4}$

$d_{AB} = \sqrt{13}$

Assim, $d_{AB} = \sqrt{13}$ u.c. (unidades de medida de comprimento)



Embora tenhamos deduzido a fórmula da distância entre dois pontos usando pontos do 1º quadrante, podemos notar que ela não perde a validade quando são utilizados pontos de outros quadrantes. Observe o exemplo a seguir.

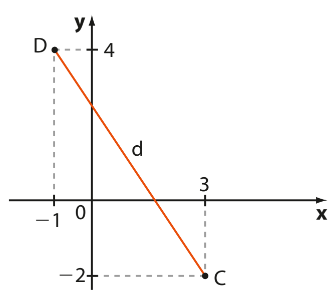
EXEMPLO 5

A distância **d** entre os pontos C(3, −2) e D(−1, 4), representados no gráfico ao lado, é dada por:

$d = \sqrt{[3 -(-1)]^2 + [4 - (-2)]^2} =$

$= \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52}$

Assim, **d** $= 2\sqrt{13}$ u.c. (unidades de medida de comprimento).

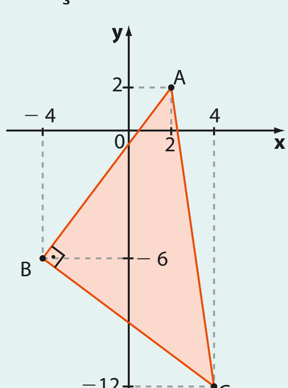


A partir de agora será omitida a expressão u.c., unidades de medida de comprimento, quando se tratar de distância.

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

1 Mostre que o triângulo de vértices A(2, 2), B(−4, −6) e C(4, −12) é retângulo e isósceles. Em seguida, determine seu perímetro.

Solução:



É preciso mostrar que as medidas de seus lados satisfazem o teorema de Pitágoras.

Temos:

- AB: $d_{AB} = \sqrt{(-4 - 2)^2 + [2 - (-6)]^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$
- AC: $d_{AC} = \sqrt{(2 - 4)^2 + [2 - (-12)]^2} = \sqrt{4 + 196} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$
- BC: $d_{BC} = \sqrt{(-4 - 4)^2 + [-6 - (-12)]^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$

Como $(d_{AC})^2 = (d_{AB})^2 + (d_{BC})^2$, pois $\left(10\sqrt{2}\right)^2 = 10^2 + 10^2$, concluímos que o triângulo ABC é retângulo em **B** e seus catetos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ possuem a mesma medida. Assim, o triângulo ABC é isósceles, e seu perímetro é igual a $10 + 10 + 10\sqrt{2} = 10\left(\sqrt{2} + 2\right)$.

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

14 Determine a distância entre os pontos dados.

a) $A(5,\ 2)$ e $B(1,\ 3)$

b) $C(-1,\ 4)$ e $D(-2,\ -3)$

c) $E(-4,\ -3)$ e $O(0,\ 0)$

d) $F(-5,\ 4)$ e $G(2,\ -5)$

e) $H(-1,\ 5)$ e $I(-1,\ 12)$

f) $J(-2,\ -1)$ e $K(3,\ -4)$

g) $L(-4,\ 3)$ e $M(-4,\ -7)$

h) $N\left(\sqrt{2},\ -\sqrt{2}\right)$ e $P\left(-\sqrt{2},\ \sqrt{2}\right)$

i) $Q(1,\ 3)$ e $R(-3,\ 3)$

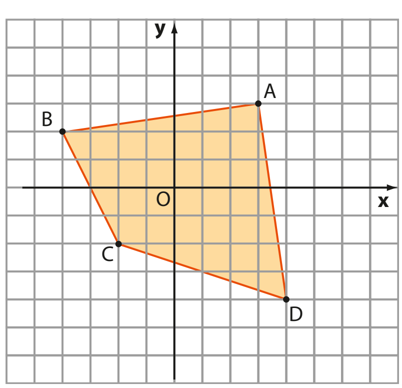
15 Calcule o perímetro do triângulo ABC, sendo $A(1,\ 0)$, $B(3,\ 7)$ e $C(-2,\ 4)$.

16 O ponto **B** tem ordenada nula e dista 5 de **A**, que possui ambas as coordenadas iguais a 4. Determine a abscissa de **B**.

17 Entre os pontos $A\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$, $B\left(1,\ \frac{3}{2}\right)$, $C(2,\ 1)$ e $D(0,\ 2)$, qual é o mais distante de $E(1,\ 1)$?

18 Os pontos $A(3m + 1,\ 15)$ e $B(m,\ 3)$ pertencem ao 2º quadrante, e a distância entre eles é igual a 13. Qual é o valor de **m**?

19 Determine o perímetro do quadrilátero ABCD.



20 O centro de uma circunferência é o ponto $(-1,\ 3)$. Sabendo que o ponto $(2,\ 5)$ pertence à circunferência, determine a medida de seu diâmetro.

