CAPÍTULO 3

A circunferência

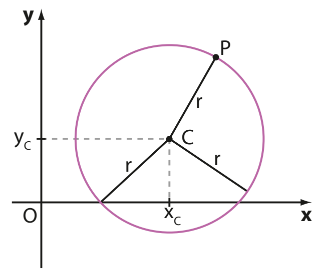
A equação reduzida da circunferência

Uma circunferência λ com centro $C(x_C, y_C)$ e raio de medida **r** é o conjunto de todos os pontos $P(x, y)$ do plano que distam **r** de **C**:

$$d_{PC} = \sqrt{(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2} = r$$

Elevando membro a membro ao quadrado, temos:

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2$$

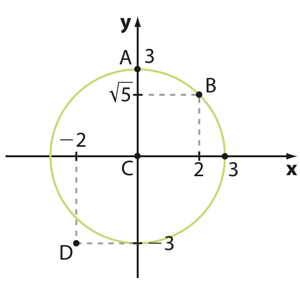


chamada **equação reduzida da circunferência**, em que:

- $\mathbf{x_C}$ e $\mathbf{y_C}$ são as **coordenadas do centro C** da circunferência;
- **r** é a medida do **raio** da circunferência;
- **x** e **y** são as **coordenadas do ponto genérico P** — um ponto que pode ocupar o lugar de qualquer ponto da circunferência, sempre distando **r** de **C**.

EXEMPLO 1

A equação reduzida da circunferência de centro C(0, 0) e raio de medida 3 é $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 3^2$, isto é, $x^2 + y^2 = 9$.



Note que o ponto A(0, 3) pertence a essa circunferência, pois $(0 - 0)^2 + (3 - 0)^2 = 9$.
Da mesma forma, o ponto $B(2, \sqrt{5})$ também pertence, pois $2^2 + (\sqrt{5})^2 = 9$.
Já o ponto D(−2, −3) não pertence à circunferência, pois $(-2)^2 + (-3)^2 = 13 \neq 9$.

EXEMPLO 2

A equação reduzida da circunferência de centro C(3, 4) e raio de medida 5 é $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$.

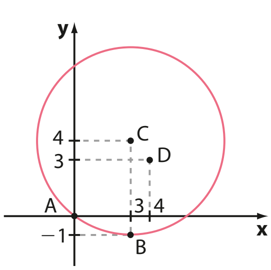
Note que os pontos A(0, 0) e B(3, −1) pertencem a essa circunferência, pois:

$$(0 - 3)^2 + (0 - 4)^2 = 25$$

e

$$(3 - 3)^2 + (-1 - 4)^2 = 25$$

O ponto D(4, 3) não pertence, pois $(4 - 3)^2 + (3 - 4)^2 \neq 25$.



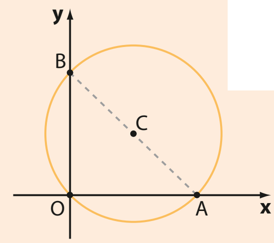
EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

1 Qual é a equação reduzida da circunferência em que as extremidades de um diâmetro são A(4, 0) e B(0, 4)?

Solução:

O ponto médio de $\overline{AB}$ é o centro **C** da circunferência; então:

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{4+0}{2} = 2 \text{ e } y_C = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{0+4}{2} = 2$$



Portanto, **C** é (2, 2).

O raio **r** mede a metade da distância entre **A** e **B**:

$$r = \frac{1}{2} d_{AB} = \frac{1}{2}\sqrt{(4-0)^2 + (0-4)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{32} = 2\sqrt{2}$$

A equação reduzida da circunferência é:

$(x-2)^2 + (y-2)^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2$, isto é,

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 8$$

PENSE NISTO:

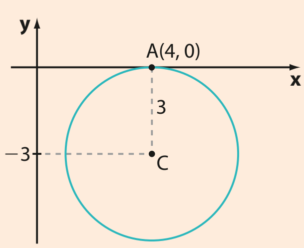
Qual é o ponto diametralmente oposto à origem **O**?

2 Qual é a equação reduzida da circunferência que tem raio de medida 3, tangencia o eixo das abscissas no ponto A(4, 0) e está contida no quarto quadrante?

Solução:

O centro da circunferência é C(4, −3), e seu raio mede 3. Então, a equação reduzida é:

$$(x-4)^2 + (y+3)^2 = 9$$



PENSE NISTO:

Entre todos os pontos dessa circunferência, qual é o de menor ordenada? E o de maior abscissa?

