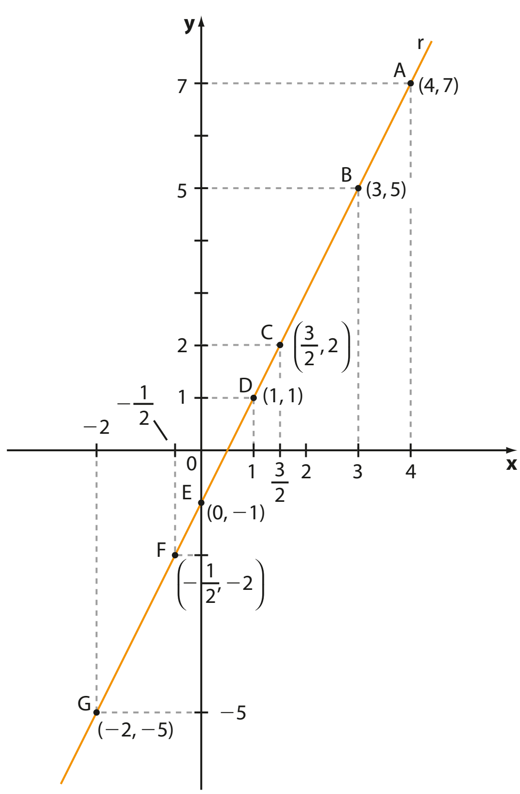
CAPÍTULO 2

A reta

Introdução

Observe abaixo a reta **r**, que passa por vários pontos cujas coordenadas são conhecidas.



Um ponto P(x, y) qualquer pertencerá a **r** se estiver alinhado a dois pontos quaisquer de **r**, por exemplo, **A** e **B**:

$$\textbf{A}, \textbf{B} \text{ e } \textbf{P} \text{ colineares} \Rightarrow D = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 20 + 7x + 3y - 5x - 4y - 21 = 0 \Rightarrow 2x - y - 1 = 0 \quad (1)$$

Se tivéssemos escolhido os pontos **E** e **F**, teríamos:

$$\textbf{E}, \textbf{F} \text{ e } \textbf{P} \text{ colineares} \Rightarrow D = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x - \frac{1}{2}y + 2x - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} = 0 \quad (2)$$

As equações obtidas em 1 e 2 são equivalentes (observe que, se dividirmos os coeficientes de 1 por 2, obtemos 2) e nos mostram a relação que **x** e **y** devem satisfazer a fim de que um ponto P(x, y) pertença a **r**.

A reta **r** pode ser analiticamente descrita por uma dessas equações ou por qualquer outra equivalente, dependendo dos pontos escolhidos. Cada uma delas é chamada **equação geral de r**.

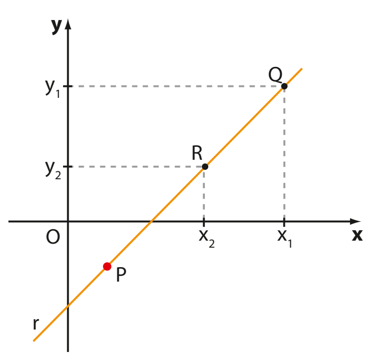
Equação geral da reta

A toda reta **r** do plano cartesiano está associada pelo menos uma equação do tipo $ax + by + c = 0$, em que **a**, **b** e **c** são números reais, com **a** e **b** não nulos simultaneamente, e **x** e **y** são as coordenadas de um ponto P(x, y) genérico de **r**. Costuma-se escrever $r: ax + by + c = 0$.

Vamos demonstrar essa propriedade:

Sejam $Q(x_1, y_1)$ e $R(x_2, y_2)$ dois pontos distintos do plano cartesiano, e $r = \overleftrightarrow{QR}$ é a reta determinada por **Q** e **R**.

Um ponto genérico de **r** é P(x, y), isto é, **P** é um ponto que "percorre" **r**.



Como **P**, **Q** e **R** estão alinhados, devemos ter D = 0, isto é:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow xy_1 + yx_2 + x_1y_2 - x_2y_1 - xy_2 - yx_1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1) + (x_1y_2 - x_2y_1) = 0 \quad *$$

Como $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{y_1}$, $\mathbf{x_2}$ e $\mathbf{y_2}$ são números reais conhecidos, podemos fazer: $y_1 - y_2 = a$, $x_2 - x_1 = b$ e $x_1y_2 - x_2y_1 = c$, e obtemos em *: $ax + by + c = 0$, que é chamada equação geral de **r**.

OBSERVAÇÃO

Na demonstração acima podemos entender o porquê de **a** e **b** serem coeficientes não nulos simultaneamente:

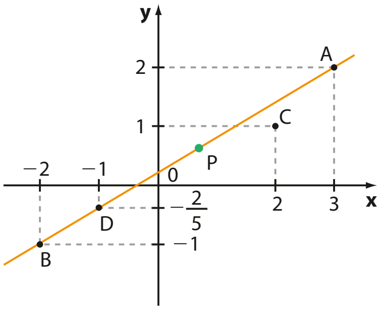
$$\left.\begin{array}{l} \text{Se } a = 0,\ y_1 - y_2 = 0 \Rightarrow y_1 = y_2 \\ \text{Se } b = 0,\ x_2 - x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow Q = R, \text{ o que é absurdo, pois consideramos que } \mathbf{Q} \text{ e } \mathbf{R} \text{ são pontos distintos.}$$

Logo, não podemos ter **a** e **b** simultaneamente nulos.

EXEMPLO 1

Para obter uma equação geral da reta **r** que passa pelos pontos A(3, 2) e B(−2, −1), basta impor a condição de alinhamento para **A**, **B** e P(x, y), ponto genérico de **r**:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$



Calculando o determinante, temos:

$$-3 + 2x - 2y + x - 3y + 4 = 0 \Rightarrow 3x - 5y + 1 = 0$$

Assim, **r** é dada pela equação: $3x - 5y + 1 = 0$; e indica-se r: $3x - 5y + 1 = 0$.

O ponto C(2, 1) **não** pertence a **r**. De fato, suas coordenadas não satisfazem a equação de **r**:

$$3 \cdot 2 - 5 \cdot 1 + 1 = 0 \Rightarrow 2 = 0 \text{ (falso)}$$

Já o ponto $D\left(-1, -\frac{2}{5}\right)$ pertence a **r**:

$$3 \cdot (-1) - 5 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) + 1 = -3 + 2 + 1 = 0$$

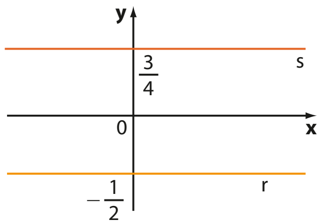
Casos particulares

Se um dos coeficientes da equação geral de uma reta ($ax + by + c = 0$) é igual a zero, a reta apresenta uma propriedade especial. Temos três casos:

- $a = 0 \Leftrightarrow y_1 - y_2 = 0 \Leftrightarrow y_1 = y_2$, isto é, dois pontos distintos dessa reta possuem a mesma ordenada. Desse modo, se a equação não tem termo em **x**, a reta é paralela ao eixo **x**.

EXEMPLO 2

Observe as retas **r** e **s** representadas na figura abaixo.



PENSE NISTO:

Escreva uma equação da reta que represente o eixo **x**.

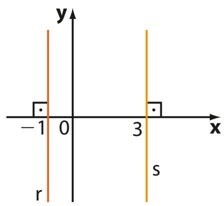
$4y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}$ é uma equação da reta **s**.

$2y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}$ é uma equação da reta **r**.

- $b = 0 \Leftrightarrow x_2 - x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$, isto é, dois pontos distintos dessa reta possuem a mesma abscissa. Assim, se a equação não tem termo em **y**, a reta é paralela ao eixo **y**.

EXEMPLO 3

Observe as retas **r** e **s** representadas na figura abaixo.



$2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ é uma equação da reta **r**.
$-x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ é uma equação da reta **s**.

PENSE NISTO:

Escreva uma equação da reta que represente o eixo **y**.

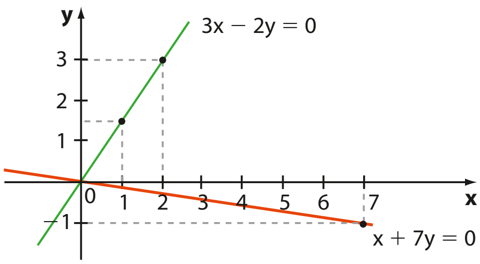
- $c = 0 \Leftrightarrow ax + by = 0$

  Nesse caso, para todo $a \in \mathbb{R}^*$ e $b \in \mathbb{R}^*$, o par ordenado (0, 0) satisfaz a equação, ou seja, $a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0$.

  Desse modo, se a equação não tem termo independente, a reta passa pela origem.

EXEMPLO 4

As retas de equações $3x - 2y = 0$ e $x + 7y = 0$ passam pelo ponto (0, 0).



Recíproca da propriedade

A toda equação da forma $ax + by + c = 0$, em que **a**, **b** e **c** são números reais tais que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, está associada uma única reta **r** do plano cartesiano, cujos pontos possuem coordenadas (x, y) que satisfazem essa equação.

Demonstração:

Sejam $M(x_M, y_M)$, $N(x_N, y_N)$ e $P(x_P, y_P)$ três pontos distintos cujas coordenadas satisfazem a equação $ax + by + c = 0$. Vamos mostrar que **M**, **N** e **P** pertencem a uma mesma reta (admitimos $a \neq 0$).

Temos:

$$\begin{cases} ax_M + by_M + c = 0 \Rightarrow x_M = \dfrac{-by_M - c}{a} \\ ax_N + by_N + c = 0 \Rightarrow x_N = \dfrac{-by_N - c}{a} \\ ax_P + by_P + c = 0 \Rightarrow x_P = \dfrac{-by_P - c}{a} \end{cases}$$

Calculamos o determinante: $\begin{vmatrix} x_M & y_M & 1 \\ x_N & y_N & 1 \\ x_P & y_P & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{-by_M - c}{a} & y_M & 1 \\ \dfrac{-by_N - c}{a} & y_N & 1 \\ \dfrac{-by_P - c}{a} & y_P & 1 \end{vmatrix}$

Pela regra de Sarrus, chegamos à conclusão de que o determinante é nulo. Isso implica, como vimos, que os pontos **M**, **N** e **P** são colineares.

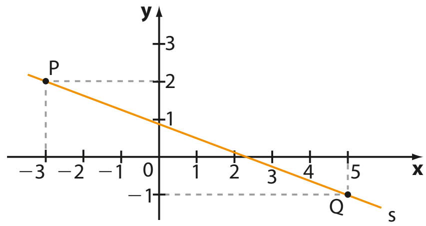
EXEMPLO 5

Vamos construir o gráfico da relação $3x + 8y - 7 = 0$.

Como vimos, trata-se da equação geral de uma reta. Para construí-la é suficiente conhecer dois de seus pontos:

- Se $x = -3$, temos $3 \cdot (-3) + 8y - 7 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow 8y = 16 \Rightarrow y = 2$; obtemos o ponto $P(-3, 2)$.
- Se $x = 5$, temos $3 \cdot 5 + 8y - 7 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow 8y = -8 \Rightarrow y = -1$; obtemos o ponto $Q(5, -1)$.

Construímos, assim, a reta $\overleftrightarrow{PQ}$ ao lado.



Vamos analisar a relação $3x + 8y - 7 = 0$ de outro modo: se isolarmos **y** em função de **x**, obtemos:

$$8y = -3x + 7 \Rightarrow y = -\frac{3}{8}x + \frac{7}{8}$$

Como vimos no estudo de funções, a lei $y = -\frac{3}{8}x + \frac{7}{8}$ representa uma **função afim** (isto é, uma função polinomial do 1º grau, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por $y = ax + b$ (com **a** e **b** reais e $a \neq 0$), cujo gráfico é uma reta oblíqua ao eixo das abscissas.

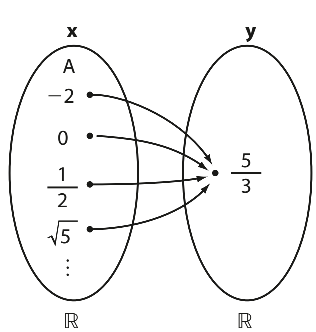
Quando estudamos a função afim, vimos que o coeficiente **a** está ligado à inclinação da reta e o coeficiente **b** é igual à ordenada do ponto em que a reta intersecta o eixo **y**. Mais adiante, vamos estudar com mais detalhes essas relações.

Generalizando, podemos dizer que, se a equação geral de uma reta é $ax + by + c = 0$, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$, então ela representa a lei da função afim: $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$.

É importante analisarmos dois casos particulares:

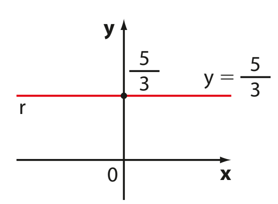
- Se $a = 0$ e $b \neq 0$, obtemos $by + c = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{c}{b}$ e, nesse caso, temos a lei de uma **função constante**.

  Por exemplo, se a equação geral de uma reta **r** é $3y - 5 = 0$, então $y = \frac{5}{3}$ representa a lei da função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que, a todo $x \in \mathbb{R}$ associa a imagem $\frac{5}{3}$. O gráfico dessa função é a reta **r** paralela ao eixo das abscissas:

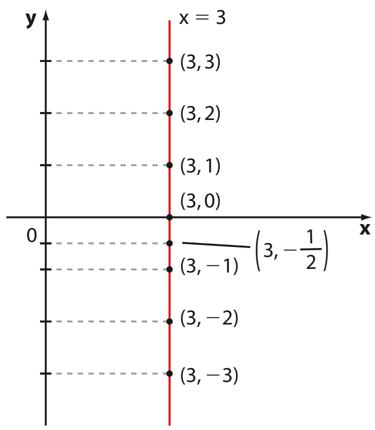


$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = \frac{5}{3}$



- Se $b = 0$ e $a \neq 0$, obtemos $ax + c = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{c}{a}$ e, nesse caso, a equação geral $ax + c = 0$ **não** define uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Por exemplo, a equação $2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ é representada, graficamente, por todos os pontos do plano cuja abscissa é igual a 3:



Podemos notar que $x = 3$ está associado a infinitos valores de **y** (isto é, possui infinitas imagens). Isso contraria a definição de função. Observe também que para cada $x \neq 3$ não há imagem correspondente.

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

1 Seja **r** a reta que passa pelos pontos $(1,\ 2)$ e $(-2,\ 5)$.
Determine:

a) uma equação geral de **r**.

b) os pontos de interseção de **r** com os eixos coordenados.

c) a lei da função afim cujo gráfico é **r**.

Solução:

a) Seja $P(x,\ y)$ um ponto genérico de **r**. Temos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x - 2y + 5 + 4 - 5x - y = 0 \Rightarrow -3x - 3y + 9 = 0$$

ou, dividindo por 3 seus coeficientes, temos **r**: $-x - y + 3 = 0$. (*)

b) Sejam **M** e **N** os pontos de interseção de **r** com os eixos **x** e **y**, respectivamente.

- Ponto **M**: devemos determinar o ponto de **r** cuja ordenada é nula. A partir da equação da reta **r**, obtemos: $-x - 0 + 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow M(3,\ 0)$; lembre que $x = 3$ é raiz da função.
- Ponto **N**: devemos determinar o ponto de **r** cuja abscissa é nula. Na equação da reta **r**, temos: $-0 - y + 3 = 0 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow N(0,\ 3)$.

c) Basta isolar **y** em (*):

$$-x - y + 3 = 0 \Rightarrow -x + 3 = y$$

2 Determine os pontos da reta $r\colon 5x - 12y = 0$ que distam três unidades da origem. Represente graficamente.

Solução:

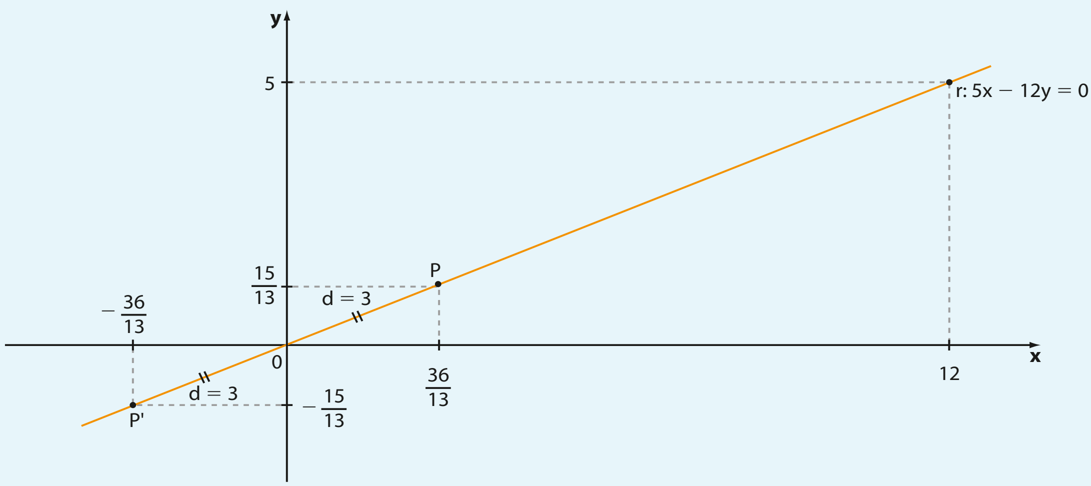
Seja $P(x_P,\ y_P)$ o ponto de **r** procurado. Temos:

$$5x_P - 12y_P = 0 \Rightarrow x_P = \frac{12y_P}{5}$$

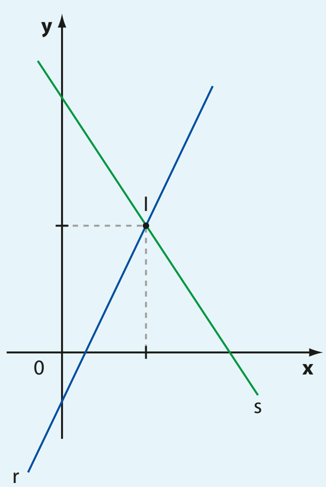
A distância de **P** à origem é 3:

$$\sqrt{(x_P - 0)^2 + (y_P - 0)^2} = 3 \Rightarrow \sqrt{\left(\frac{12y_P}{5}\right)^2 + y_P^2} = 3 \Rightarrow \sqrt{\frac{169y_P^2}{25}} = 3 \Rightarrow \frac{169y_P^2}{25} = 9 \Rightarrow y_P = \pm\frac{15}{13}$$

- Se $y_P = \frac{15}{13}$, então $x_P = \frac{12}{5} \cdot \frac{15}{13} = \frac{36}{13}$ e $P\left(\frac{36}{13}, \frac{15}{13}\right)$.
- Se $y_P = -\frac{15}{13}$, então $x_P = \frac{12}{5} \cdot \left(-\frac{15}{13}\right) = -\frac{36}{13}$ e $P'\left(-\frac{36}{13}, -\frac{15}{13}\right)$.