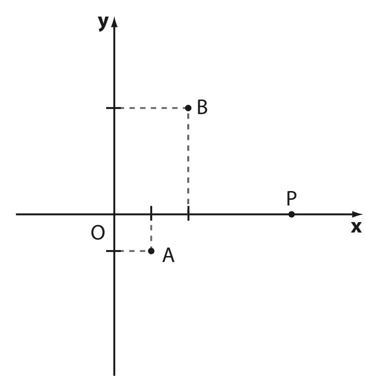
21 Mostre que o triângulo de vértices $(2,\ 4)$, $(5,\ 1)$ e $(6,\ 5)$ é isósceles e calcule seu perímetro.

22 Os pontos **A** e **B** são equidistantes de **Q**, pertencente à bissetriz dos quadrantes ímpares. Sendo $A(4,\ 2)$ e $B(6,\ 8)$, quais são as coordenadas de **Q**?

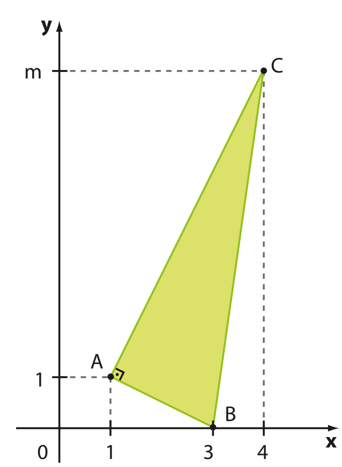
23 O ponto **P** pertence ao eixo dos **y** e equidista de $A(-1,\ 1)$ e $B(4,\ 2)$. Determine as coordenadas de **P**.

24 Classifique, quanto aos lados, o triângulo cujos vértices são $(0,\ 0)$, $(3,\ 2)$ e $(-1,\ 4)$.

25 Na figura, **P** é equidistante de $A(1,\ -1)$ e $B(2,\ 3)$. Obtenha as coordenadas de **P**.



26 Com base na figura seguinte, determine **m**.



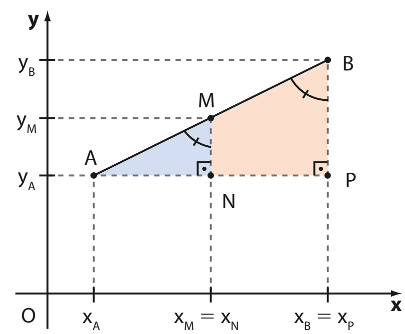
27 Dados os pontos $M(2,\ 0)$ e $N(0,\ 2)$, determine **P** de modo que o triângulo MNP seja equilátero.

28 Encontre três pontos equidistantes de $A(-2,\ 4)$ e $B(3,\ 1)$.

Ponto médio de um segmento

Há situações em Geometria Analítica que envolvem mediatrizes de segmentos, medianas e mediatrizes de triângulos e outros assuntos relacionados com o ponto médio de um segmento.

Seja **M** o ponto médio do segmento com extremidades $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$. Notemos, na figura ao lado, que os triângulos AMN e ABP são semelhantes, pois possuem os três ângulos respectivamente congruentes. Assim:



$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AP}$$

Mas $AB = 2 \cdot (AM)$, pois **M** é o ponto médio de $\overline{AB}$.

Logo, $\dfrac{AM}{2 \cdot (AM)} = \dfrac{AN}{AP} \Rightarrow \dfrac{AN}{AP} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow AP = 2 \cdot (AN)$.

Assim, temos:

$$|x_P - x_A| = 2 \cdot |x_N - x_A|$$

Como $x_P > x_A$ e $x_N > x_A$, podemos escrever:

$$x_P - x_A = 2(x_N - x_A) \Rightarrow x_B - x_A = 2(x_M - x_A) \Rightarrow x_B - x_A = 2x_M - 2x_A \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

Mediante procedimento análogo, prova-se que $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}$.

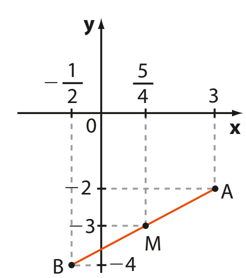
Portanto, sendo **M** o ponto médio do segmento $\overline{AB}$, temos:

$$\boxed{M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)}$$

EXEMPLO 6

Dados os pontos $A(3, -2)$ e $B\left(-\dfrac{1}{2}, -4\right)$, vamos calcular as coordenadas do ponto médio do segmento $\overline{AB}$.

$$x_M = \frac{-\frac{1}{2} + 3}{2} = \frac{\frac{5}{2}}{2} = \frac{5}{4} \quad \text{e} \quad y_M = \frac{-2 + (-4)}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

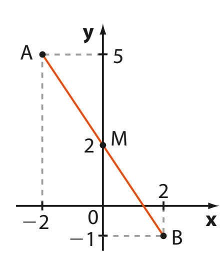


EXEMPLO 7

Seja $M(0, 2)$ o ponto médio do segmento $\overline{AB}$. Se $A(-2, 5)$, para determinar as coordenadas de **B**, podemos fazer:

$$0 = \frac{-2 + x_B}{2} \quad \text{e} \quad 2 = \frac{5 + y_B}{2} \Rightarrow x_B = 2 \text{ e } y_B = -1$$

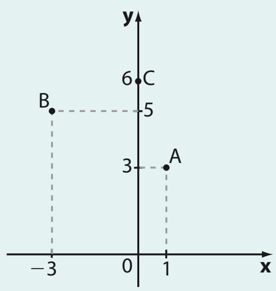
Assim, $B(2, -1)$. Veja, ao lado, a representação gráfica.