3 Obtenha a equação reduzida da circunferência que passa pelos pontos A(−3, 0), B(2, 5) e D(1, 6).

Solução:

Este exercício pode ser resolvido de dois modos:

1º modo:

A equação reduzida é da forma $(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2$, em que precisamos determinar $\mathbf{x_C}$, $\mathbf{y_C}$ e **r**.

Como **A**, **B** e **D** pertencem à circunferência, suas coordenadas devem satisfazer sua equação, então:

$$\begin{cases} (-3 - x_C)^2 + (0 - y_C)^2 = r^2 \Rightarrow 9 + 6x_C + x_C^2 + y_C^2 = r^2 & (1) \\ (2 - x_C)^2 + (5 - y_C)^2 = r^2 \Rightarrow 4 - 4x_C + x_C^2 + 25 - 10y_C + y_C^2 = r^2 & (2) \\ (1 - x_C)^2 + (6 - y_C)^2 = r^2 \Rightarrow 1 - 2x_C + x_C^2 + 36 - 12y_C + y_C^2 = r^2 & (3) \end{cases}$$

Subtraindo (2) de (1), obtemos $x_C + y_C - 2 = 0$. (4)

Subtraindo (3) de (2), obtemos $-x_C + y_C - 4 = 0$. (5)

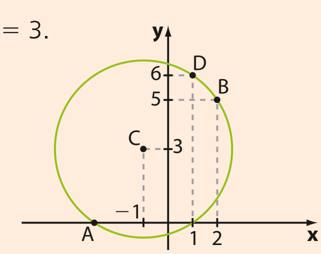
Resolvendo o sistema formado por (4) e (5), obtemos: $x_C = -1$ e $y_C = 3$.

Substituindo $\mathbf{x_C}$ e $\mathbf{y_C}$ por seus valores em (1), temos:

$$(-3+1)^2 + (0-3)^2 = r^2 \Rightarrow r^2 = 13$$

A equação reduzida dessa circunferência é:

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 = 13$$



2º modo:

O centro $C(x_C, y_C)$ dista igualmente de **A** e **B**, portanto pertence à mediatriz **r** de $\overline{AB}$ (reta perpendicular a $\overline{AB}$ traçada pelo seu ponto médio **M**). Então:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-3 + 2}{2} = -\frac{1}{2},\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{0 + 5}{2} = \frac{5}{2}$$

$$m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5 - 0}{2 + 3} = 1 \Rightarrow m_r = -\frac{1}{m_{AB}} = -1$$

$$r: y - \frac{5}{2} = -1 \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow x + y - 2 = 0 \quad (1)$$

Analogamente, o centro **C** pertence à mediatriz **s** de $\overline{BD}$ (reta perpendicular a $\overline{BD}$ traçada pelo seu ponto médio **N**). Então:

$$x_N = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{2 + 1}{2} = \frac{3}{2},\ y_N = \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{5 + 6}{2} = \frac{11}{2}$$

$$m_{BD} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6 - 5}{1 - 2} = -1 \Rightarrow m_s = -\frac{1}{m_{BD}} = 1$$

$$s: y - \frac{11}{2} = 1 \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right) \Rightarrow x - y + 4 = 0 \quad (2)$$

Resolvendo o sistema de equações (1) e (2), encontramos $x = -1$ e $y = 3$. Então, $C(-1, 3)$.

$$\text{raio: } CA = \sqrt{(-1 + 3)^2 + (3 - 0)^2} = \sqrt{13}$$

A equação reduzida dessa circunferência é $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 13$.

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

1 Escreva a equação reduzida de cada circunferência descrita abaixo:

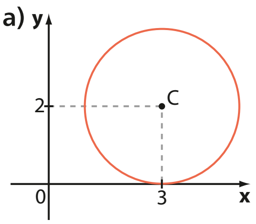
a) centro na origem e raio de medida 4.

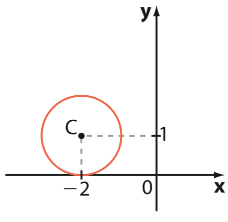
b) centro $C(-2, 5)$ e raio de medida 3.

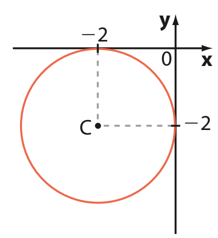
c) centro $C(3, -2)$ e raio de medida $\sqrt{7}$.

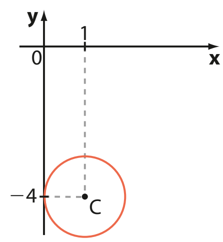
d) com diâmetro $\overline{AB}$, sendo $A(2, -2)$ e $B(6, 2)$.