3 Determine o ponto **I** de interseção das retas r: $2x - y - 1 = 0$ e s: $4x + 3y - 17 = 0$ representadas abaixo:



Solução:

No estudo das funções, já aprendemos a determinar o ponto de interseção de duas retas: basta resolver o sistema formado pelas leis das funções que representam as retas. A solução do sistema corresponde às coordenadas de **I**:

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x + 3y = 17 \end{cases} \Rightarrow x = 2 \text{ e } y = 3 \Rightarrow I(2, 3)$$

OBSERVAÇÃO

Em geral, dadas as retas r: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e s: $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, ao resolvermos o sistema formado por essas equações podem ocorrer três casos:

- O sistema possui uma única solução, isto é, é possível e determinado. As duas retas intersectam-se em um único ponto.
- O sistema possui infinitas soluções, isto é, é possível e indeterminado. As duas retas possuem infinitos pontos comuns, isto é, são coincidentes.
- O sistema não possui solução, isto é, é impossível. As duas retas são paralelas distintas.

4 As retas suportes dos lados de um triângulo ABC são r: $x - 1 = 0$; s: $x + y - 6 = 0$ e t: $x - 3y - 9 = 0$. Obtenha os vértices desse triângulo.

Solução:

Cada vértice do triângulo é a interseção de duas retas suportes; é preciso, portanto, resolver três sistemas:

- $A = r \cap s$

$$\begin{cases} x - 1 = 0 \\ x + y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x = 1 \text{ e } y = 5.$$

Temos: A(1, 5)

- $B = r \cap t$

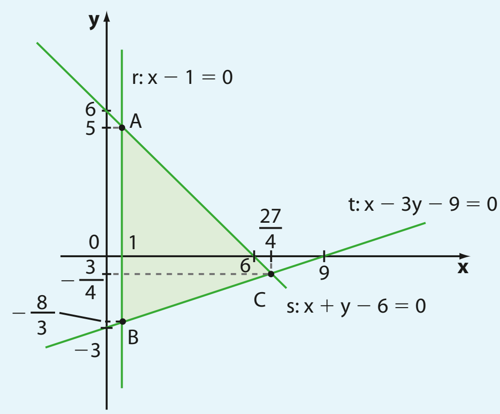
$$\begin{cases} x - 1 = 0 \\ x - 3y - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 1 \text{ e } y = -\frac{8}{3}$$

Temos: $B\left(1, -\frac{8}{3}\right)$

- $C = s \cap t$

$$\begin{cases} x + y - 6 = 0 \\ x - 3y - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x = \frac{27}{4} \text{ e } y = -\frac{3}{4}$$

Temos: $C\left(\frac{27}{4}, -\frac{3}{4}\right)$



EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

1 Em cada caso, encontre uma equação geral da reta que passa pelos pontos:

a) (0, 2) e (2, 3)

b) (−1, 2) e (−2, 5)

c) (−1, −2) e $\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$

d) (0, −3) e (3, −2)

2 Verifique por quais dos pontos A(−2, −5), B(−1, 4), $C\left(2, -\frac{1}{5}\right)$, D(3, 1) e $E\left(-1, \frac{19}{5}\right)$ passa a reta de equação $6x - 5y - 13 = 0$.

3 Represente graficamente as retas de equação:

a) $x - y + 1 = 0$

b) $-3x - y + 2 = 0$

c) $3x - y = 0$

d) $x + 5 = 0$

e) $y + 4 = 0$

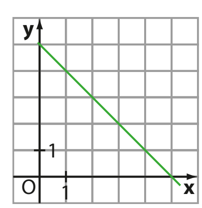
f) $200x - 500y + 300 = 0$

4 Escreva em seu caderno a associação correta de cada reta à lei da função afim correspondente.

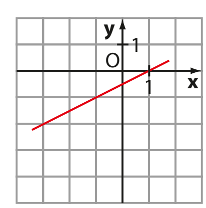
r: $y = \frac{x - 1}{2}$ s: $y = -\frac{3}{2}x - 3$

t: $y = -x + 5$ u: $y = \frac{3x}{4} - 3$

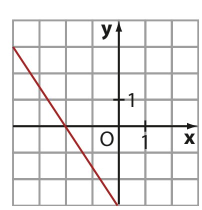
a)



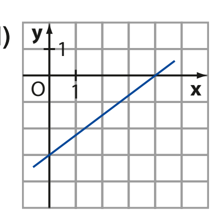
c)



b)



d)



5 A reta **s** passa por A(2, −1) e pelo ponto médio de $\overline{BC}$, sendo B(0, −1) e C(−3, 2).

a) Escreva uma equação geral de **s**.

b) A reta **s** passa pela origem? E pelo ponto (−7, 3)?

6 Determine uma equação geral da reta vertical que passa por (2, 17).

7 Uma reta paralela ao eixo **x** passa pelo ponto (1, 5). Escreva uma equação geral dessa reta.

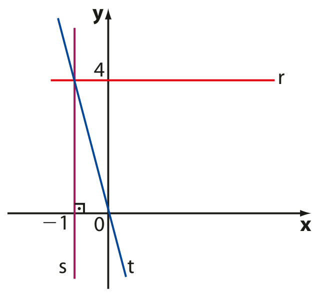
8 **f** é uma função afim cujo gráfico é uma reta que passa pela origem e por (1, 5).

a) Qual é a lei que define **f**?

b) Calcule o valor de $f(-2) + f(0,2)$.

c) Escreva uma equação geral da reta que é o gráfico de **f**.

9 Escreva uma equação geral para cada uma das retas **r**, **s** e **t** da figura.



10 Uma vela de 8 cm foi acesa às 17 horas. Sabe-se que às 19 horas a altura da vela era 4,8 cm. Suponha linear a variação da altura (**h**) da vela (em cm) em função do tempo **x**, em horas, sendo $x = 0$ o instante em que ela foi acesa.

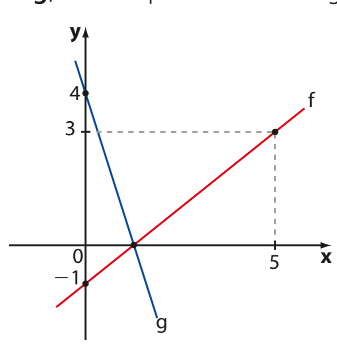
a) Obtenha a lei da função que relaciona **h** e **x**.

b) Determine em qual horário a vela foi inteiramente consumida.

c) Represente graficamente a função obtida no item *a*.

d) Obtenha uma equação geral da reta obtida no item *c*.

11 Os gráficos de duas funções polinomiais do 1º grau, **f** e **g**, estão representados a seguir.



Qual é a lei que define a função **g**?

12 Considere o triângulo de vértices A(0, 0), B(1, 3) e C(4, 0). Determine as equações gerais das retas suportes dos lados desse triângulo.

13 Qual é o ponto da reta $x - y + 1 = 0$ que dista $\sqrt{13}$ do ponto (0, 2)?

14 Obtenha o ponto de interseção entre as retas de equações:

a) $2x - y + 6 = 0$ e $2x + 3y - 6 = 0$

b) $x + y - 2 = 0$ e $3x - y + 4 = 0$

c) $x - 2y = 0$ e $x + y - 1 = 0$

15 As retas r: $x + 3 = 0$ e s: $y - 2 = 0$ intersectam-se em um ponto **P**.

a) Determine as coordenadas de **P**.

b) Qual é a distância de **P** à origem?

16 Qual é, em cada caso, a posição relativa das retas **r** e **s**?

a) r: $x - 3y + 2 = 0$; s: $2x - y = 0$

b) r: $x + y - 3 = 0$; s: $-2x - 2y + 6 = 0$

c) r: $-2x + y - 3 = 0$; s: $-x + \frac{y}{2} + 1 = 0$

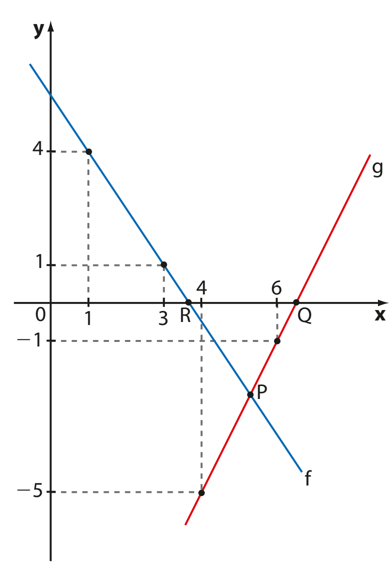
d) r: $x - 1 = 0$; s: $x + 2 = 0$

17 As retas cujas equações são $2x - y - k = 0$ e $2x + y - k = 0$, com $k \in \mathbb{R}$, intersectam-se no ponto $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$. Qual é o valor de **k**?

18 Verifique se as retas de equações $2x - y - 3 = 0$, $3x + 2y - 1 = 0$ e $4x - y - 5 = 0$ intersectam-se no mesmo ponto. Em caso afirmativo, quais são as coordenadas desse ponto?

19 Em que condições as retas de equações $px - y + 3p = 0$ e $2x - y + 6 = 0$ têm mais de um ponto comum?

20 As representações gráficas de duas funções do 1º grau, **f** e **g**, são dadas a seguir:



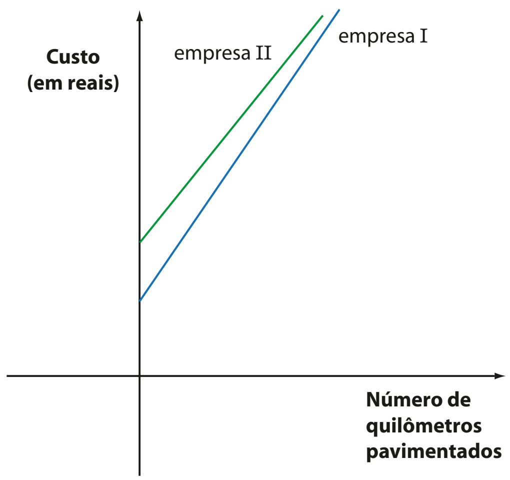
a) Obtenha a lei que define cada uma dessas funções.

b) Qual é o valor de f(2) + g(1)?

c) Determine as coordenadas de **P**.

d) Obtenha a área do triângulo PQR.

21 Em uma licitação para pavimentação de uma estrada, duas empresas ofereceram condições similares (embora com valores diferentes). Cada uma delas cobrava um valor fixo e um adicional por quilômetro de estrada pavimentada. A relação entre o custo da obra e o número de quilômetros a serem pavimentados pode ser esboçada como no gráfico a seguir:



As retas suporte das semirretas mostradas no gráfico têm por equações gerais:

$$5\,000x - y + 400\,000 = 0 \text{ e}$$

$$6\,000x - y + 240\,000 = 0$$

a) Associe cada reta à empresa correspondente.

b) Qual é o valor fixo cobrado por cada uma das empresas?

c) Qual é o valor cobrado por quilômetro pavimentado por cada empresa?

d) Qual é o custo total da pavimentação de 100 km em cada uma das empresas?

e) Para quantos quilômetros de pavimentação é indiferente contratar qualquer uma das empresas?

22 As retas r: $2x - y - 3 = 0$, s: $x + 2y - 3 = 0$ e t: $2x + y - 5 = 0$ são suportes dos lados de um triângulo. Determine as coordenadas dos vértices do triângulo.

23 As retas de equações $x - 3y - 2 = 0$ e $x - y - 2p = 0$, com $p \in \mathbb{R}$, intersectam-se no ponto de coordenadas $(p + 1, p - 1)$. Determine o valor de **p** e as coordenadas do ponto de interseção dessas retas.

24 Os pontos A(−1, 3), B(2, 4), C(4, −1) e D(−2, −2) são vértices de um quadrilátero. Determine as coordenadas do ponto de encontro de suas diagonais.

25 As equações das três retas suportes de um triângulo são:

$$x - 1 = 0,\ y - 2 = 0 \text{ e } x + y - 1 = 0$$

a) Classifique esse triângulo quanto aos lados e ângulos.

b) Determine o perímetro e a área do triângulo.

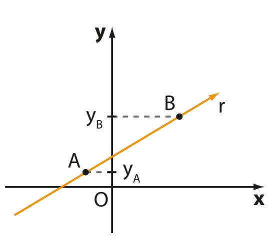
26 Qual deve ser o vértice **C** de um triângulo ABC para que sejam verificadas as condições abaixo? Qual o perímetro desse triângulo?

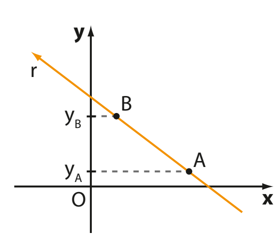
- O vértice **A** pertence ao eixo **x**.
- O vértice **B** pertence ao eixo **y**.
- A reta $\overline{BC}$ tem equação $x - y = 0$.
- A reta $\overline{AC}$ tem equação $x + 2y - 3 = 0$.

Inclinação de uma reta

Seja **r** uma reta do plano cartesiano, não paralela ao eixo **x**. Fixemos em **r** dois pontos distintos **A** e **B**.

Vamos convencionar que o **sentido positivo de r** é aquele em que "se parte do ponto de menor ordenada e se chega ao ponto de maior ordenada". Observe os dois casos seguintes: o sentido positivo de **r** está indicado pela seta.



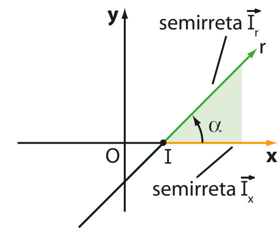


OBSERVAÇÃO

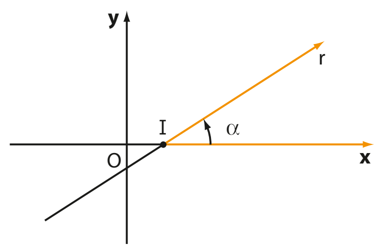
Quando a reta **r** for paralela ao eixo **x**, dados **A** e **B** distintos, temos que $y_A = y_B$. Nesse caso, o sentido positivo de **r** é o sentido positivo do eixo **x**.

Seja I o ponto de interseção de **r** com o eixo **x**. O ângulo que a reta **r** forma com o eixo **x** é o menor ângulo formado pelas semirretas $\overrightarrow{I_x}$ e $\overrightarrow{I_r}$. A semirreta $\overrightarrow{I_x}$ tem origem em I e sentido coincidente com o do eixo das abscissas. A semirreta $\overrightarrow{I_r}$ tem origem em I e sentido coincidente com o sentido positivo de **r**.

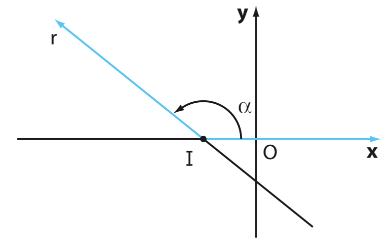
Esse ângulo denomina-se **inclinação da reta**. Vamos indicar a medida desse ângulo por **α**.