EXERCÍCIO RESOLVIDO

2 De um losango são conhecidos três vértices, não necessariamente consecutivos: A(1, 3), B(−3, 5) e C(0, 6). Determine as coordenadas do quarto vértice desse losango.

Solução:



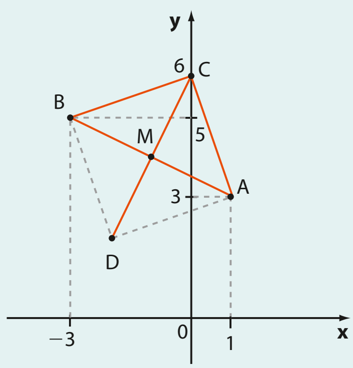
Vamos, inicialmente, calcular as distâncias entre os pontos dados, a fim de descobrir quais são os vértices consecutivos desse losango:

$$d_{AB} = \sqrt{(1 + 3)^2 + (3 - 5)^2} = \sqrt{20}$$

$$d_{AC} = \sqrt{(1 - 0)^2 + (3 - 6)^2} = \sqrt{10}$$

$$d_{BC} = \sqrt{(-3 - 0)^2 + (5 - 6)^2} = \sqrt{10}$$

Como d_{AC} e d_{BC} são iguais, concluímos que $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ são lados do losango e $\overline{AB}$ é uma diagonal. Lembrando que em qualquer losango as diagonais intersectam-se ao meio, podemos determinar o vértice **D** do losango:



- **M** é ponto médio de $\overline{AB}$:

$$\left.\begin{aligned} x_M &= \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1 + (-3)}{2} = -1 \\ y_M &= \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3 + 5}{2} = 4 \end{aligned}\right\} M(-1,\ 4)$$

- **M** também é ponto médio de $\overline{CD}$:

$$x_M = \frac{x_C + x_D}{2} \Rightarrow -1 = \frac{0 + x_D}{2} \Rightarrow x_D = -2$$

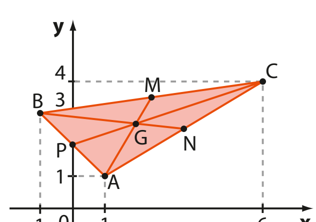
$$y_M = \frac{y_C + y_D}{2} \Rightarrow 4 = \frac{6 + y_D}{2} \Rightarrow y_D = 2$$

Assim, o outro vértice é D(−2, 2).

Mediana e baricentro

Chamamos **mediana de um triângulo** o segmento cujas extremidades são um dos vértices desse triângulo e o ponto médio do lado oposto a esse vértice. Um triângulo possui três medianas. Através da Geometria Analítica podemos determinar as medidas das medianas de um triângulo. Vejamos:

Seja ABC o triângulo a seguir, de vértices A(1, 1), B(−1, 3) e C(6, 4).



Vamos determinar a medida da mediana relativa ao lado $\overline{BC}$:

- O ponto médio **M** de $\overline{BC}$ é dado por:

$$\left(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2}\right) = \left(\frac{-1 + 6}{2}, \frac{3 + 4}{2}\right) \Rightarrow M\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

- O comprimento da mediana $\overline{AM}$ é obtido calculando-se a distância entre **A** e **M**:

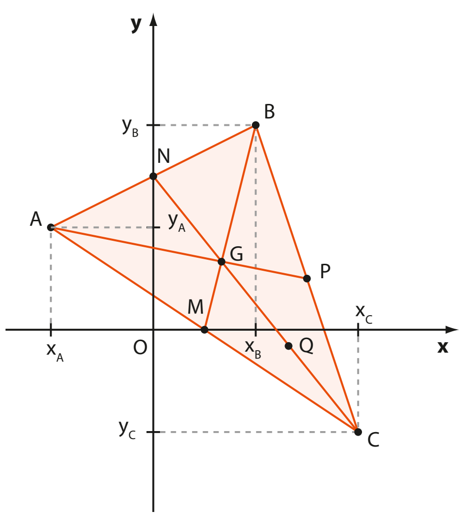
$$d_{AM} = \sqrt{\left(1 - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{7}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{34}{4}} = \frac{\sqrt{34}}{2}$$

Por meio de um procedimento análogo, podemos determinar o comprimento das medianas $\overline{BN}$ e $\overline{CP}$.

As três medianas intersectam-se no ponto **G**, indicado na figura anterior. O ponto de encontro das três medianas de um triângulo é chamado **baricentro** do triângulo. Veremos a seguir como podemos determinar as coordenadas do baricentro.

Determinação das coordenadas do baricentro de um triângulo

Sejam $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ três pontos não alinhados no plano cartesiano. Consideremos o triângulo ABC.



As três medianas relativas aos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ são, respectivamente, $\overline{CN}$, $\overline{AP}$ e $\overline{BM}$. Elas se encontram no ponto **G**, baricentro do triângulo.

Vamos obter as coordenadas de **G**. Para isso, é preciso lembrar uma propriedade da Geometria Plana: o baricentro do triângulo divide cada mediana em dois segmentos cujas medidas estão na razão 2 : 1, isto é, o segmento que tem um vértice do triângulo como uma de suas extremidades mede o dobro do outro. Veja, por exemplo, a mediana $\overline{CN}$, que fica dividida em dois segmentos: $\overline{CG}$ e $\overline{GN}$, com $CG = 2 \cdot (GN)$.

Temos:

- **N** é ponto médio de $\overline{AB} \Rightarrow \begin{cases} x_N = \dfrac{x_A + x_B}{2} & (1) \\ y_N = \dfrac{y_A + y_B}{2} & (2) \end{cases}$

- **Q** é ponto médio de $\overline{CG} \Rightarrow \begin{cases} x_Q = \dfrac{x_G + x_C}{2} & (3) \\ y_Q = \dfrac{y_G + y_C}{2} & (4) \end{cases}$

- **G** é ponto médio de $\overline{QN} \Rightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{x_Q + x_N}{2} & (5) \\ y_G = \dfrac{y_Q + y_N}{2} & (6) \end{cases}$

PENSE NISTO:

Por que **G** é ponto médio de $\overline{QN}$?

Substituindo 1 e 3 em 5, temos:

$$x_G = \frac{x_Q}{2} + \frac{x_N}{2} \Rightarrow x_G = \frac{x_G + x_C}{4} + \frac{x_A + x_B}{4} \Rightarrow \frac{3x_G}{4} = \frac{x_A + x_B + x_C}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$$

Analogamente, substituindo 2 e 4 em 6, podemos concluir que:

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

Assim, as coordenadas de **G** são $\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$.

Observe que a **abscissa** do baricentro é igual à média aritmética das abscissas dos vértices do triângulo. Da mesma forma, a **ordenada** do baricentro é igual à média aritmética das ordenadas dos vértices do triângulo.

EXEMPLO 8

Considerando o triângulo ABC da página 15, as coordenadas de seu baricentro (**G**) são:

$$\left.\begin{array}{l} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} = \dfrac{1 + (-1) + 6}{3} = 2 \\[2ex] y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} = \dfrac{1 + 3 + 4}{3} = \dfrac{8}{3} \end{array}\right\} G\left(2, \frac{8}{3}\right)$$

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

29 Determine as coordenadas do ponto médio do segmento cujas extremidades são os pontos:

a) A(1, 2) e B(2, 4)

b) C(3, 5) e D(2, −3)

c) $E\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ e $F\left(-3, \frac{3}{2}\right)$

d) G(−3, 5) e H(3, −5)

e) I(4, 10) e J(10, −4)

f) L(3, −4) e M(3, 2)

30 Se (2, 3) é ponto médio de $\overline{AB}$, com A(n, 5) e B(4, m), quanto vale m + n?

31 Os pontos A(2, −4), B(−2, 1) e C(−4, 5) são vértices de um triângulo. Determine o comprimento da mediana $\overline{AM}$ do triângulo ABC.

32 O ponto P(7, −3) pertence a uma circunferência de centro (4, 2). Determine o ponto diametralmente oposto a **P**.

33 Mostre que o quadrilátero de vértices (−8, −6), (−2, 0), (−2, −4) e (4, 2) é um paralelogramo.

34 Um segmento possui uma extremidade sobre o eixo das abscissas e a outra sobre o eixo das ordenadas. Sendo (−1, 2) seu ponto médio, determine as coordenadas de suas extremidades.

35 Um triângulo possui vértices nos pontos (2, −1), (4, −3) e (−2, −5). Determine:

a) as coordenadas de seu baricentro;

b) os comprimentos das medianas desse triângulo.

36 M(1, 2), N(5, −2) e P(3, −4) são, respectivamente, os pontos médios dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ do triângulo ABC. Determine as coordenadas dos vértices desse triângulo.

37 Os pontos (2, 3), (5, −1) e (1, −4) são vértices de um quadrado.

a) Quais são as coordenadas do quarto vértice?

b) Qual é a medida do lado desse quadrado?