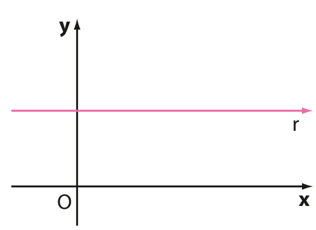
Observe os casos possíveis:



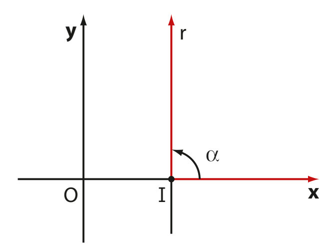
$0° < \alpha < 90°$



$90° < \alpha < 180°$



$\alpha = 0°$



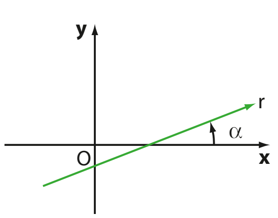
$\alpha = 90°$

Coeficiente angular

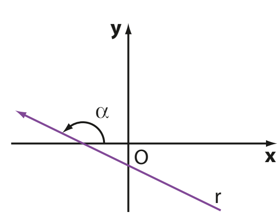
Coeficiente angular ou **declividade** de uma reta **r** é o número real **m** definido por:

$$m = \text{tg}\ \alpha$$

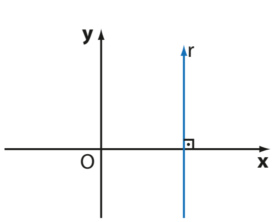
sendo α a medida do ângulo de inclinação de **r**. Temos as seguintes possibilidades:



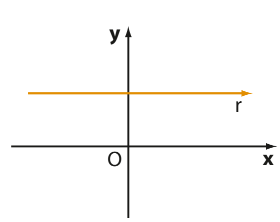
α é agudo.
$m = \text{tg}\ \alpha > 0$



α é obtuso.
$m = \text{tg}\ \alpha < 0$



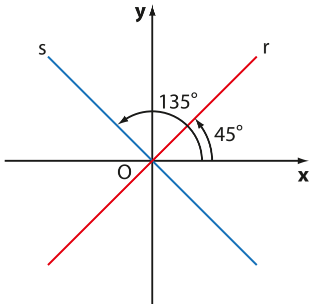
α é reto.
Como não existe tg 90°, não é possível definir o coeficiente angular de **r**.



$\alpha = 0°$
$m = \text{tg}\ 0° = 0$

EXEMPLO 6

A reta r: $x - y = 0$, correspondente à bissetriz dos quadrantes ímpares, tem declividade $m = \text{tg } 45° = 1$; já a reta s: $x + y = 0$, correspondente à bissetriz dos quadrantes pares, tem coeficiente angular $m = \text{tg } 135° = -1$.



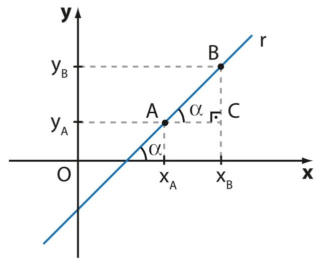
$$m_r = \text{tg } 45° = 1$$
$$m_s = \text{tg } 135° = -1$$

Cálculo do coeficiente angular de uma reta a partir de dois de seus pontos

Seja **r** a reta determinada pelos pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$. Vamos considerar dois casos:

- $0 < \alpha < 90°$

No triângulo ACB, temos:



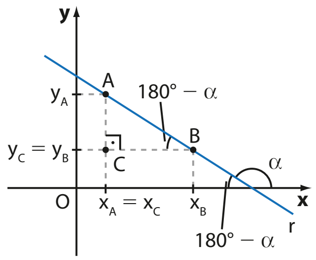
$$\text{tg } \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Assim, o coeficiente angular de **r** é:

$$m = \text{tg } \alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

- $90° < \alpha < 180°$

No triângulo ACB, temos:



$$\text{tg } (180° - \alpha) = \frac{AC}{BC} = \frac{y_A - y_B}{x_B - x_A}$$

Da trigonometria, sabemos que $\text{tg } (180° - \alpha) = -\text{tg } \alpha$. Daí, temos:

$$-\text{tg } \alpha = \frac{y_A - y_B}{x_B - x_A} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Assim, o coeficiente angular de **r** é:

$$m = \text{tg } \alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

PENSE NISTO:

$\text{tg } (180° - \alpha) = -\text{tg } \alpha$

Em qualquer um dos casos, podemos calcular o coeficiente angular da reta que passa por $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ por meio da relação:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Como $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-(y_A - y_B)}{-(x_A - x_B)} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$, podemos simplesmente escrever:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

em que Δy é a diferença entre as ordenadas de **A** e **B**, e Δx, a diferença entre as abscissas de **A** e **B**, ambas calculadas no mesmo "sentido", como mostra o exemplo seguinte.

EXEMPLO 7

Vamos calcular o coeficiente angular da reta que passa por A(−5, 4) e B(3, 2).
Temos:

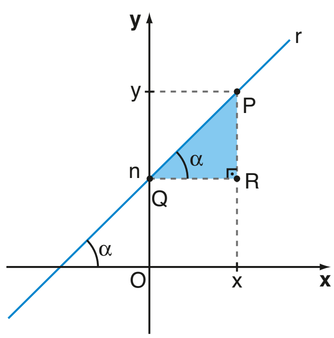
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4 - 2}{-5 - 3} = \frac{2}{-8} = -\frac{1}{4} \text{ (Calculamos a diferença de "}\mathbf{A}\text{ para }\mathbf{B}\text{".)}$$

Observe que poderíamos também fazer:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 - 4}{3 - (-5)} = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4} \text{ (Calculamos a diferença de "}\mathbf{B}\text{ para }\mathbf{A}\text{".)}$$

Equação reduzida de uma reta

Sejam **r** a reta cuja medida do ângulo de inclinação é α e P(x, y) um ponto genérico de **r**. A reta **r** intersecta o eixo das ordenadas em um ponto **Q** cuja abscissa é nula, isto é, Q(0, n).



Como vimos, o coeficiente angular da reta **r** que passa por Q(0, n) e P(x, y) é dado por $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - n}{x - 0}$, isto é, $m = \frac{y - n}{x} \Rightarrow \boxed{y = mx + n}$

Essa última expressão é chamada **forma reduzida da equação da reta r**, ou simplesmente **equação reduzida da reta r**, na qual $\{m, n\} \subset \mathbb{R}$ e:

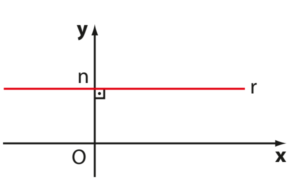
- **m** é o **coeficiente angular** de **r**;
- **n** é a ordenada do ponto em que **r** corta o eixo das ordenadas e é chamado **coeficiente linear** de **r**;
- **x** e **y** são as coordenadas de um ponto qualquer da reta **r**.

PENSE NISTO:

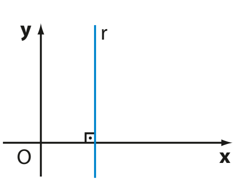
Qual seria a outra forma de calcular o coeficiente angular da reta **r**?

OBSERVAÇÕES

- Se a reta **r** é horizontal, ela forma ângulo nulo com o eixo das abscissas; assim, m = tg 0° = 0 e a equação reduzida da reta torna-se simplesmente y = n.



- Se a reta **r** é vertical, ela forma ângulo reto com o eixo das abscissas; como não existe tg 90°, não se define o coeficiente angular de **r** e, assim, é impossível escrever a forma reduzida da equação de qualquer reta vertical.



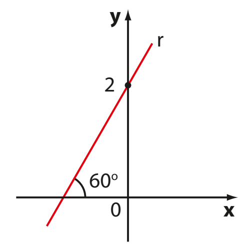
EXEMPLO 8

Na figura, a medida do ângulo de inclinação de **r** é 60°, e **r** intersecta o eixo das ordenadas em (0, 2).

Podemos concluir que:

$$m = \text{tg } 60° = \sqrt{3} \text{ e } n = 2$$

Assim, r: $y = \sqrt{3}x + 2$ é a forma reduzida da equação da reta **r**.



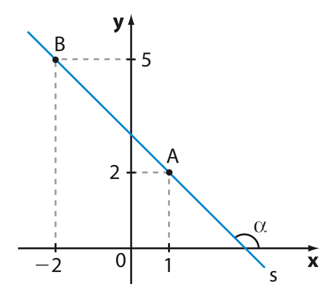
EXEMPLO 9

A reta **s** passa pelos pontos A(1, 2) e B(−2, 5).

Vamos determinar a equação reduzida de **s**.

O coeficiente angular de **s** pode ser obtido fazendo-se:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5 - 2}{-2 - 1} = \frac{3}{-3} = -1$$



A equação reduzida de **s** é escrita provisoriamente como:

$$s: y = -1 \cdot x + n$$

Como não sabemos qual é o ponto em que **s** intersecta o eixo **y**, podemos substituir **x** e **y** pelas coordenadas de um ponto que pertença a **r** (por exemplo, o ponto **A**), a fim de determinar o valor de **n**:

$$2 = -1 \cdot 1 + n \Rightarrow 2 = -1 + n \Rightarrow n = 3$$

Assim, a equação reduzida de **s** é s: $y = -x + 3$.

PENSE NISTO:

Por que $\alpha = 135°$?

OBSERVAÇÃO

Se uma reta não é vertical, é possível transformar sua equação geral em reduzida e vice-versa:

$$ax + by + c = 0 \Rightarrow by = -ax - c \Rightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

Nesse caso, o coeficiente angular dessa reta é $m = -\frac{a}{b}$ e seu coeficiente linear é $n = -\frac{c}{b}$.

Inversamente, se uma reta é dada em sua forma reduzida, basta agrupar todos os seus termos em um único membro:

$$y = mx + n \Rightarrow mx - y + n = 0 \text{ é a equação geral dessa reta.}$$

EXEMPLO 10

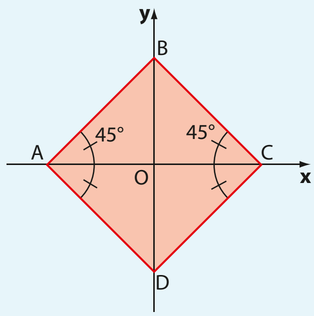
Se a reta **r** é dada por $3x + 6y + 7 = 0$, isolando **y**, obtemos:

$$6y = -3x - 7 \text{ e } y = -\frac{x}{2} - \frac{7}{6}, \text{ que é sua forma reduzida.}$$

Inversamente, dada a equação de uma reta **s** em sua forma reduzida $y = 3x - 5$, colocando todos os termos em um único membro, obtemos $3x - y - 5 = 0$, que é sua forma geral.

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

5 Na figura, ABCD é um quadrado cujo lado mede 2. Escreva as equações reduzidas das retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$.



Solução:

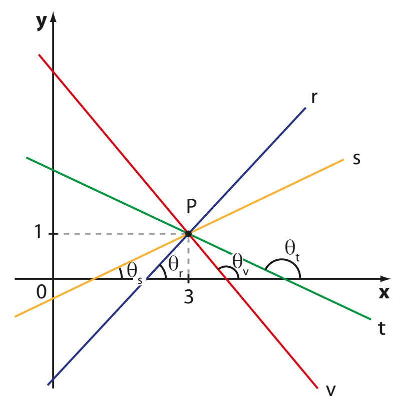
Se o lado do quadrado mede 2, sua diagonal $\overline{AC}$ (ou $\overline{BD}$) mede $2\sqrt{2}$, e as coordenadas de seus vértices são: $A(-\sqrt{2}, 0)$, $C(\sqrt{2}, 0)$, $B(0, \sqrt{2})$ e $D(0, -\sqrt{2})$.

A reta $\overleftrightarrow{AB}$ possui declividade dada por $m = \text{tg } 45° = 1$, e seu coeficiente linear é $\sqrt{2}$; então a equação reduzida de $\overleftrightarrow{AB}$ é $y = x + \sqrt{2}$.

A reta $\overleftrightarrow{BC}$ tem declividade $m = \text{tg } 135° = -1$, e seu coeficiente linear também é $\sqrt{2}$; então a equação reduzida de $\overleftrightarrow{BC}$ é: $y = -x + \sqrt{2}$.

EXEMPLO 11

Como sabemos, existem infinitas retas que passam por um determinado ponto. Na figura ao lado, **r**, **s**, **t** e **v** são alguns exemplos de retas que passam por P(3, 1).



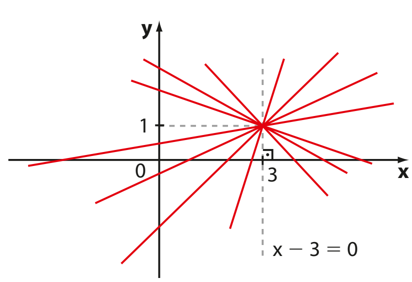
Cada uma delas define uma direção, dada pelo seu ângulo de inclinação.

- Tomemos um ponto qualquer (x, y) de **r**. Como **r** passa também por (3, 1), temos $m_r = \dfrac{y - 1}{x - 3} \Rightarrow y - 1 = m_r \cdot (x - 3)$; essa é a equação da reta que passa por (3, 1) e tem declividade $\mathbf{m_r}$.
- Tomemos agora um ponto genérico de **s**, de coordenadas (x, y). Como **s** passa também por (3, 1), temos $m_s = \dfrac{y - 1}{x - 3} \Rightarrow$ $\Rightarrow y - 1 = m_s \cdot (x - 3)$; essa é a equação da reta que passa por (3, 1) e tem declividade $\mathbf{m_s}$.

  ⋮

Enfim, se **m** varia em $\mathbb{R}$, a equação $y - 1 = m \cdot (x - 3)$ representa, para cada valor de **m**, a equação da reta que passa por (3, 1) e tem declividade igual a **m**, isto é, a medida do ângulo de inclinação α é tal que $\text{tg } \alpha = m$.

As infinitas retas que podem ser obtidas (à medida que **m** varia em $\mathbb{R}$) formam o feixe de retas concorrentes em **P**, além da reta vertical $x - 3 = 0$, para a qual não se define o coeficiente angular.



Assim, a equação do feixe de retas que passam por (3, 1) é:

$$y - 1 = m \cdot (x - 3) \quad \text{ou} \quad x - 3 = 0$$

PENSE NISTO:

Para que valor de **m** obtemos a reta horizontal do feixe que passa por (3, 1)?

EXEMPLO 12

Para obter uma equação geral da reta que possui coeficiente angular igual a -2 e passa por $(1, 3)$, podemos escrever a equação do feixe de retas por $(1, 3)$:

$$y - 3 = m \cdot (x - 1);\ m \in \mathbb{R}$$

Como $m = -2$, segue a equação:

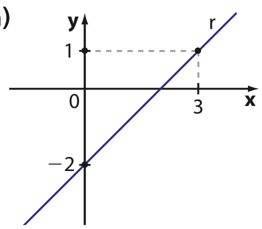
$$y - 3 = -2 \cdot (x - 1) \Rightarrow 2x + y - 5 = 0$$

EXERCÍCIOS

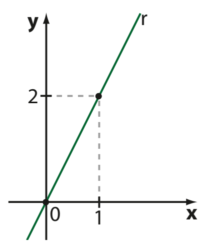
FAÇA NO CADERNO

27 Determine, em cada caso, a medida do ângulo de inclinação de **r**.

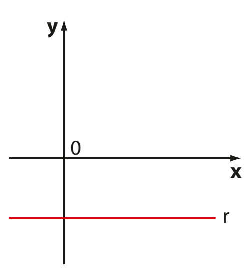
a)



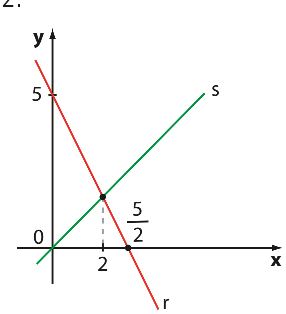
b)



c)



28 As retas **r** e **s** intersectam-se em um ponto de abscissa 2.

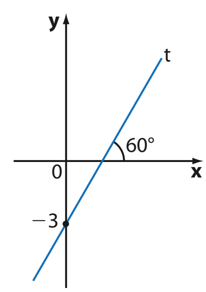


a) Determine o coeficiente angular de **s**.

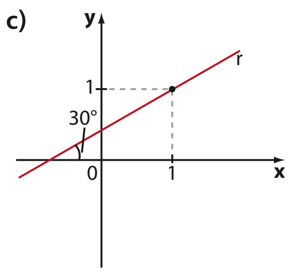
b) Escreva a equação de **s** em suas formas reduzida e geral.

29 Escreva a equação reduzida de cada reta representada abaixo.

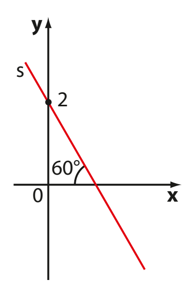
a)



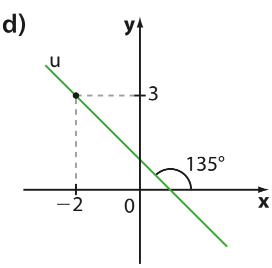
c)



b)



d)



30 Encontre a equação reduzida da reta que passa pelos pontos:

a) $(1,\ 2)$ e $(2,\ 5)$

b) $(-1,\ 2)$ e $(-2,\ 1)$

c) $(0,\ 3)$ e $(-1,\ 4)$

d) $(-3,\ -2)$ e $(2,\ -3)$

31 Em cada caso, determine, se existir, o coeficiente angular de **r**:

a) $r\colon x - 2y + 6 = 0$

b) $r\colon y = -\dfrac{x}{3} + 5$

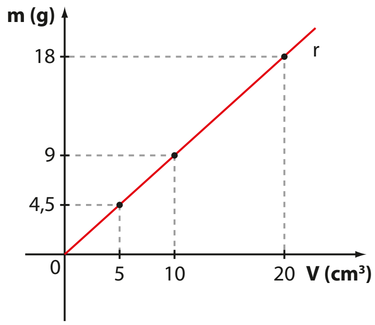
c) **r** passa por $A(-3,\ 0)$ e $B(-5,\ 4)$.

d) **r** passa por $C(1,\ 5)$ e $D(1,\ -4)$.

e) **r** passa por $E(-2,\ 5)$ e $F(3,\ 5)$.

f) **r** passa pela origem e pelo ponto médio de $\overline{GH}$, sendo $G(-1,\ 1)$ e $H(3,\ 5)$.

32 O gráfico abaixo mostra a relação entre a massa (**m**) e o volume (**V**) de certo óleo.



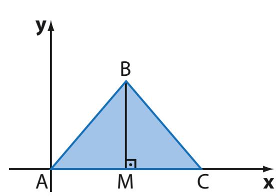
a) Qual é o coeficiente angular de **r**?

b) Qual é a lei da função que relaciona **m** e **V**?

c) Qual é a densidade do óleo?

33 O ponto **P** dista 2 do eixo das ordenadas e 5 do eixo das abscissas. Qual é a equação reduzida da reta que passa por **P** e pela origem dos eixos coordenados?

34 Na figura, o triângulo ABC é isósceles de base $\overline{AC}$. Sabendo que AB = 5 e AC = 6, obtenha:

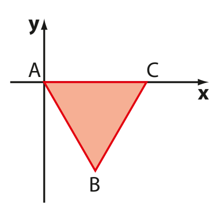


a) a equação geral da reta $\overleftrightarrow{AB}$;

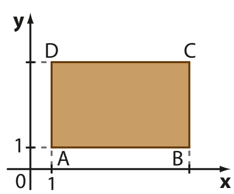
b) a equação reduzida da reta $\overleftrightarrow{BC}$;

c) a equação geral da reta $\overleftrightarrow{BM}$.

35 Na figura, o triângulo ABC é equilátero e seu lado mede 3. Determine as equações reduzidas das retas suportes $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{AC}$.



36 Na figura, ABCD é um retângulo. O lado $\overline{CD}$ mede 6 e a diagonal $\overline{BD}$ mede $4\sqrt{3}$.

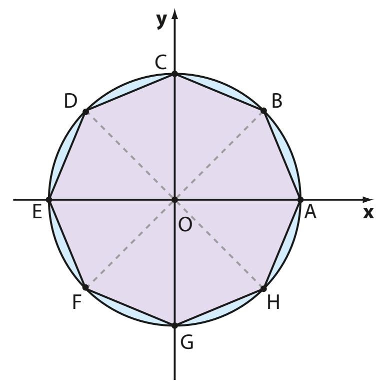


Determine:

a) o coeficiente angular da reta que passa por **A** e **C**;

b) a equação reduzida da reta que passa por **B** e **D**.

37 Na figura, o octógono regular ABCDEFGH está inscrito em um círculo cujo raio mede 2.



Determine:

a) as coordenadas dos vértices do octógono;

b) a equação geral da reta $\overleftrightarrow{BF}$;

c) o coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{DH}$;

d) o coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{AH}$.

38 Uma reta passa pelo ponto $(-2, 1)$ e tem coeficiente angular igual a $\frac{1}{3}$. Escreva sua equação geral.

39 Em cada caso, determine a equação reduzida da reta que passa por **P** e cujo ângulo de inclinação em relação ao eixo das abscissas mede α.

a) $P(3, -1)$ e $\alpha = 45°$

b) $P(-3, -2)$ e $\alpha = 135°$

c) $P(0, 3)$ e $\alpha = 60°$

d) $P\left(\frac{1}{5}, -\frac{1}{3}\right)$ e $\alpha = 0°$

40 Escreva a equação do feixe de retas concorrentes no ponto (3, 2).

41 Escreva a equação do feixe de retas que passam por $P(-1, 3)$ e, a seguir, obtenha uma equação geral da reta desse feixe que:

a) passa também por $(2, -1)$;

b) possui declividade igual a -2;

c) passa pela origem;

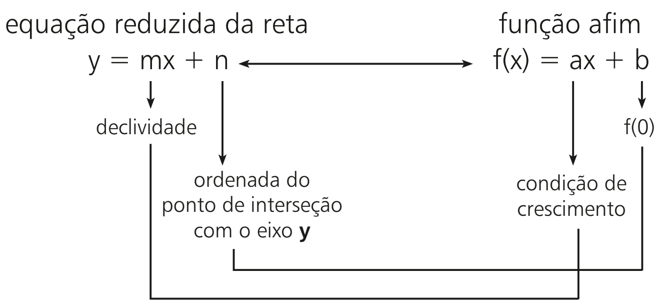
d) forma ângulo de 60° com o sentido positivo do eixo das abscissas.

Função afim e a equação reduzida da reta

Já vimos que a equação de uma reta **oblíqua** ao eixo das abscissas (isto é, não paralela a qualquer um dos eixos coordenados), expressa na forma geral ou reduzida, pode ser associada à lei de uma função afim $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax + b$, com **a** e **b** reais e $a \neq 0$.

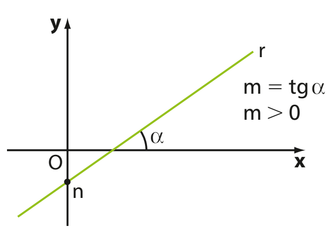
Se a reta está escrita em sua forma reduzida, é possível fazer uma associação imediata de seus coeficientes aos coeficientes da lei de uma função afim.

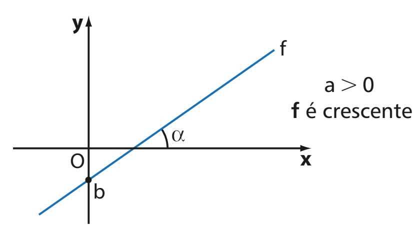
Vamos comparar a função afim à equação da reta:

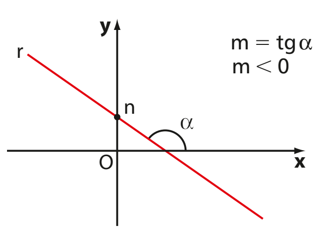


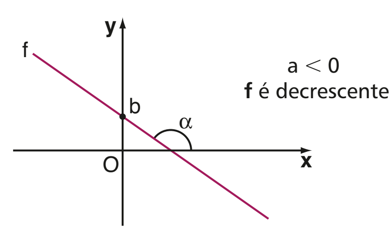
representação gráfica da equação da reta **r**

gráfico da função **f**







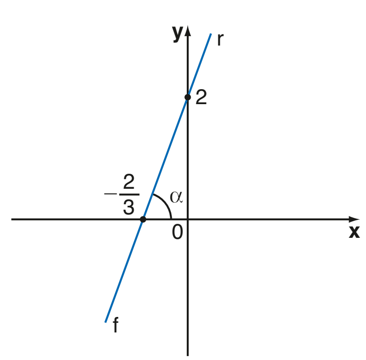


OBSERVAÇÃO

É importante lembrar mais uma vez que, se uma reta é vertical (paralela ao eixo das ordenadas), ela **não** pode ser a representação gráfica de uma função e, se a reta é horizontal (paralela ao eixo das abscissas), ela pode ser associada a uma **função constante**.

EXEMPLO 13

A reta de equação reduzida $r: y = 3x + 2$ e a função afim $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x + 2$ possuem a mesma representação gráfica:



x	**y**
0	2 (coeficiente linear)
$-\dfrac{2}{3}$ (raiz)	0

À medida que **x** varia em $\mathbb{R}$, obtêm-se, em correspondência, os demais valores de **y** (ou os demais valores de f(x)). Nesse caso, a declividade **m** da reta é positiva ($0 < \alpha < 90°$) e a função afim é crescente ($a > 0$).

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

42 Seja f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função afim tal que $f(-2) = 3$ e $f(1) = -3$.

a) Represente graficamente essa função.

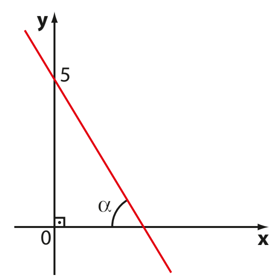
b) Determine o coeficiente angular e o coeficiente linear da reta obtida.

c) Determine a raiz de **f**.

43 Um vendedor possui salário fixo de R$ 900,00 mais comissão de 4% sobre o total de vendas (em reais) do mês. Represente graficamente o salário **y** do vendedor em função do total de vendas **x** realizadas no mês. Qual é a equação geral da reta obtida?

44 A equação reduzida de uma reta é $y = -3x + 7$. Essa reta é a representação gráfica de uma função afim **f**. Qual é o valor de $f(2)$ e de $f(-1)$?

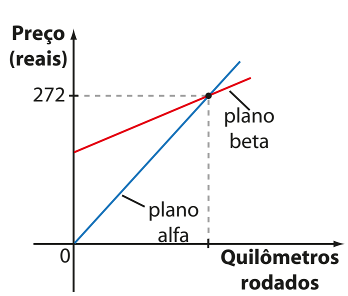
45 A figura representa o gráfico de uma função afim **f**.



Sabendo que $\operatorname{tg} \alpha = 3$, determine a lei que define **f**.

46 Uma locadora de automóveis oferece a seus clientes dois planos: o plano alfa não cobra diária e o valor do quilômetro rodado é R$ 3,20; o plano beta cobra diária de **d** reais e um adicional de R$ 1,40 por quilômetro rodado.

No gráfico seguinte, é possível comparar o preço dos dois planos:



THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Determine:

a) o valor de **d**;

b) a abscissa do ponto de interseção das retas;

c) as equações gerais das duas retas suporte das semirretas representadas;

d) a declividade de cada uma das retas.

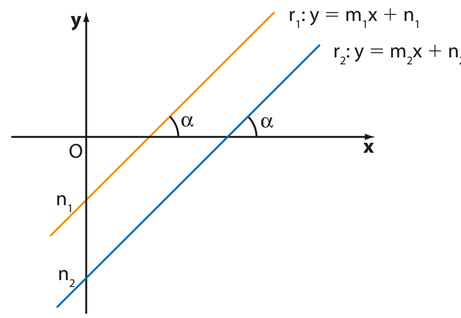
Paralelismo

Duas retas paralelas distintas formam com o eixo das abscissas ângulos congruentes; assim, se ambas não são verticais, seus coeficientes angulares são iguais.

Observe a figura ao lado, que mostra duas retas paralelas não verticais.

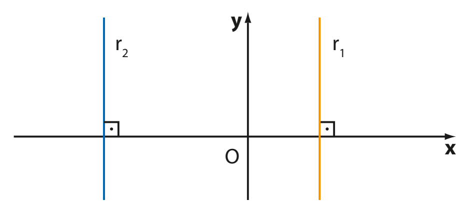
Temos:

$$r_1 \parallel r_2 \Leftrightarrow \text{tg } \alpha = m_1 = m_2$$



No caso de $\mathbf{r_1}$ e $\mathbf{r_2}$ serem verticais, evidentemente $r_1 \parallel r_2$, embora não existam $\mathbf{m_1}$ e $\mathbf{m_2}$.

Veja a figura ao lado.



EXEMPLO 14

Para determinar a posição relativa entre as retas **r** e **s**, de equações r: $y = 3x - 2$ e s: $6x - 2y + 5 = 0$, precisamos comparar suas declividades. Vamos usar a forma reduzida de cada uma delas.

$$r: y = 3x - 2 \Rightarrow m_r = 3$$

$$s: 6x - 2y + 5 = 0 \Rightarrow 2y = 6x + 5 \Rightarrow y = 3x + \frac{5}{2} \Rightarrow m_s = 3$$

Portanto, $m_r = m_s = 3 \Rightarrow$ **r** e **s** são paralelas.

Como $n_r = -2 \neq \frac{5}{2} = n_s$, as retas **r** e **s** são paralelas distintas.

EXEMPLO 15

Observe as equações gerais das retas **r** e **s**:

$$r: 3x - y + 7 = 0$$

$$s: 6x - 2y + 14 = 0$$

Podemos afirmar que **r** e **s** são (paralelas) coincidentes.

$m_r = -\frac{a}{b} = 3$; $m_s = -\frac{a}{b} = \frac{-6}{-2} = 3$. Logo, $m_r = m_s$.

$n_r = -\frac{c}{b} = \frac{-7}{-1} = 7$; $n_s = -\frac{c}{b} = \frac{-14}{-2} = 7$. Assim, $n_r = n_s$.

Veja que os coeficientes correspondentes das equações gerais de **r** e **s** são proporcionais:

$$\frac{3}{6} = \frac{-1}{-2} = \frac{7}{14}$$

Os exemplos 14 e 15 mostram que, quando queremos saber se duas retas de um plano são ou não paralelas, comparando-se seus coeficientes angulares, é possível usar tanto a equação reduzida como a geral.

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

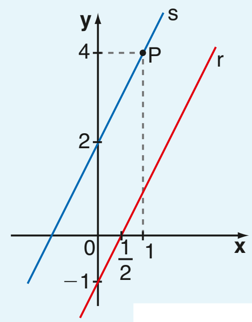
6 Seja a reta r: $y = 2x - 1$. Obtenha a equação de uma reta **s** paralela à reta **r** que passa pelo ponto P(1, 4).

Solução:

Inicialmente, observe que $P \notin r$, pois: $4 = 2 \cdot 1 - 1$ (Falsa)

Para que s // r, é preciso que $m_s = m_r$. Como $m_r = 2$, devemos ter $m_s = 2$ e, provisoriamente, temos s: $y = 2x + n$.

Como $P \in s$, temos $4 = 2 \cdot 1 + n \Rightarrow n = 2$ e, finalmente, s: $y = 2x + 2$ é a equação da reta paralela a **r** traçada por **P**.



PENSE NISTO:

A equação de uma reta qualquer paralela a **r** é $2x - y + k = 0$, com $k \in \mathbb{R}$?

7 Para que valores reais de **k** as retas r: $3x - 2y + 5 = 0$ e s: $kx - y + 1 = 0$ são concorrentes?

Solução:

A condição $m_r = m_s$ garante o paralelismo entre as retas **r** e **s**. Se $m_r \neq m_s$, as retas **r** e **s** são concorrentes.

$$r: 3x - 2y + 5 = 0 \Rightarrow 3x + 5 = 2y \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2} \Rightarrow m_r = \frac{3}{2}$$

$$s: kx - y + 1 = 0 \Rightarrow y = kx + 1 \Rightarrow m_s = k$$

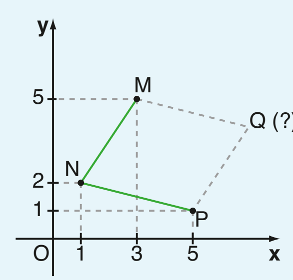
Assim, para que **r** e **s** sejam concorrentes, devemos ter $k \neq \frac{3}{2}$.

8 Os pontos **M**, **N**, **P** e **Q** são os vértices de um paralelogramo situado no primeiro quadrante. Sendo M(3, 5), N(1, 2) e P(5, 1), determine as equações das retas suportes dos lados desse paralelogramo.

Solução:

Observe inicialmente que:

- o coeficiente angular da reta que passa por **M** e **N** é $m_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5 - 2}{3 - 1} = \frac{3}{2}$
- o coeficiente angular da reta que passa por **N** e **P** é $m_2 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1 - 2}{5 - 1} = -\frac{1}{4}$



Como $m_1 \neq m_2$, então $\overleftrightarrow{MN}$ e $\overleftrightarrow{NP}$ são concorrentes (veja a figura).

- $\overleftrightarrow{NP}$: $\begin{cases} m_2 = -\frac{1}{4} \\ N(1, 2) \in \overleftrightarrow{NP} \end{cases} \Rightarrow \overleftrightarrow{NP}: y - 2 = -\frac{1}{4} \cdot (x - 1) \Rightarrow \overleftrightarrow{NP}: y = -\frac{1}{4}x + \frac{9}{4}$
- $\overleftrightarrow{MQ}$: Como $\overleftrightarrow{NP} // \overleftrightarrow{MQ}$, o coeficiente angular de $\overleftrightarrow{MQ}$ é $-\frac{1}{4}$.

Como $M(3, 5) \in \overleftrightarrow{MQ}$, obtemos $\overleftrightarrow{MQ}$: $y - 5 = -\frac{1}{4} \cdot (x - 3) \Rightarrow \overleftrightarrow{MQ}: y = -\frac{1}{4}x + \frac{23}{4}$

- $\overleftrightarrow{NM}$: $\begin{cases} m_1 = \frac{3}{2} \\ N(1, 2) \in \overleftrightarrow{NM} \end{cases} \Rightarrow \overleftrightarrow{NM}: y - 2 = \frac{3}{2} \cdot (x - 1) \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$
- $\overleftrightarrow{PQ}$: Como $\overleftrightarrow{NM} // \overleftrightarrow{PQ}$, o coeficiente angular de $\overleftrightarrow{PQ}$ é $\frac{3}{2}$.