38 Qual é o ponto simétrico de P(2, −3) em relação:

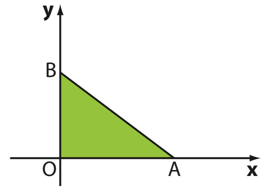
a) ao eixo das ordenadas?

b) à origem do sistema cartesiano?

c) ao eixo das abscissas?

d) ao ponto (3, −4)?

39 Na figura a seguir, o triângulo de vértices A(6, 0), O(0, 0) e **B** é retângulo, e sua hipotenusa mede 8.



Determine:

a) as coordenadas de **B**;

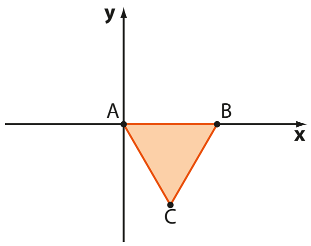
b) a medida da mediana relativa à hipotenusa;

c) o baricentro do triângulo e sua distância à origem.

40 Dados A(−13, −1) e B(3, 5), determine as coordenadas dos pontos que dividem $\overline{AB}$ em quatro partes iguais.

41 Um losango possui como vértices os pontos (2, −4), (4, 4) e (−6, −2). Sendo (−1, 1) o ponto de encontro das diagonais, determine o quarto vértice e a área do losango.

42 Na figura, o triângulo ABC é equilátero, e seu lado mede 4 cm.



Determine:

a) as coordenadas de **C**;

b) a área do triângulo ABC.

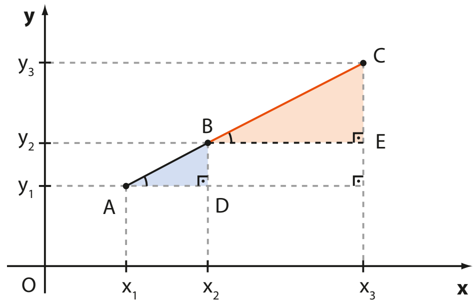
43 A respeito de um triângulo ABC, sabe-se que:

- $M\left(1, -\frac{3}{2}\right)$ é ponto médio de $\overline{BC}$.
- $d_{AB} = 9$
- $d_{AC} = 12$
- C(1, 6)

Determine as coordenadas de **A**, sabendo que elas são números reais negativos.

Condição de alinhamento de três pontos

Para que três pontos distintos estejam alinhados, suas coordenadas devem obedecer a uma condição que será deduzida com a utilização da figura abaixo, na qual $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$ estão na mesma reta.



Os triângulos retângulos BCE e ABD são semelhantes.

Decorre a proporção $\frac{BE}{AD} = \frac{CE}{BD}$, que pode ser escrita como $\frac{x_3 - x_2}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_2}{y_2 - y_1}$. Desenvolvendo, obtemos $(x_3 - x_2) \cdot (y_2 - y_1) - (x_2 - x_1) \cdot (y_3 - y_2) = 0$. Daí:

$$x_3y_2 - x_3y_1 - \cancel{x_2y_2} + x_2y_1 - x_2y_3 + \cancel{x_2y_2} + x_1y_3 - x_1y_2 = 0$$

ou, ainda:

$$x_1y_2 + x_3y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 - x_1y_3 - x_2y_1 = 0$$

Essa última igualdade pode ser escrita sob a forma de determinante: $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

OBSERVAÇÃO

Se os pontos **A**, **B** e **C** pertencessem a uma reta paralela a um dos eixos (ao **x**, por exemplo), o determinante também se anularia.
De fato, teríamos:

$$y_1 = y_2 = y_3 \text{ e } \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_1 & 1 \\ x_3 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = \cancel{x_1y_1} + \cancel{x_3y_1} + \cancel{x_2y_1} - \cancel{x_3y_1} - \cancel{x_1y_1} - \cancel{x_2y_1} = 0$$

Concluímos, então, que:

Se três pontos distintos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$ são colineares, então:

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Vamos verificar agora que a recíproca dessa propriedade também é verdadeira, isto é, se $D = 0$, então os pontos são colineares.
Se $D = 0$, como vimos, podemos escrever:

$$(x_2 - x_1) \cdot (y_3 - y_2) = (x_3 - x_2) \cdot (y_2 - y_1)$$

Temos as seguintes possibilidades:

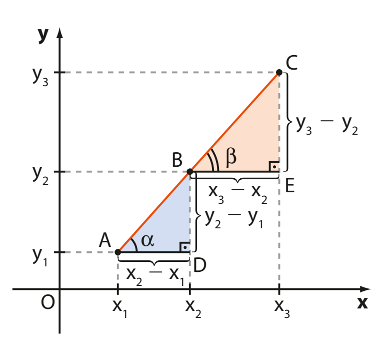
- Se $x_3 - x_2 = 0$, isto é, $x_3 = x_2$, podemos ter:
  $x_2 - x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3$ e, portanto, **A**, **B** e **C** seriam colineares por pertencerem a uma mesma reta paralela ao eixo **y**;
  ou
  $y_3 - y_2 = 0 \Rightarrow y_3 = y_2$ e, daí, $B = C$; não pode ocorrer, pois estamos admitindo que os três pontos são distintos.