Como $P(5, 1) \in \overleftrightarrow{PQ}$, temos $\overleftrightarrow{PQ}$: $y - 1 = \frac{3}{2} \cdot (x - 5) \Rightarrow \overleftrightarrow{PQ}: y = \frac{3}{2}x - \frac{13}{2}$

PENSE NISTO:

Há mais de uma maneira de encontrar as coordenadas de **Q**. Proponha uma!

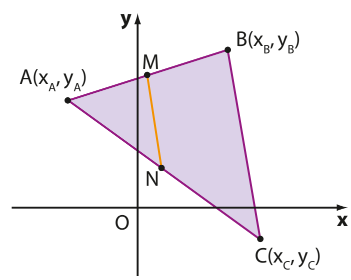
Base média de um triângulo

Vamos mostrar, por meio da Geometria Analítica, uma importante propriedade da Geometria Plana.

Teorema da base média de um triângulo

O segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado, e sua medida é igual à metade da medida do terceiro lado.

Seja o triângulo ABC representado abaixo, com $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$.



Sejam **M** e **N**, respectivamente, os pontos médios de $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$.

Vamos mostrar que $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ e $MN = \dfrac{BC}{2}$.

1ª parte: $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$

- O coeficiente angular da reta suporte do lado $\overline{BC}$ pode ser calculado por:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} \quad (1)$$

- Como **M** é ponto médio de $\overline{AB}$, temos que: $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$ e $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}$. Analogamente, como **N** é ponto médio de $\overline{AC}$, temos: $x_N = \dfrac{x_A + x_C}{2}$ e $y_N = \dfrac{y_A + y_C}{2}$.

O coeficiente angular da reta que passa por **M** e **N** é:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_M - y_N}{x_M - x_N} = \frac{\left(\dfrac{y_A + y_B}{2}\right) - \left(\dfrac{y_A + y_C}{2}\right)}{\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}\right) - \left(\dfrac{x_A + x_C}{2}\right)} = \frac{\dfrac{y_B - y_C}{2}}{\dfrac{x_B - x_C}{2}} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} \quad (2)$$

Como (1) = (2), concluímos que as retas suporte dos segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{MN}$ são paralelas.

2ª parte: $MN = \dfrac{BC}{2}$

- $BC = d_{BC} = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2}$

- $MN = d_{MN} = \sqrt{\left[\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}\right) - \left(\dfrac{x_A + x_C}{2}\right)\right]^2 + \left[\left(\dfrac{y_A + y_B}{2}\right) - \left(\dfrac{y_A + y_C}{2}\right)\right]^2} =$

$$= \sqrt{\left(\frac{x_B - x_C}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_B - y_C}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2}{4}} = \frac{\sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2}}{2} = \frac{d_{BC}}{2}$$

Assim, $MN = \dfrac{BC}{2}$.

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

47 Determine a posição relativa entre as retas de equações:

a) $y = 4x - 1$ e $8x - 2y + 1 = 0$

b) $5x - y + 6 = 0$ e $6x + y - 5 = 0$

c) $y = -\frac{3x}{2} + 2$ e $6x + 4y - 8 = 0$

d) $y = -\frac{3x}{4} - \frac{1}{4}$ e $6x + 8y + 4 = 0$

48 Qual é a equação reduzida da reta que passa pela origem e é paralela a r: $y = -3x - 2$?

49 Para que valores reais de **k** as retas de equações $3x + 2y - 1 = 0$ e $kx - 3y + 2 = 0$ são:

a) paralelas distintas?

b) concorrentes?

c) coincidentes?

50 Escreva uma equação geral da reta **s** que é paralela a **r** e passa por **P**, sendo:

a) r: $y = 3x - 4$ e $P(0, 1)$

b) r: $2x + 5y - 4 = 0$ e $P(-1, 2)$

c) r: $y = -x + 2$ e $P(-2, -2)$

d) r: $y - 3 = 0$ e $P(2, 5)$

51 Forneça o valor real de **k** para que sejam paralelas as retas de equações:

a) $y = 2x - 1$ e $6x + ky + 4 = 0$

b) $y = 2x + k$ e $kx - y + 1 = 0$

52 Determine uma equação geral da reta que passa por (2, 5) e é paralela à bissetriz dos quadrantes pares.

53 Mostre que o quadrilátero de vértices $A\left(-\frac{4}{5}, \frac{13}{5}\right)$, $B\left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$, $C(1, 2)$ e $D\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$ é um trapézio.

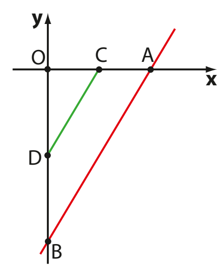
54 As retas suportes de três lados de um paralelogramo são r: $3x + 2y - 12 = 0$, s: $y = \frac{x}{2} - 1$ e t: $x - 2y + 6 = 0$. Sendo o ponto (2, 0) um dos vértices do paralelogramo, determine os outros três.

55 Considere o triângulo ABC, com A(1, 1), B(5, 3) e C(3, 8); sejam **M** e **N**, respectivamente, os pontos médios de $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$.

a) Escreva a equação da reta suporte que contém $\overline{MN}$.

b) Determine a medida do segmento $\overline{MN}$.

56 Na figura, a equação da reta que passa por **A** e **B** é $5x - 3y - 15 = 0$. Sabendo que **C** é ponto médio de $\overline{OA}$ e **D** é ponto médio de $\overline{OB}$, determine o perímetro do triângulo COD.

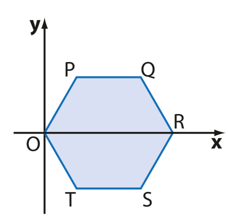


57 $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são lados opostos do retângulo ABCD. Sendo A(1, 1) e B(4, 5), determine a equação geral da reta suporte de $\overline{CD}$.

58 Represente graficamente o conjunto de pontos (x, y), com **x** e **y** reais que verificam a igualdade: $|x - y| = 2$.

59 Na figura, o hexágono OPQRST é regular, e seu lado mede 4. Obtenha a equação da reta suporte dos lados:

a) $\overline{OP}$ **b)** $\overline{RS}$ **c)** $\overline{PQ}$

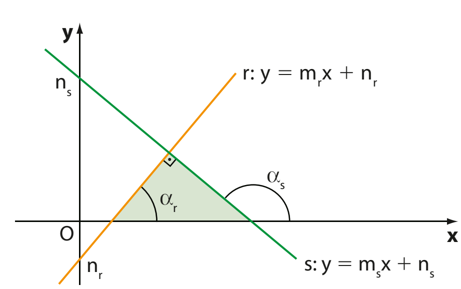


Perpendicularidade

Na figura ao lado, as retas **r**, de inclinação α_r ($m_r = \text{tg}\ \alpha_r$) e **s**, de inclinação α_s ($m_s = \text{tg}\ \alpha_s$), são perpendiculares.

Vamos procurar uma relação entre seus coeficientes angulares.

Sejam as equações r: $y = m_r x + n_r$ e s: $y = m_s x + n_s$, e o ângulo α_s externo ao triângulo sombreado.



$$\alpha_s = \alpha_r + 90°$$

$$\text{tg}\ \alpha_s = \text{tg}\ (\alpha_r + 90°)$$

$$\text{tg}\ \alpha_s = \frac{\text{sen}(\alpha_r + 90°)}{\cos(\alpha_r + 90°)} = \frac{\cos \alpha_r}{-\text{sen}\ \alpha_r} = -\frac{1}{\text{tg}\ \alpha_r}$$

Assim:

$$\text{tg } \alpha_s = -\frac{1}{\text{tg } \alpha_r}, \text{ isto é, } m_s = -\frac{1}{m_r} \Leftrightarrow m_r \cdot m_s = -1$$

Observe que essa relação só pode ser aplicada se **r** e **s** forem oblíquas ao eixo **x**, pois não é definida a declividade no caso de uma delas ser vertical. Nesse caso, uma perpendicular a ela é horizontal e vice-versa.

Assim, verificamos que:

Se **r** e **s** são perpendiculares entre si, então $m_r \cdot m_s = -1$.

Um procedimento análogo mostra a recíproca dessa propriedade, isto é, se **r** e **s** são duas retas tais que $m_r \cdot m_s = -1$, então **r** e **s** são perpendiculares entre si.

EXEMPLO 16

As retas r: $2x - 4y + 5 = 0$ e s: $y = -2x + 3$ são perpendiculares entre si, pois:

$$\left.\begin{array}{l} m_r = -\frac{a}{b} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2} \\ m_s = -2 \end{array}\right\} m_r \cdot m_s = \frac{1}{2} \cdot (-2) = -1$$

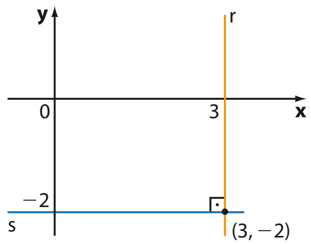
EXEMPLO 17

As retas r: $y = 3x$ e s: $y = \frac{1}{3}x + 5$ não são perpendiculares entre si, pois $m_r = 3$, $m_s = \frac{1}{3}$ e $m_r \cdot m_s = 1 \neq -1$.

Nesse caso, **r** e **s** concorrem, mas não perpendicularmente.

EXEMPLO 18

As retas r: $x - 3 = 0$ e s: $y + 2 = 0$ são perpendiculares entre si, pois **r** é vertical e **s** é horizontal. No entanto, a relação $m_r \cdot m_s = -1$ não pode ser aplicada, pois não se define $\mathbf{m_r}$.



PENSE NISTO:

Por que a bissetriz dos quadrantes pares e a bissetriz dos quadrantes ímpares são retas perpendiculares entre si?

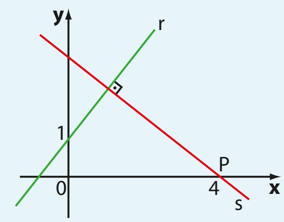
EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

9 Determine uma equação geral da reta **s**, perpendicular a r: $y = 3x + 1$, traçada pelo ponto P(4, 0).

Solução:

Como $r \perp s$, devemos ter $m_r \cdot m_s = -1$.

Como $m_r = 3$, então $m_s = -\dfrac{1}{m_r} = -\dfrac{1}{3}$. Assim, temos: s: $y = -\dfrac{1}{3}x + n$



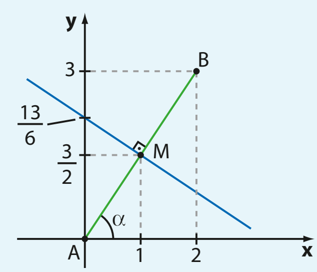
Como **s** passa por P(4, 0), temos: $0 = -\dfrac{1}{3} \cdot 4 + n \Rightarrow n = \dfrac{4}{3}$

Assim, a equação de **s** é: $y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{4}{3} \Rightarrow x + 3y - 4 = 0$

10 Determine a equação da mediatriz do segmento cujas extremidades são A(0, 0) e B(2, 3).

Solução:

Lembremos que a mediatriz de um segmento é a reta perpendicular ao segmento, traçada pelo seu ponto médio.



O ponto médio **M** de $\overline{AB}$ é $M\left(\dfrac{0+2}{2}, \dfrac{0+3}{2}\right) \Rightarrow M\left(1, \dfrac{3}{2}\right)$.

O coeficiente angular da reta que passa por **A** e **B** é:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-0}{2-0} = \frac{3}{2}\left(\text{observe que tg } \alpha = \frac{3}{2}\right)$$

A mediatriz é, portanto, uma reta com declividade $-\dfrac{2}{3}\left(\text{pois } \dfrac{3}{2} \cdot \left(-\dfrac{2}{3}\right) = -1\right)$, que passa pelo ponto $M\left(1, \dfrac{3}{2}\right)$.

Sua equação reduzida é $y = -\dfrac{2}{3}x + n$. Substituindo as coordenadas de **M**, temos:

$$\frac{3}{2} = -\frac{2}{3} \cdot 1 + n \Rightarrow n = \frac{3}{2} + \frac{2}{3} = \frac{13}{6}$$

Logo, a equação pedida é $y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{13}{6}$.

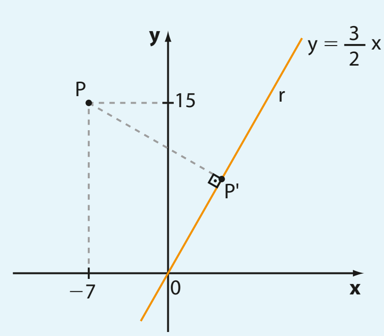
11 Determine o ponto de interseção entre a reta r: $y = \dfrac{3}{2}x$ e a reta perpendicular a **r** conduzida pelo ponto P(−7, 15).

Solução:

O ponto de interseção solicitado é a projeção ortogonal do ponto sobre a reta, como mostra a figura seguinte.

P' = proj_r P: interseção de **r** com $\overline{PP'}$.

Usando os dados do problema, temos:



- O coeficiente angular **m** da reta $\overline{PP'}$ é tal que $m \cdot m_r = -1 \Rightarrow$ $\Rightarrow m \cdot \dfrac{3}{2} = -1 \Rightarrow m = -\dfrac{2}{3}$.
- A equação de $\overline{PP'}$ é $y - 15 = -\dfrac{2}{3} \cdot (x + 7) \Rightarrow 2x + 3y - 31 = 0$.
- Determinemos **P'**, o ponto comum entre **r** e $\overline{PP'}$:

$$\begin{cases} y = \dfrac{3}{2}x \\ 2x + 3y - 31 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x + \frac{9x}{2} - 31 = 0 \Rightarrow x = \frac{62}{13} \text{ e } y = \frac{93}{13}$$

Assim, as coordenadas de **P'** são $\left(\dfrac{62}{13}, \dfrac{93}{13}\right)$.

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

60 Indique quais das retas abaixo são perpendiculares entre si.

r: $y = 2x + 3$ t: $x + 2y - 6 = 0$

s: $x - 4y + 4 = 0$ u: $y = -2x - 1$

61 Obtenha a equação reduzida da reta que passa por $P(2, -3)$ e é perpendicular a:

a) $y = 3x - 1$ **b)** $2x - 5y - 11 = 0$

62 Determine **m** $\in \mathbb{R}$ para que as retas r: $3x + 5y - 7 = 0$ e s: $mx - 6y + 1 = 0$ sejam perpendiculares entre si.

63 Determine, em cada caso, a posição relativa entre as retas **r** e **s**:

a) r: $x - 3y = 0$ s: $y = 3x + 2$

b) r: $2x - y + 1 = 0$ s: $y = -\frac{1}{2}x - 3$

c) r: $x + 3 = 0$ s: $x - 1 = 0$

d) r: $x + 3 = 0$ s: $y + 3 = 0$

e) r: $2x - 3y + 4 = 0$ s: $y = \frac{2x}{3}$

64 Dado o segmento $\overline{AB}$, com $A(4, 5)$ e $B(-2, 1)$,

a) determine a equação da mediatriz de $\overline{AB}$;

b) escolha um ponto qualquer dessa mediatriz e mostre que esse ponto equidista de **A** e **B**.

65 Dado o triângulo ABC, com $A(-3, 2)$, $B(1, 0)$ e $C(0, 3)$, obtenha as coordenadas de seu:

a) baricentro (ponto de encontro das medianas).

b) circuncentro (ponto de encontro das mediatrizes).

66 Dados $P(2, -4)$ e r: $2x - 3y + 6 = 0$:

a) obtenha as coordenadas do ponto **Q**, interseção de **r** com a perpendicular a **r** por **P**;

b) determine o simétrico de **P** em relação à reta **r**.

67 ABCD é um quadrado e $A(1, 2)$ e $B(3, 5)$ são vértices consecutivos. Determine as equações das retas suporte dos lados $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$.

68 As retas **r** e **s**, de equações r: $2x - y + 3 = 0$ e s: $y = mx + n$, intersectam-se, perpendicularmente, no ponto $(-2, -1)$. Quais são os valores de **m** e **n**?

69 Determine os valores reais de **k** para os quais as retas r: $y = -\frac{k}{3}x + 1$ e s: $y = \left(\frac{k+1}{2}\right)x - 4$ não são perpendiculares entre si.

70 Sejam os pontos $A(2, 2)$, $B(4, -1)$, $C(-2, -5)$ e $D(-4, -2)$.

a) Mostre que o triângulo ABC é retângulo em $\hat{B}$. Quanto mede sua hipotenusa?

b) Mostre que o quadrilátero ABCD é um retângulo. Quanto mede sua diagonal?

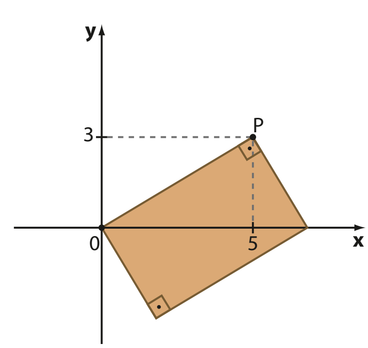
71 Seja ABC o triângulo de vértices $A(0, -3)$, $B(-4, 0)$ e $C(2, 1)$. Determine a equação da altura relativa ao lado $\overline{BC}$.

72 Obtenha a equação de uma reta perpendicular a r: $4x + 3y = 0$ e que defina com os eixos coordenados um triângulo de área 6.

73 Um casal de namorados, Júlia e Jonas, costuma se encontrar depois do trabalho em uma sorveteria localizada na esquina de uma praça retangular.

ROBERT GLENN/GETTY IMAGES

Representando a praça em um sistema de coordenadas retangulares, observamos que Júlia trabalha em uma loja, representada pela origem do sistema, e Jonas trabalha em um *cyber*, representado pelo vértice do retângulo oposto à origem; a sorveteria encontra-se no ponto $P(5, 3)$. Ambos caminham, em linha reta, de seus locais de trabalho à sorveteria pontualmente às 18 h. Sabendo que a unidade de medida de comprimento utilizada é o metro e a escala é de 1 : 20, identifique como verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**) as afirmações seguintes. Considere $\sqrt{34} \simeq 5{,}8$.



a) A distância entre a loja onde Júlia trabalha e o ponto de encontro é maior que 100 metros.

b) O *cyber* onde Jonas trabalha está representado por um ponto de abscissa $\frac{34}{5}$.

c) Se Júlia caminha à velocidade constante de 2 km/h, então ela chega à sorveteria antes das 18 h 03 min.

d) Para dar uma volta completa ao redor da praça, um atleta, correndo à velocidade constante de 5 km/h, leva menos de 4 minutos.

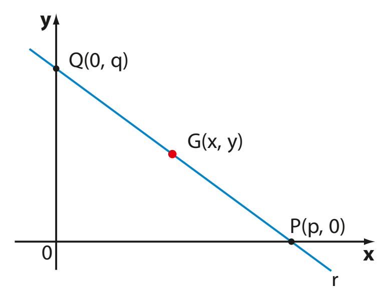
74 Obtenha os vértices de um losango ABCD tal que:

- **A** pertence ao eixo **y**;
- **B** pertence ao eixo **x**;
- a diagonal $\overline{AC}$ está contida na reta r: $7x + y - 3 = 0$;
- as diagonais se intersectam em um ponto de ordenada $-\frac{1}{2}$.

Outros modos de escrever a equação de uma reta

Forma segmentária

Seja **r** uma reta que intersecta os eixos coordenados nos pontos P(p, 0) e Q(0, q), com **P** e **Q** distintos.



Seja G(x, y) um ponto genérico de **r**. A equação de **r** pode ser obtida a partir da condição de alinhamento de **P**, **Q** e **G**:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ p & 0 & 1 \\ 0 & q & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow pq - qx - py = 0 \Rightarrow qx + py = pq \quad (*)$$

Como **p** e **q** não são nulos (senão **P** e **Q** coincidiriam), podemos dividir os dois membros de (*) por $p \cdot q$:

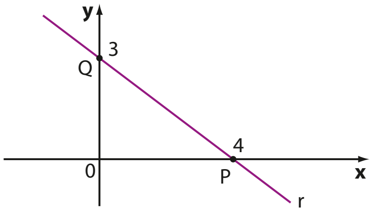
$$\frac{qx}{pq} + \frac{py}{pq} = \frac{pq}{pq} \Rightarrow \boxed{\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1}$$

A equação obtida é chamada **equação segmentária** da reta **r**. Notemos que:

- o número real que divide **x** é igual à abscissa do ponto em que **r** intersecta o eixo **x**;
- o número real que divide **y** é igual à ordenada do ponto em que **r** intersecta o eixo **y**;
- o segundo membro da equação é igual a 1.

EXEMPLO **19**

Observe que **r** intersecta o eixo **x** em P(4, 0) e o eixo **y** em (0, 3). A equação segmentária de **r** é, portanto:



$$\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$$

A partir da forma segmentária, podemos obter as equações geral e reduzida:

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1 \Rightarrow 3x + 4y = 12 \Rightarrow \begin{cases} 3x + 4y - 12 = 0 & \text{(geral)} \\ y = -\frac{3}{4}x + 3 & \text{(reduzida)} \end{cases}$$

Forma paramétrica

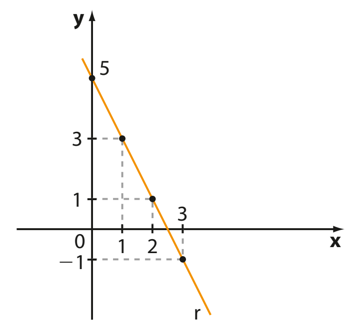
As equações geral, reduzida e segmentária relacionam diretamente entre si as coordenadas (x, y) de um ponto genérico da reta. Há outra alternativa para estabelecer a equação de uma reta **r**, que é expressando cada uma das coordenadas (**x** e **y**) dos pontos de **r** em função de uma terceira variável, denominada **parâmetro**.

EXEMPLO **20**

Os pontos de uma reta **r** satisfazem as equações $x = 1 + t$ e $y = 3 - 2t$, com $t \in \mathbb{R}$. Vamos representar graficamente a reta **r** e obter sua equação geral.

Façamos o parâmetro **t** variar em $\mathbb{R}$, a fim de obter alguns pontos de **r**:

t	x	y	Ponto
-1	0	5	(0, 5)
0	1	3	(1, 3)
1	2	1	(2, 1)
2	3	-1	(3, -1)
⋮	⋮	⋮	⋮



A equação geral de **r** pode ser obtida tomando-se dois pontos quaisquer acima e estabelecendo a condição de alinhamento. Outra alternativa é resolver o sistema obtido quando usamos as coordenadas de dois pontos de **r** na lei $y = ax + b$.

Também é possível isolar **t** em uma das equações e substituí-lo na outra:

$$x = 1 + t \Rightarrow t = x - 1$$

Substituindo em $y = 3 - 2t$, temos:

$$y = 3 - 2 \cdot (x - 1) \Rightarrow y = 3 - 2x + 2 \Rightarrow 2x + y - 5 = 0$$

As equações $x = 1 + t$ e $y = 3 - 2t$, em que $t \in \mathbb{R}$, são exemplos de **equações paramétricas** da reta **r**.

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

12 Seja **r** a reta cuja equação geral é $6x + y - 3 = 0$. Escreva a equação reduzida, a segmentária e um par de equações paramétricas de **r**.

Solução:

- Equação reduzida: basta isolar **y** em $6x + y - 3 = 0 \Rightarrow y = -6x + 3$.
- Equação segmentária: $6x + y - 3 = 0 \Rightarrow 6x + y = 3$; dividimos os dois membros dessa última equação por 3:

$$\frac{6x + y}{3} = \frac{3}{3} \Rightarrow 2x + \frac{y}{3} = 1 \Rightarrow \frac{x}{\frac{1}{2}} + \frac{y}{3} = 1$$

Note que **r** intersecta o eixo **x** em $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ e o eixo **y** em (0, 3).

- Equação paramétrica:

Fazendo, por exemplo, $t = 3x$, temos: $x = \frac{t}{3}$ e, assim, podemos determinar **y** em função de **t**:

$$6x + y - 3 = 0 \Rightarrow 6 \cdot \frac{t}{3} + y - 3 = 0 \Rightarrow 2t + y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3 - 2t$$

Um par de equações paramétricas de **r** é $\begin{cases} x = \frac{t}{3} \\ y = 3 - 2t \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$.

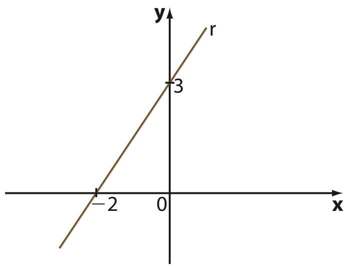
PENSE NISTO:

Como podemos obter outros pares de equações paramétricas da reta **r**?

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

75 Seja **r** a reta representada no gráfico. Determine:



a) a equação segmentária de **r**;

b) uma equação geral de **r**.

76 Escreva a forma geral, a reduzida e a segmentária da reta dada por $x = 2t - 1$ e $y = 2 - 3t$; $t \in \mathbb{R}$.

77 Qual é a forma segmentária da equação da reta **r** dada por $y = 2x - 8$?

78 A reta s: $\frac{x}{5} + y = 1$ determina com os eixos coordenados um triângulo retângulo. Determine:

a) o perímetro do triângulo;

b) a área do triângulo.

79 Forneça um par de equações paramétricas da reta r: $2x - 3y + 6 = 0$.

80 Determine as coordenadas do ponto médio da hipotenusa do triângulo XOY, sendo **O** a origem e **X** e **Y** os pontos em que a reta $x - 2y - 4 = 0$ intersecta os eixos coordenados.

81 Em cada caso, obtenha a posição relativa entre as retas **r** e **s**:

a) r: $\begin{cases} x = t + 2 \\ y = t - 2 \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$ s: $2x - y - 4 = 0$

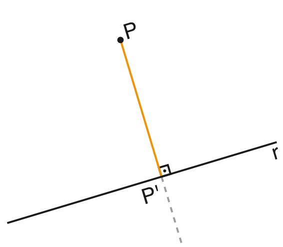
b) r: $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ s: $y = -\frac{4x}{3} + 1$

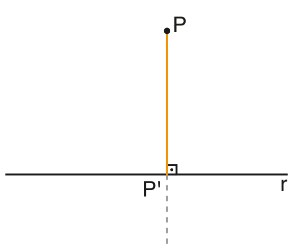
82 Determine a equação de uma reta **r** que passa por $(-2, -4)$ e é perpendicular à reta s: $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 3 - t \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$.

83 Ache as coordenadas do ponto de interseção das retas r: $\begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = -2t + 5 \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$ e s: $\begin{cases} x = 2u - 2 \\ y = 7 + u \end{cases}$; $u \in \mathbb{R}$.

Distância entre ponto e reta

Já sabemos que a distância entre um ponto e uma reta é a distância do ponto ao "pé da perpendicular" à reta dada, traçada pelo ponto.





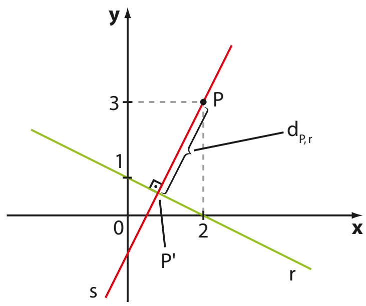
Em ambos os casos, a distância entre **P** e **r** (indica-se por $\mathbf{d}_{P,\,r}$) é a distância entre **P** e **P'**, sendo **P'** o ponto de interseção entre a reta perpendicular a **r**, conduzida por **P**, e a reta **r**.

P' também é chamado **projeção ortogonal** de **P** sobre **r**.

- Se $P \in r$, naturalmente, $d_{P,\,r} = 0$.
- Se $P \notin r$, temos $d_{P,\,r} > 0$.

EXEMPLO 21

Vamos agora obter, analiticamente, a distância entre P(2, 3) e a reta r: $x + 2y - 2 = 0$.



1º) Seja **s** a reta perpendicular a **r**, traçada por **P**. Vamos obter sua equação.

Temos: $m_r = -\frac{a}{b} = -\frac{1}{2}$; como $m_r \cdot m_s = -1$, temos $m_s = -\frac{1}{m_r} = 2$.

Como **s** passa por P(2, 3), podemos escrever:

$y - 3 = 2 \cdot (x - 2) \Rightarrow y = 2x - 1$ é a equação de **s**.

2º) Determinemos **P'**, interseção de **r** com **s**. Para isso, basta resolver o sistema formado pelas equações de **r** e **s**:

$$\begin{cases} r: x + 2y - 2 = 0 \\ s: y = 2x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 2 \\ -2x + y = -1 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{3}{5} \text{ e } x = \frac{4}{5}$$

Daí, $P'\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

3º) A distância de **P** a **r** é a distância entre os pontos P(2, 3) e $P'\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$:

$$d_{P,\,r} = d_{P,\,P'} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{\left(2 - \frac{4}{5}\right)^2 + \left(3 - \frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{6}{5}\right)^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{180}{25}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

Podemos generalizar o procedimento descrito no exemplo anterior para calcular a distância **d** entre um ponto $P(x_0, y_0)$ e uma reta r: $ax + by + c = 0$.

Obtemos a expressão:

$$d = \frac{|a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

A demonstração dessa propriedade encontra-se na seção *Um pouco mais sobre*, página 65.

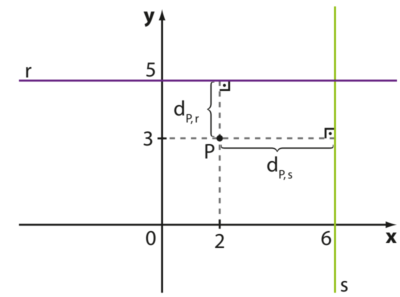
EXEMPLO 22

Vamos aplicar a fórmula para confirmar o resultado obtido no exemplo 21.

$$\left.\begin{aligned} P(2, 3)\ (x_0 = 2, y_0 = 3) \\ r: x + 2y - 2 = 0 \\ (a = 1, b = 2, c = -2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow d = \frac{|1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 - 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|6|}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

OBSERVAÇÃO

A distância de um ponto **P** a uma reta **r**, vertical ou horizontal, pode ser encontrada de maneira mais rápida e sem a necessidade de fórmula.
Acompanhe este exemplo, em que P(2, 3), a reta **r** é horizontal, r: $y - 5 = 0$ e a reta **s** é vertical, s: $x - 6 = 0$.
A distância de **P** a **r** é: $d_{P,\,r} = 5 - 3 = 2$.
A distância de **P** a **s** é: $d_{P,\,s} = 6 - 2 = 4$.



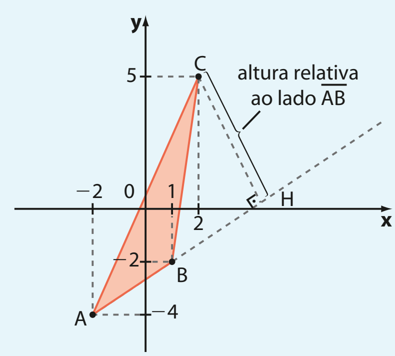
EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

13 Os vértices de um triângulo ABC são A(−2, −4), B(1, −2) e C(2, 5). Determine a medida da altura relativa ao lado $\overline{AB}$.

Solução:

Para determinar o comprimento da altura $\overline{CH}$, primeiramente encontramos a equação de $\overleftrightarrow{AB}$:

$$\overleftrightarrow{AB}: \begin{vmatrix} -2 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x - 3y - 8 = 0$$



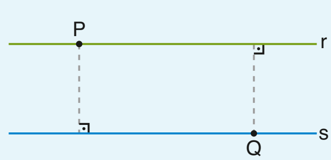
Agora, basta encontrar a distância entre C(2, 5) e $\overleftrightarrow{AB}$. Podemos seguir o procedimento usado no exemplo 21 ou aplicar a fórmula:

$$d_{C,\,\overleftrightarrow{AB}} = \frac{|2 \cdot 2 - 3 \cdot 5 - 8|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{|-19|}{\sqrt{13}} = \frac{19}{\sqrt{13}} \Rightarrow h_C = \frac{19\sqrt{13}}{13}$$

14 Determine a distância entre as retas r: $x + 2y + 5 = 0$ e s: $x + 2y - 3 = 0$.

Solução:

É importante observar, de início, que **r** e **s** são paralelas distintas, pois possuem o mesmo coeficiente angular $\left(m_r = m_s = -\frac{1}{2}\right)$. A distância entre duas retas paralelas é a distância entre um ponto qualquer de uma delas à outra reta.



$$d_{r,\,s} = d_{P,\,s} = d_{Q,\,r} = \ldots$$

Desse modo, é preciso escolher um ponto arbitrário de uma das retas e calcular a distância desse ponto à outra reta.

Tomamos um ponto **P** em **r**:

Escolhemos, arbitrariamente, $x = -1 \Rightarrow -1 + 2y + 5 = 0 \Rightarrow 2y + 4 = 0 \Rightarrow y = -2$; Assim, temos: $P(-1, -2) \in r$.

Calculamos a distância de **P** a **s**:

$$d = \frac{|1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-2) - 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|-8|}{\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5}$$

PENSE NISTO:

Tome agora um ponto em **s** e calcule sua distância à reta **r**.

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

84 Determine a distância do ponto **P** à reta **r**, sendo:

a) $P(-1, -3)$ e r: $3x - y + 5 = 0$

b) $P(0, 2)$ e r: $4x - 3y - 11 = 0$

c) $P(-2, 5)$ e r: $5x + 2y + 29 = 0$

d) $P(1, -1)$ e r: $3x - y - 4 = 0$

85 Dados os pontos $A(-1, -1)$, $B(6, -3)$ e $C(4, -10)$, calcule a medida da altura relativa ao lado $\overline{AC}$ do triângulo ABC.

86 Determine a distância entre as retas de equações $y = 3x - 1$ e $6x - 2y + 15 = 0$.

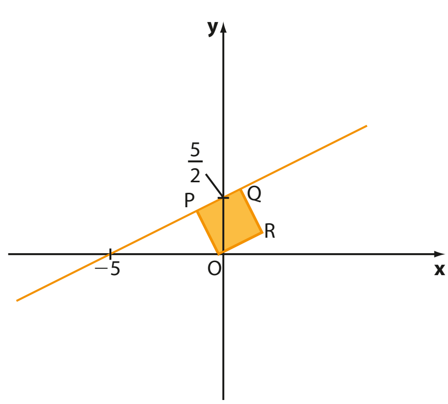
87 Considere os pontos $P(10, -1)$, $Q(0, 3)$ e $R(5, 1)$.

a) Qual desses pontos é o mais distante da reta r: $2x + 5y - 1 = 0$?