- Se $y_2 - y_1 = 0$, isto é, $y_1 = y_2$, podemos ter:
  $x_2 - x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$ e, daí, $A = B$; não pode ocorrer, pois estamos admitindo que os três pontos são distintos;
  ou
  $y_3 - y_2 = 0 \Rightarrow y_3 = y_2 = y_1$ e, portanto, **A**, **B** e **C** seriam colineares por pertencerem a uma mesma reta paralela ao eixo **x**.

- Se $x_3 - x_2 \neq 0$ e $y_2 - y_1 \neq 0$, teríamos:

$$(x_2 - x_1) \cdot (y_3 - y_2) = (x_3 - x_2) \cdot (y_2 - y_1) \Rightarrow \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_2}$$

Daí, os triângulos retângulos ABD e BCE têm lados cujas medidas são proporcionais, isto é, são semelhantes (pelo caso LAL), como mostra a figura.



Consequentemente, temos $\alpha = \beta$, e os pontos **A**, **B** e **C** são colineares.
Assim, acabamos de verificar que:

Se $D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$, em que $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$,
então **A**, **B** e **C** são colineares.

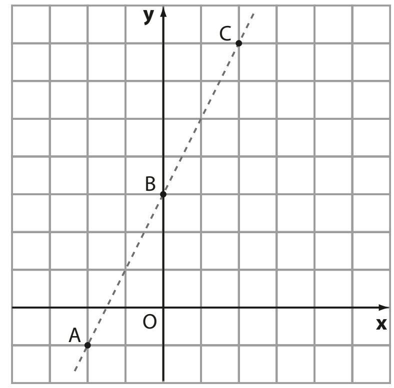
EXEMPLO 9

Observe que os pontos A(−2, −1), B(0, 3) e C(2, 7) estão alinhados.

De fato, o determinante $\begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 1 \end{vmatrix}$ é nulo.

Veja:

$$-6 + 0 - 2 - 6 + 14 + 0 = 0$$



EXEMPLO 10

Para verificar se os pontos A(−4, −6), B(3, 15) e C(−2, 0) estão alinhados, calculamos o determinante $\begin{vmatrix} -4 & -6 & 1 \\ 3 & 15 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Temos:

$$-60 + 12 + 0 + 30 + 18 + 0 = -60 + 60 = 0$$

Assim, os pontos **A**, **B** e **C** são colineares.

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

3 Determine o valor de **m** de modo que (−2, 7), (m, −11) e (1, −2) estejam alinhados.

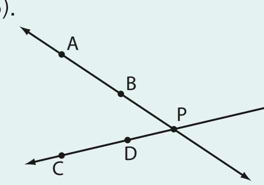
Solução:

Devemos impor a condição de alinhamento D = 0, ou seja: $D = \begin{vmatrix} -2 & 7 & 1 \\ m & -11 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

Temos: $22 + 7 - 2m + 11 - 4 - 7m = 0 \Rightarrow 9m = 36 \Rightarrow m = 4$

Assim, os pontos (−2, 7), (4, −11) e (1, −2) pertencem a uma única reta.

4 Obtenha o ponto comum às retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$, sendo A(−3, 4), B(2, 9), C(2, 7) e D(4, 5).



Solução:

Seja $P(x_P, y_P)$ o ponto de interseção das retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$.

Temos:

- **A**, **B** e **P** são colineares $\Rightarrow D = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 2 & 9 & 1 \\ x_P & y_P & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 5x_P - 5y_P + 35 = 0 \Rightarrow x_P - y_P = -7$ (1)
- **C**, **D** e **P** são colineares $\Rightarrow D = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ x_P & y_P & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x_P + 2y_P - 18 = 0 \Rightarrow x_P + y_P = 9$ (2)

De (1) e (2), segue o sistema $\begin{cases} x_P - y_P = -7 \\ x_P + y_P = 9 \end{cases}$, cuja solução é $x_P = 1$ e $y_P = 8$. Assim, o ponto comum às retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ é P(1, 8).

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

44 Verifique se estes pontos estão alinhados.

a) $(2, 1), \left(7, -\frac{7}{3}\right)$ e $\left(3, \frac{1}{3}\right)$

b) $(0, 4), (4, 0)$ e $(2, -2)$

c) $(1, 5), (-3, 2)$ e $(-7, 1)$

d) $(6, 12), \left(-5, -\frac{8}{3}\right)$ e $(0, 4)$

e) $(-2, 3), (0, 0)$ e $(6, -9)$

f) $(-2, 3), (0, 0)$ e $(-3, 2)$

45 Para que valor de **m** os pontos $(3, 1)$, $(m, 2)$ e $(0, -2)$ são colineares?

46 Ache um ponto que esteja alinhado com $P(3, 5)$ e $Q(-1, -3)$.

47 Os pontos $(-3, -17)$, $(1, 3)$, $(6, 28)$ e $(0, -2)$ pertencem à mesma reta? Verifique analiticamente.

48 Dados os pontos $A(0, -3)$, $B(3, 3)$ e $C(-2, -7)$, calcule as distâncias entre eles e, com base apenas nesses dados, verifique se **A**, **B** e **C** estão alinhados.