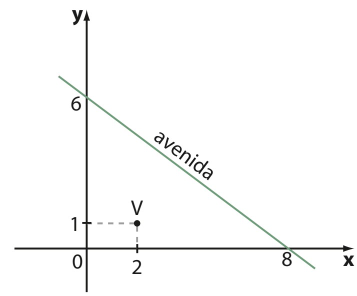
b) O que se pode afirmar a respeito da posição relativa entre **r** e a reta que passa por **P** e **Q**?

88 Calcule a medida da altura de um trapézio cujos vértices são $A(-1, -3)$, $B(6, -2)$, $C(5, 2)$ e $D(-9, 0)$.

89 Determine o perímetro e a área do quadrado OPQR.



90 Para ir ao trabalho, José atravessa, a pé, uma longa avenida retilínea que corta parte da pequena cidade onde vive. De vários pontos da avenida, ele consegue avistar a casa de Vânia, sua namorada. O sistema de coordenadas retangulares seguinte mostra parte do mapa da cidade. A casa de Vânia está representada pelo ponto **V** e a origem do sistema corresponde ao marco zero da cidade.



Sabendo que a unidade de medida de comprimento utilizada é o metro e que a escala é de 1 : 100, determine:

a) a distância real do marco zero da cidade à casa de Vânia;

b) a distância real do marco zero da cidade à avenida;

c) as coordenadas do ponto da avenida na qual José fica mais próximo da casa de Vânia;

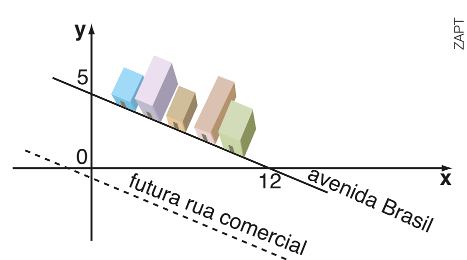
d) a distância real entre José e a casa de Vânia, considerando o item anterior.

91 Obtenha uma equação da reta paralela a r: $x - y + 7 = 0$ e distante $\sqrt{2}$ do ponto $(2, 2)$.

92 Para a construção de um anel viário, a prefeitura de uma cidade planejada pretende desapropriar alguns estabelecimentos comerciais que estão localizados ao longo da avenida Brasil.

CORBIS/FOTO ARENA

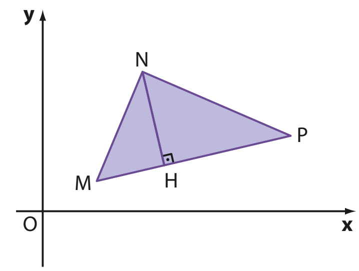
Os comerciantes instalados nessa avenida serão transferidos para uma futura rua comercial para pedestres, paralela à avenida Brasil e distante 6 km dela, como mostra o mapa seguinte, em que a unidade de medida de comprimento considerada é o quilômetro:



ZAPT

Determine, no sistema acima, a equação da reta que representa a futura rua comercial a ser construída na cidade.

Área do triângulo



Vamos calcular a área de um triângulo MNP a partir das coordenadas dos três vértices: $M(x_M, y_M)$, $N(x_N, y_N)$ e $P(x_P, y_P)$.

Com base na Geometria Plana, sabemos que a área da superfície limitada por um triângulo ou, simplesmente, área do triângulo, pode ser calculada pela expressão:

$$\frac{\text{medida da base} \cdot \text{medida da altura}}{2}$$

- Tomando o lado $\overline{MP}$ como base, sua medida é a distância entre os pontos **M** e **P**, a saber:

$$d_{MP} = \sqrt{(x_M - x_P)^2 + (y_M - y_P)^2} \quad 1$$

- A medida da altura $\overline{NH}$ é a distância entre o ponto **N** e a reta suporte do lado $\overline{MP}$. Para calcular essa distância, vamos inicialmente obter a equação de $\overleftrightarrow{MP}$:

$$\begin{vmatrix} x_M & y_M & 1 \\ x_P & y_P & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ (}\mathbf{x}\text{ e }\mathbf{y}\text{ são as coordenadas de um ponto qualquer de } \overleftrightarrow{MP}\text{.)}$$

$$x_My_P + xy_M + yx_P - xy_P - yx_M - x_Py_M = 0$$

$$x(y_M - y_P) + y(x_P - x_M) + (x_My_P - x_Py_M) = 0 \quad 2$$

- Vamos usar a expressão da distância entre ponto e reta para calcular a distância entre **N** e a reta suporte de $\overline{MP}$.

$$\begin{cases} N(x_N, y_N) \\ \overleftrightarrow{MP}: x(y_M - y_P) + y(x_P - x_M) + (x_My_P - x_Py_M) = 0 \end{cases}$$

$$d_{N,\overleftrightarrow{MP}} = \frac{|x_N(y_M - y_P) + y_N(x_P - x_M) + (x_My_P - x_Py_M)|}{\sqrt{(y_M - y_P)^2 + (x_P - x_M)^2}} \quad 3$$

- Por fim, a área **A** do triângulo é:

$$A = \frac{1}{2} \cdot d_{MP} \cdot d_{N,\overleftrightarrow{MP}}$$

Usando 1 e 3, obtemos:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \cancel{\sqrt{(x_M - x_P)^2 + (y_M - y_P)^2}} \cdot \frac{|x_N(y_M - y_P) + y_N(x_P - x_M) + (x_My_P - x_Py_M)|}{\cancel{\sqrt{(x_M - x_P)^2 + (y_M - y_P)^2}}}$$

Observe que o módulo da expressão obtida coincide com 2 quando **x** e **y** são substituídos, respectivamente, por $\mathbf{x_N}$ e $\mathbf{y_N}$.

Logo, podemos escrever:

$$A = \frac{1}{2} \cdot |D|\text{, em que } D = \begin{vmatrix} x_M & y_M & 1 \\ x_P & y_P & 1 \\ x_N & y_N & 1 \end{vmatrix}$$

Assim, mostramos que:

A área da superfície limitada pelo triângulo MNP, em que $M(x_M, y_M)$, $N(x_N, y_N)$ e $P(x_P, y_P)$, é dada por:

$$A = \frac{1}{2} \cdot |D|, \text{ em que } D = \begin{vmatrix} x_M & y_M & 1 \\ x_N & y_N & 1 \\ x_P & y_P & 1 \end{vmatrix}$$

PENSE NISTO:

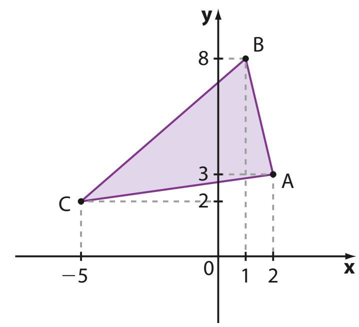
Se **M**, **N** e **P** são colineares, qual é o valor do determinante **D**?

EXEMPLO 23

Para calcular a área do triângulo de vértices A(2, 3), B(1, 8) e C(−5, 2), iniciamos pelo cálculo do determinante **D**:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 8 & 1 \\ -5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 16 - 15 + 2 + 40 - 3 - 4 = 36$$

Assim, $A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |36| = \frac{1}{2} \cdot 36 = 18 \Rightarrow A_{\triangle ABC} =$ $= 18$ unidades de área.



EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

93 Determine a área do triângulo de vértices:

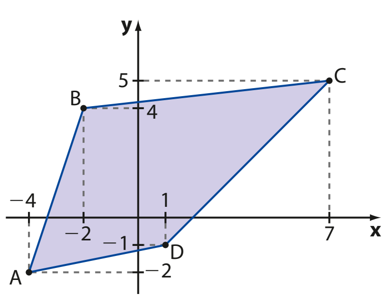
a) A(2, 3), B(5, 4) e C(6, −3)

b) A(4, 1), B(−3, 1) e C(−1, −2)

c) $A\left(-2, \frac{1}{2}\right)$, $B\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ e C(2, −1)

d) A(0, 0), B(3, 4) e C(−2, 11)

94 Obtenha a área do quadrilátero ABCD.



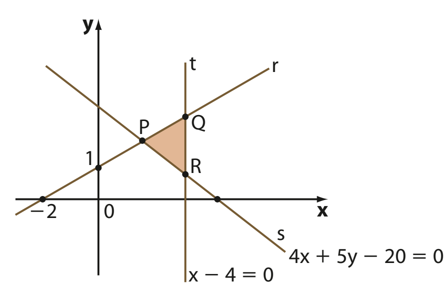
95 Os pontos A(1, 2), B(4, 3), C(3, 1) e **D** são vértices consecutivos de um paralelogramo.

a) Obtenha a equação da reta $\overleftrightarrow{AD}$.

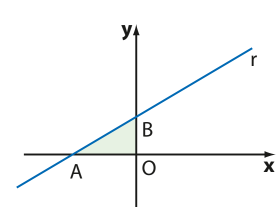
b) Calcule a área do paralelogramo.

96 A reta r: 2x + y − 6 = 0 determina com os eixos coordenados um triângulo retângulo. Qual é a área desse triângulo?

97 Determine a área do triângulo PQR seguinte.



98 Na figura, temos o triângulo AOB em que AO = = 2 · OB. Obtenha a equação da reta **r**, sabendo que a área do triângulo é igual a 16.



99 Determine a área do triângulo ABC, sabendo que:

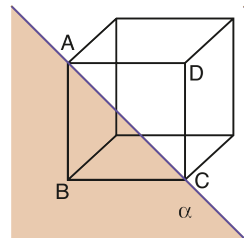
- A(1, 0) e B(−1, 0);
- $\overleftrightarrow{BC}$ tem por equação: y = x + 1;
- o coeficiente angular de $\overleftrightarrow{AC}$ é 2.

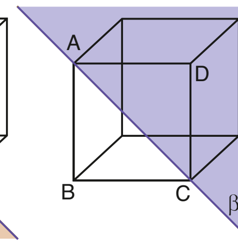
Inequações do 1º grau – resolução gráfica

Sabemos, com base na Geometria Espacial de posição, que uma reta **r** contida em um plano divide-o em dois semiplanos, ambos com origem na própria reta.

Observe o cubo ao lado.

A reta $\overleftrightarrow{AC}$ divide o plano que contém a face ABCD em dois semiplanos α e β, sendo $\overleftrightarrow{AC}$ a origem de ambos.





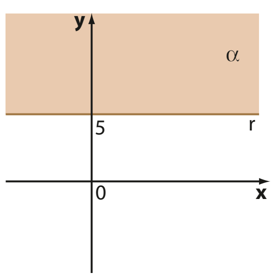
Consideremos uma reta **r** do plano cartesiano, que o divide em dois semiplanos. Cada um desses semiplanos pode ser representado por uma inequação do 1º grau (com uma ou duas incógnitas).

1º caso: A reta **r** é paralela a um dos eixos coordenados.

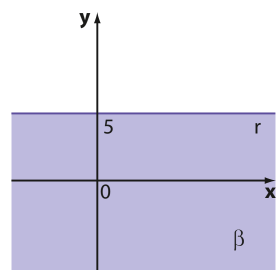
EXEMPLO 24

Seja r: $y - 5 = 0$.

r divide o plano cartesiano em dois semiplanos α e β:



Todos os pontos de α possuem ordenadas maiores ou iguais a 5. A inequação $y \geqslant 5 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow y - 5 \geqslant 0$ pode representar esses pontos.

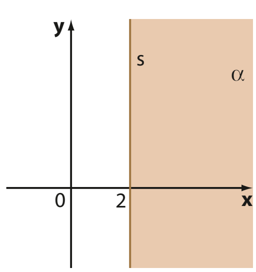


Todos os pontos de β possuem ordenadas menores ou iguais a 5. A inequação $y \leqslant 5 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow y - 5 \leqslant 0$ pode representar esses pontos.

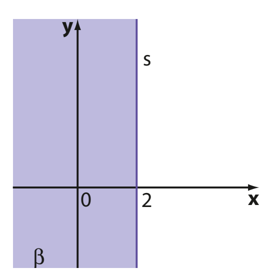
EXEMPLO 25

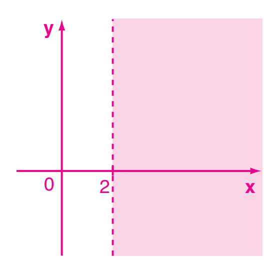
Seja s: $x - 2 = 0$.

s divide o plano cartesiano em dois semiplanos:



Todos os pontos de α possuem abscissas maiores ou iguais a 2. Podemos representá-los pela inequação $x \geqslant 2 \Leftrightarrow x - 2 \geqslant 0$.





Todos os pontos de β possuem abscissas menores ou iguais a 2. Podemos representá-los pela inequação $x \leqslant 2 \Leftrightarrow x - 2 \leqslant 0$.

PENSE NISTO:

Represente graficamente o conjunto de pontos que satisfazem a inequação $x - 2 > 0$.

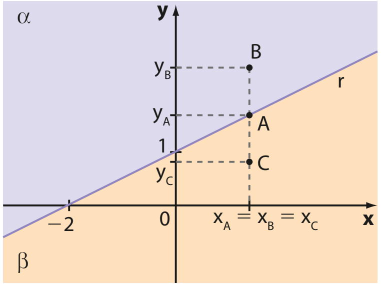
2º caso: A reta **r** não é paralela a qualquer um dos eixos coordenados.

EXEMPLO 26

Seja r: $x - 2y + 2 = 0$.

Tomemos um ponto qualquer $A(x_A, y_A)$ em **r**.

Temos: $x_A - 2y_A + 2 = 0 \Leftrightarrow y_A = \frac{x_A}{2} + 1$



Seja **B** um ponto na mesma vertical de **A** ($x_B = x_A$), acima de **r**, isto é, $y_B > y_A$, ou melhor:

$$y_B > \frac{x_A}{2} + 1$$

Como $x_A = x_B$, temos:

$$y_B > \frac{x_B}{2} + 1 \Rightarrow 2y_B > x_B + 2 \Rightarrow x_B - 2y_B + 2 < 0 \quad (1)$$

Seja **C** um ponto na mesma vertical de **A** ($x_A = x_C$), abaixo de **r**, isto é, $y_C < y_A \Rightarrow y_C < \frac{x_A}{2} + 1$.
Como $x_A = x_C$, escrevemos:

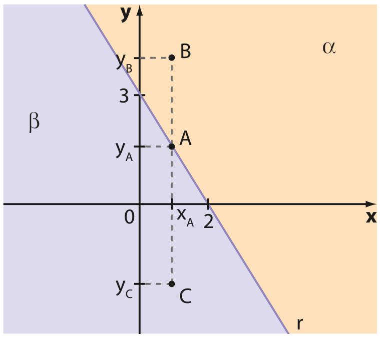
$$y_C < \frac{x_C}{2} + 1 \Rightarrow x_C - 2y_C + 2 > 0 \quad (2)$$

Assim, temos que:

- todo ponto do semiplano α, excluindo os pontos de **r**, satisfaz a inequação $x - 2y + 2 < 0$, como em (1).
- todo ponto do semiplano β, excluindo os pontos de **r**, satisfaz a inequação $x - 2y + 2 > 0$, como em (2).

EXEMPLO 27

Seja r: $3x + 2y - 6 = 0$; α e β são os dois semiplanos determinados por **r**.



Temos:

- $A \in r \Rightarrow 3x_A + 2y_A - 6 = 0 \Leftrightarrow y_A = -\frac{3}{2}x_A + 3$
- $B \in \alpha\ (x_B = x_A, y_B > y_A) \Rightarrow y_B > -\frac{3}{2}x_B + 3 \Leftrightarrow 3x_B + 2y_B - 6 > 0 \quad (1)$
- $C \in \beta\ (x_C = x_A, y_C < y_A) \Rightarrow y_C < -\frac{3}{2}x_C + 3 \Leftrightarrow 3x_C + 2y_C - 6 < 0 \quad (2)$

Temos que:

- todo ponto do semiplano α, excluindo os pontos de **r**, satisfaz a inequação $3x + 2y - 6 > 0$, como em (1).
- todo ponto do semiplano β, excluindo os pontos de **r**, satisfaz a inequação $3x + 2y - 6 < 0$, como em (2).

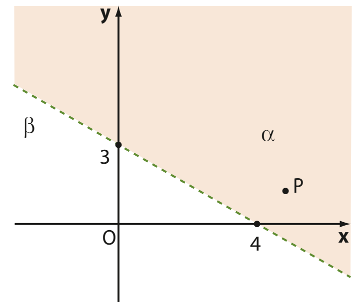
OBSERVAÇÃO

Se uma reta **r** qualquer (não paralela a qualquer um dos eixos), de equação r: $ax + by + c = 0$, divide o plano cartesiano em dois semiplanos de mesma origem **r**, como nos exemplos 26 e 27, temos:

- Todo ponto (x, y) pertencente a um dos semiplanos satisfaz a inequação $ax + by + c \geqslant 0$.
- Todo ponto (x, y) pertencente ao outro semiplano satisfaz a inequação $ax + by + c \leqslant 0$.

Nos dois casos, a igualdade ocorre somente se o ponto pertence à reta.

EXEMPLO **28**



A reta r: $3x + 4y - 12 = 0$ divide o plano cartesiano nos semiplanos α e β. Vamos determinar a inequação que descreve os pontos de α.

Consideramos um ponto qualquer do plano cartesiano, não pertencente a **r**, por exemplo, a origem O(0, 0).

Substituindo pelas coordenadas de **O**, obtemos, no primeiro membro da equação de **r**:

$$3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 - 12 = -12 < 0$$

Isso mostra que os pontos do semiplano β, que contém **O**, satisfazem a inequação $3x + 4y - 12 < 0$.

Dessa forma, todos os pontos do semiplano α, que não contém **O**, satisfazem a inequação $3x + 4y - 12 > 0$.

OBSERVAÇÃO

Se tivéssemos escolhido outro ponto qualquer, por exemplo, P(5, 2), chegaríamos à mesma conclusão:

$$3 \cdot 5 + 4 \cdot 2 - 12 = 11 > 0$$

Como o ponto **P** pertence ao semiplano α, temos que os pontos de α podem ser descritos por $3x + 4y - 12 > 0$.

PENSE NISTO:

Por que é mais prático escolher a origem para testar o sinal?

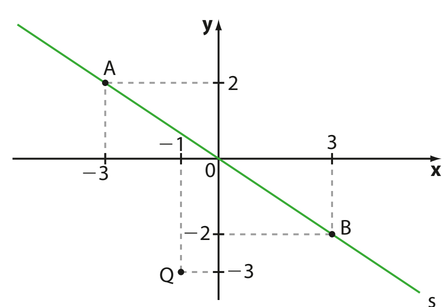
EXEMPLO **29**

A inequação $2x + 3y \leqslant 0$ pode ser resolvida graficamente.

Seja **s** a reta de equação $2x + 3y = 0$.

Tomemos dois pontos de **s**:

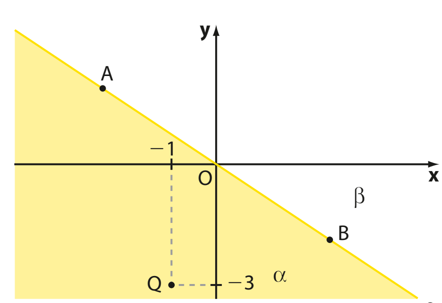
x	y	(x, y)
−3	2	A(−3, 2)
3	−2	B(3, −2)



Na equação de **s**, devemos "experimentar" as coordenadas de um ponto não pertencente a **s** para escolher a região correta.

Como a origem pertence à reta **s**, tomemos outro ponto, por exemplo, o ponto Q(−1, −3):

$$2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-3) = -11 \leqslant 0$$



O sinal da desigualdade coincide com o requerido pela inequação inicial; portanto, o ponto **Q** (e todos os outros pontos do mesmo semiplano α) satisfaz a condição, e a região escolhida é a que está "abaixo" de **s**. Veja a figura ao lado.

No caso, a reta **s** é marcada continuamente (veja o sinal $\leqslant$).

Podemos apresentar como solução para a inequação dada: "semiplano sα (incluindo **s**)".

EXERCÍCIO RESOLVIDO

15 As coordenadas dos pontos de uma região do plano cartesiano satisfazem simultaneamente as inequações:

$$\begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \\ 2x - 5y - 10 \leqslant 0 \end{cases}$$

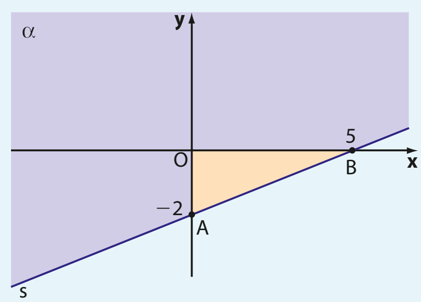
Determine a área dessa região.

Solução:

As duas primeiras inequações são satisfeitas pelos pontos pertencentes ao 4º quadrante. 1

Para resolver graficamente a terceira inequação, devemos construir a reta s: $2x - 5y - 10 = 0$.

x	y
0	−2
5	0



Tomando a origem **O** (com $O \notin s$) e substituindo suas coordenadas no 1º membro da equação da reta **s**, temos:

$$2 \cdot 0 - 5 \cdot 0 - 10 = -10 < 0$$

Assim, o semiplano que satisfaz a inequação $2x - 5y - 10 \leqslant 0$ deve conter a origem, isto é, é o semiplano **α** incluindo **s**. 2

A interseção dos pontos de 1 e 2 é o triângulo OAB destacado no gráfico. Sua área é:

$$\frac{5 \cdot 2}{2} = 5 \text{ u.a. (unidades de área)}$$

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

100 Resolva graficamente as inequações:

a) $x + 1 \leqslant 0$

b) $y + 3 > 0$

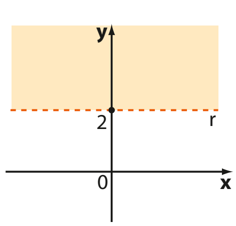
c) $x - 3y \leqslant 2$

d) $2x - 6y > 0$

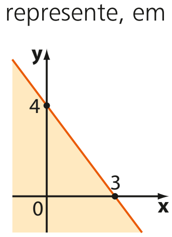
e) $4x + y \geqslant 3$

101 Escreva uma inequação do 1º grau que represente, em cada caso, a região sombreada:

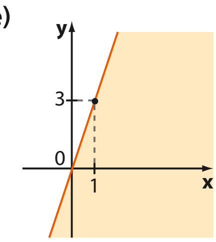
a)



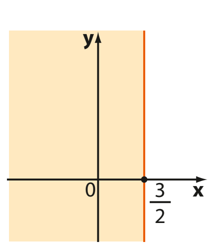
c)



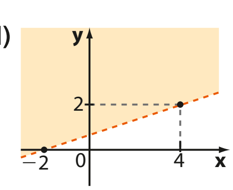
e)



b)



d)



102 Seja **R** a região do plano cujos pontos têm coordenadas que satisfazem simultaneamente as condições: $-2 \leqslant x \leqslant 2$ e $-1 \leqslant y \leqslant 3$.

a) Represente graficamente **R**.

b) Determine a área de **R**.

103 As coordenadas dos pontos pertencentes a determinada região do plano satisfazem simultaneamente as inequações:

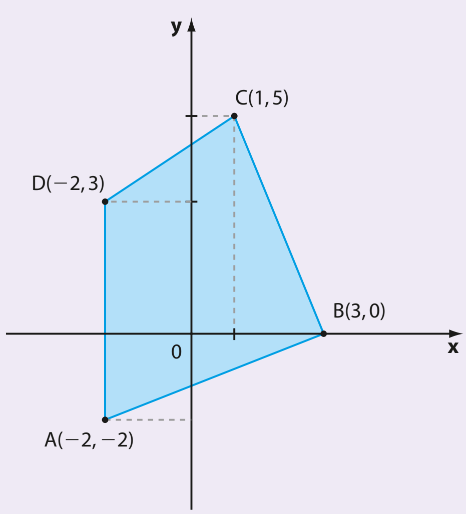
$$\begin{cases} x + y \leqslant 0 \\ y - 1 \geqslant 0 \\ x + 4 \geqslant 0 \end{cases}$$

Determine o perímetro dessa região.

104 Represente graficamente os pontos do plano cartesiano que satisfazem simultaneamente as inequações $x - 3y \leqslant 2$ e $3x + y \geqslant 4$.

DESAFIO

Em um pequeno município, a região de alcance de transmissão do sinal de uma operadora de telefonia celular está representada no plano cartesiano abaixo pelo quadrilátero ABCD reunido com o seu interior. A origem do sistema de coordenadas cartesianas coincide com o local onde está instalada a torre da operadora. A unidade de medida de comprimento considerada é o quilômetro.



a) Qual é, em quilômetros quadrados, a área da região do município que recebe o sinal da operadora?

b) A casa de Juca está localizada em um ponto do 1º quadrante, equidistante de **B** e **C** e representada, no mapa, sobre a reta de equação $2x - y = 0$. A família de Juca recebe o sinal? A que distância da torre se encontra sua casa? Considere $\sqrt{5} \simeq 2{,}24$.

c) Sabe-se que, nesse plano cartesiano, o município encontra-se no interior da região limitada pelas retas horizontais $y - 5 = 0$ e $y + 4 = 0$ e pelas retas verticais $x - 5 = 0$ e $x + 3 = 0$. Escolhendo-se, ao acaso, um ponto qualquer do município, qual é a probabilidade de que ele receba o sinal da operadora?

Aplicações

Uma introdução à programação linear

Uma empresa fabrica *tablets* em dois modelos: **A** e **B**.

O custo de produção unitário do modelo **A** é R$ 600,00 e o do modelo **B** é R$ 900,00. As restrições orçamentárias da empresa permitem gastos mensais de até R$ 54 000,00 na produção dos *tablets* e sua capacidade produtiva mensal é de 80 unidades.

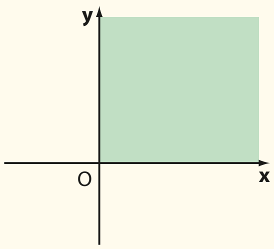
Representando por

x: número de *tablets* do tipo **A** fabricados no mês
y: número de *tablets* do tipo **B** fabricados no mês

podemos estabelecer as seguintes desigualdades:

$$\begin{cases} x \geqslant 0 & \text{(1)} \\ y \geqslant 0 & \text{(2)} \\ 600 \cdot x + 900 \cdot y \leqslant 54\,000 & \text{(3)} \\ x + y \leqslant 80 & \text{(4)} \end{cases}$$

Observe que (1) e (2) representam os pontos do 1º quadrante, incluindo os semieixos reais positivos Ox e Oy.

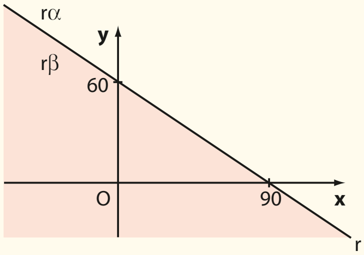


De (3), seja r: $600x + 900y - 54\,000 = 0 \Leftrightarrow 2x + 3y - 180 = 0$

Testando a origem O(0, 0), temos que:

$$2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 180 < 0$$

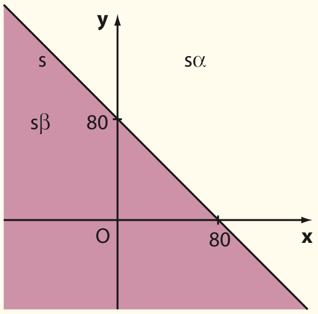
Assim, a representação gráfica de (3) é o semiplano rβ (incluindo **r**).



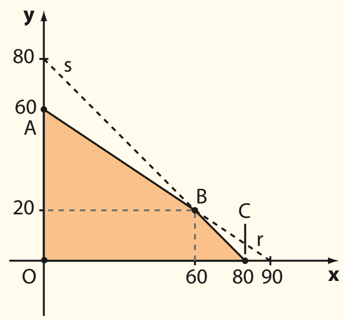
De (4) temos s: $x + y = 80 \Leftrightarrow x + y - 80 = 0$;
Testando a origem, temos:

$$0 + 0 - 80 < 0$$

A representação gráfica de (4) é o semiplano sβ (incluindo **s**).



Reunindo as três últimas representações gráficas em um mesmo sistema de coordenadas cartesianas e determinando o conjunto de pontos (x, y) que satisfazem, simultaneamente, 1, 2, 3 e 4, obtemos o quadrilátero ABCO reunido com seu interior; sendo O(0, 0), A(0, 60), B(60, 20) e C(80, 0).



PENSE NISTO:

Como foram obtidas as coordenadas de **B**?

A análise da solução gráfica obtida permite à empresa saber que, em um determinado mês (mantidas tais restrições), é possível fabricar, por exemplo, 20 *tablets* do tipo **A** e 50 do tipo **B**, pois (20, 50) pertence ao interior de ABCO; da mesma forma, podem ser fabricados, em um mês, 70 *tablets* do tipo **A** e 10 do tipo **B**, pois (70, 10) pertence ao interior de ABCO.

Ao contrário, não é possível fabricar 40 *tablets* de cada tipo em um mês, pois (40, 40) **não** pertence à região destacada.

Conhecendo-se o preço unitário de venda de cada tipo de *tablet*, é possível, através de conhecimentos da Matemática do Ensino Superior, determinar o número de unidades que devem ser vendidas (respeitadas as restrições orçamentárias e de produtividade) a fim de maximizar a receita da empresa com a venda de *tablets*.

A situação aqui descrita é um exemplo introdutório simples de problemas estudados pela programação linear.

Programação linear é uma técnica de planejamento em pesquisa operacional presente em vários ramos da atividade humana. Em linhas gerais, trata de problemas de otimização: como distribuir recursos limitados para atender um objetivo específico, que pode ser a maximização da receita (ou do lucro) de uma empresa, em situações de restrições orçamentárias.

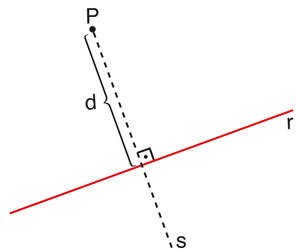
Veja alguns outros exemplos de aplicações da programação linear:

- formulação da composição de alimentos, rações e adubo para melhor rendimento, em negócios agropecuários;
- composição de tabelas de escala de horários dos funcionários em uma empresa para gerar maior receita com o menor custo possível;
- seleção de rotas e elaboração da logística que permitam a uma empresa a redução de custos na realização de transportes de cargas e encomendas, com qualidade e segurança.

Fontes de pesquisa: NOGUEIRA, F. M. A. *Programação linear*. Disponível em: <www.ufjf.br/epd015/files/2010/06/IntrodPL.pdf>. Acesso em: 14 mar. 2016; *Introdução à programação linear*. Disponível em: <www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/novos_conteudos/modulo_II/pdf/CAP5EE2PLapost.pdf>. Acesso em: 14 mar. 2016.; LOUREIRO, M. *Problemas de programação linear*. Disponível em: <www.novaims.unl.pt/docentes/vlobo/IO/1%20PPLinear.pdf>. Acesso em: 14 mar. 2016.
MORETTIN, Pedro Alberto; BUSSAB, Wilton de Oliveira; HAZZAN, Samuel. *Cálculo*: Funções de uma e várias variáveis. 2ª ed. São Paulo: Saraiva 2010.

UM POUCO MAIS SOBRE — Demonstração da fórmula da distância de um ponto a uma reta

Vamos determinar **d** (distância de **P** a **r**).



$P(x_0, y_0)$
$r: ax + by + c = 0$

1º) Determinamos a equação da reta perpendicular a **r** por **P**.

- Como $s \perp r$, $m_s = -\dfrac{1}{m_r} = -\dfrac{1}{\left(-\dfrac{a}{b}\right)} = \dfrac{b}{a}$.
- **s** passa por $P(x_0, y_0) \Rightarrow y - y_0 = \dfrac{b}{a} \cdot (x - x_0) \Rightarrow s\colon bx - ay + (ay_0 - bx_0) = 0$

2º) Determinamos as coordenadas de **P'**, projeção ortogonal de **P** sobre **r**. Devemos resolver o sistema, nas incógnitas **x** e **y**, formado pelas equações de **r** e de **s**:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ bx - ay + (ay_0 - bx_0) = 0 \end{cases}$$

Somando a primeira equação multiplicada por **b** com a segunda equação multiplicada por $-a$, obtemos: $y = \dfrac{a^2y_0 - bc - abx_0}{a^2 + b^2}$. Substituindo esse valor em qualquer uma das equações, obtemos o valor de **x**:

$$x = \frac{b^2x_0 - ac - aby_0}{a^2 + b^2}$$

3º) Calculamos a distância entre **P** e **P'**.
A distância de **P** a **r** é a distância entre $P(x_0, y_0)$ e $P'\left(\dfrac{b^2x_0 - ac - aby_0}{a^2 + b^2}, \dfrac{a^2y_0 - bc - abx_0}{a^2 + b^2}\right)$:

$$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{\left(\frac{b^2x_0 - ac - aby_0}{a^2 + b^2} - x_0\right)^2 + \left(\frac{a^2y_0 - bc - abx_0}{a^2 + b^2} - y_0\right)^2}$$

$$d = \sqrt{\left[\frac{a \cdot (-ax_0 - by_0 - c)}{a^2 + b^2}\right]^2 + \left[\frac{b \cdot (-ax_0 - by_0 - c)}{a^2 + b^2}\right]^2}$$

Lembrando que $\forall t \in \mathbb{R}$, $(-t)^2 = t^2$, e colocando $(ax_0 + by_0 + c)^2$ em evidência, temos:

$$d = \sqrt{\frac{(ax_0 + by_0 + c)^2 \cdot (a^2 + b^2)}{(a^2 + b^2)^2}} = \sqrt{\frac{(ax_0 + by_0 + c)^2}{a^2 + b^2}}$$

$$\boxed{d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$