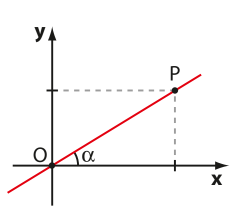
49 Para que valores de **k** os pontos $(2, -3)$, $(4, 3)$ e $\left(5, \frac{k}{2}\right)$ são vértices de um triângulo?

50 Dados os pontos $A(4, -15)$ e $B(-4, 5)$, determine:

a) a relação entre $\mathbf{x}_P$ e $\mathbf{y}_P$ a fim de que $P(x_P, y_P)$ esteja alinhado com **A** e **B**;

b) o ponto em que a reta $\overleftrightarrow{AB}$ intersecta o eixo **x**.

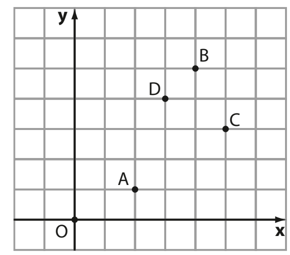
51 Na figura, $\text{tg}\ \alpha = \frac{2}{3}$ e a abscissa de **P** é igual a 6. Verifique, em cada caso, se **O**, **P** e **Q** estão alinhados:



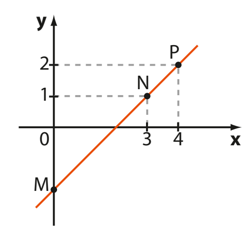
a) $Q(-18, -10)$

b) $Q(900, 600)$

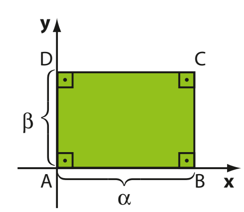
52 Observe a figura abaixo e determine o ponto comum aos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.



53 Na figura, **M**, **N** e **P** estão alinhados. Qual é a ordenada de **M**?



54 Na figura, ABCD é um retângulo cujos lados medem α e β, e **A** é a origem do sistema de coordenadas cartesianas.



a) Escreva as coordenadas dos pontos **A**, **B**, **C** e **D**.

b) Obtenha o ponto de encontro das diagonais do retângulo.

c) Prove que um ponto $P(x, y)$ qualquer está alinhado com **A** e **C** se $-\beta x + \alpha y = 0$.

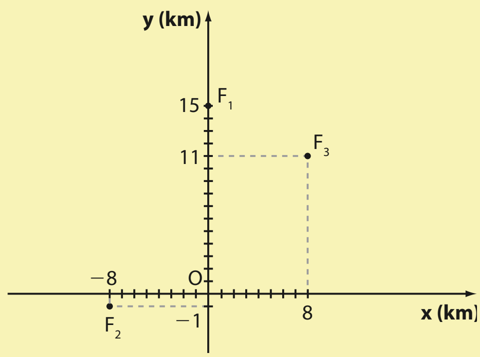
55 Em um jogo de computador, idealizado na tela por um plano cartesiano, o herói encontra-se no ponto $(-3, 2)$ e precisa salvar a princesa no castelo, representado pelo ponto $(2, 5)$, do outro lado de um estreito rio, de trajetória retilínea, representado pelo eixo das ordenadas. O objetivo do jogo é fazer esse caminho o mais rápido possível. Nessas condições, em que ponto do plano ele deverá cruzar o rio a fim de minimizar o tempo de viagem?

Admita que a velocidade do herói seja igual para qualquer movimento.

TROQUE IDEIAS

Resolvendo um problema com o circuncentro do triângulo

Com o auxílio de fotografias tiradas por um satélite, foram localizados três focos de incêndio em uma área descampada, originados pelo calor excessivo e pela falta de chuvas. Para melhor orientação, um especialista construiu um sistema de coordenadas cartesianas em que a origem **O** é um pequeno povoado da região e representou os três focos pelos pontos de coordenadas $F_1(0, 15)$, $F_2(-8, -1)$ e $F_3(8, 11)$. A unidade de medida de comprimento representada no plano cartesiano é de 1 km.



1ª parte

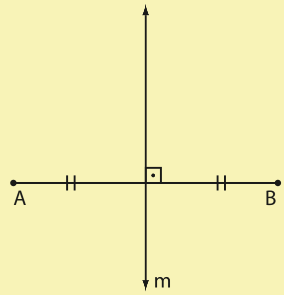
Para combater o incêndio, o corpo de bombeiros pretende instalar a base de operações em um ponto equidistante dos três focos.

a) Em que ponto **P** será instalada a base do corpo de bombeiros?

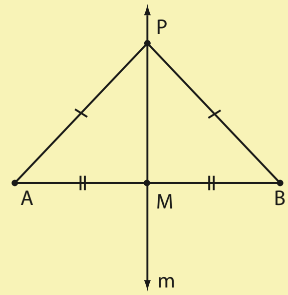
b) Qual é a distância real entre **P** e cada foco de incêndio?

2ª parte

Para as próximas questões, vamos lembrar um conceito da Geometria Plana: "mediatriz de um segmento é a reta perpendicular a esse segmento traçada pelo seu ponto médio".



Na figura abaixo, **m** é a mediatriz de $\overline{AB}$. Considerando um ponto **P** qualquer de **m**, é possível verificar que **P** é equidistante das extremidades do segmento, isto é, PA = PB.



PENSE NISTO:

Por que PA = PB?

c) Represente, em um quadriculado, o ponto **P** determinado no item *a* e os três pontos: $\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$ e $\mathbf{F_3}$. Em seguida, com um compasso, trace a circunferência de centro em **P** e raio de medida PF_1. O que podemos observar?

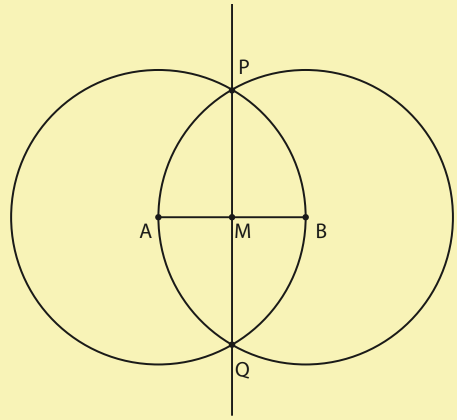
Vamos agora obter o ponto **P** de outro modo: usando construções com régua e compasso. Para isso, vamos lembrar como construir a mediatriz de um segmento qualquer $\overline{AB}$:

1º) Com centro em **A** e raio de medida $\overline{AB}$ (abertura do compasso), trace uma circunferência.

2º) Com centro em **B** e raio de medida $\overline{AB}$, trace uma circunferência.

3º) Considerando **P** e **Q** os pontos em que essas circunferências se intersectam, a mediatriz é a reta $\overleftrightarrow{PQ}$.

Justificativa: Como PA = PB = QA = QB, o quadrilátero PABQ é um losango e as diagonais do losango se intersectam perpendicularmente em seus pontos médios.



Daí $\overleftrightarrow{PQ} \perp \overleftrightarrow{AB}$ e **M** é ponto médio de $\overline{AB}$; logo $\overleftrightarrow{PQ}$ é a mediatriz de $\overline{AB}$.

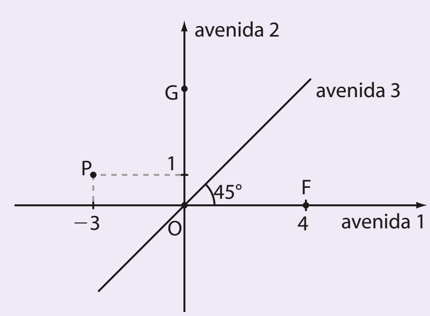
d) Represente, em um quadriculado, os focos $\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$ e $\mathbf{F_3}$. Com régua e compasso, obtenha o ponto **P**, circuncentro do triângulo $F_1F_2F_3$. Verifique se as coordenadas de **P**, obtidas nessa construção, coincidem com as coordenadas obtidas analiticamente no item *a*.

DESAFIO

Em um condomínio, as casas estão distribuídas ao longo de três grandes "avenidas" retilíneas: $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$ e $\mathbf{A_3}$. O esquema ao lado representa uma planta simplificada do local.

Inserindo-se convenientemente um sistema de coordenadas cartesianas cuja origem **O** representa a rotatória que dá acesso às três avenidas, podemos representar:

- duas avenidas pelos eixos cartesianos e uma pela bissetriz dos quadrantes ímpares;
- a casa de Fábio pelo ponto F(4, 0);
- a casa de seu irmão, Gabriel, pelo ponto **G**;
- a piscina do condomínio pelo ponto P(−3, 1).



Nesse sistema de coordenadas, a unidade de medida de comprimento é o centímetro e a escala utilizada é de 1 : 2 000.

a) Obtenha as coordenadas de **G** nesse sistema cartesiano, sabendo que a distância real entre as casas de Fábio e Gabriel é de 100 metros.

b) Determine as distâncias reais entre a casa de cada um dos irmãos e a piscina.

Considere $\sqrt{2} \simeq 1{,}4$ e $\sqrt{13} \simeq 3{,}6$.

c) Um grande amigo dos irmãos planeja comprar um terreno no condomínio e construir uma casa, na avenida 3, que diste igualmente da casa dos dois irmãos. Em que ponto desse plano seria representada a casa?