2 Escreva a equação reduzida de cada circunferência de centro **C** a seguir:

a)


b)


c)


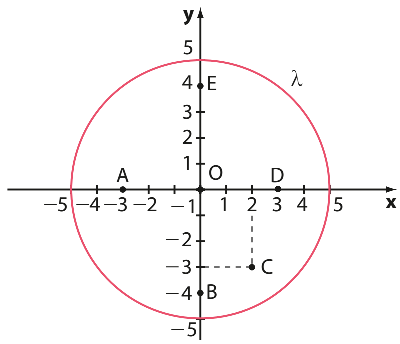
d)


3 Há quatro circunferências que tangenciam os eixos coordenados e possuem raio unitário.

a) Quais são suas equações reduzidas?

b) Determine a área do quadrilátero que possui os vértices nos centros dessas circunferências.

4 Observe esta figura:



Determine a equação reduzida da circunferência que:

a) tem centro **A** e passa por **O**;

b) é concêntrica com **λ** e passa por **A**;

c) tem diâmetro $\overline{BC}$;

d) tem centro **D** e passa por **E**.

5 Uma circunferência passa pela origem e tem centro em $(-4,\ -3)$. Determine sua equação reduzida.

6 A circunferência **λ** encontra-se no 2º quadrante, seu raio mede 3 e **λ** tangencia os eixos coordenados.

a) Qual é a sua equação reduzida?

b) **λ** passa por $(-2,\ 5)$?

7 Sendo $A(-2,\ -6)$ e $B(2,\ 4)$, escreva a equação reduzida:

a) da circunferência de diâmetro $\overline{AB}$;

b) de outra circunferência que passa por **A** e **B**.

8 Determine os valores reais de **k** de modo que a circunferência de equação $(x - k)^2 + (y - 4)^2 = 25$ passe pelo ponto $(2k,\ 0)$.

9 As retas $r\colon y = 2x - 1$ e $s\colon 3x + 2y - 5 = 0$ intersectam-se em um ponto **P** da circunferência **λ**, de centro $(2,\ 4)$. Qual é o ponto diametralmente oposto a **P**?

10 Uma circunferência **λ** tem equação reduzida $(x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 4$. Determine:

a) o ponto de **λ** mais distante do eixo das abscissas;

b) o ponto de **λ** mais distante do eixo das ordenadas.

11 Seja **λ** a circunferência de equação $(x - 3)^2 + y^2 = 5$ e seja $P(a + 1,\ a - 1)$ um ponto de **λ**.

a) Calcule **a**.

b) Para o valor positivo de **a** encontrado, calcule o coeficiente angular da reta que passa por **P** e pelo centro de **λ**.

12 Determine a área de um quadrado circunscrito à circunferência de equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 16$, em que **a** e **b** podem assumir quaisquer valores reais.

13 Qual é o ponto da circunferência $(x - 3)^2 + y^2 = 4$ mais distante do eixo **y**?

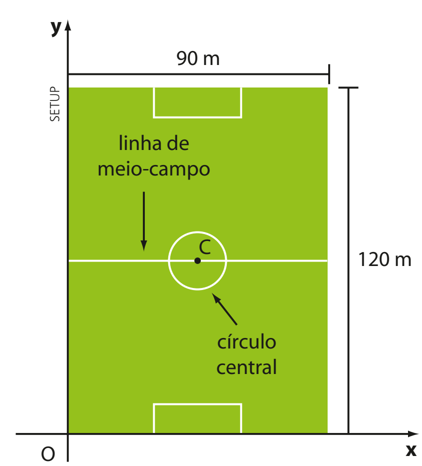
14 O centro de uma circunferência pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares. Sabendo que os pontos $(3,\ -1)$ e $(7,\ 3)$ pertencem à circunferência, determine sua equação.

15 Em cada caso, verifique se os pontos **A**, **B** e **C** estão alinhados. A seguir, se possível, escreva a equação reduzida da circunferência à qual eles pertencem:

a) $A(-1,\ 3)$, $B(3,\ -1)$ e $C(1,\ 5)$

b) $A(2,\ 6)$, $B(-1,\ 0)$ e $C(-3,\ -4)$

16 Um campo oficial de futebol tem 120 m de comprimento por 90 m de largura. O campo é dividido em duas partes iguais e o centro **C** é marcado com um ponto na metade da linha de meio-campo. O círculo central tem 18,30 m de diâmetro (para facilitar os cálculos, aproxime esse valor para 18 m):



Inserindo-se um sistema de coordenadas cartesianas de origem **O**, com eixos Ox e Oy de sentidos positivos indicados na figura, e sendo a unidade de medida de comprimento o metro, é possível determinar equações de retas e circunferências.

a) Escreva a equação da reta que passa por **O** e **C**.

b) Escreva a equação da circunferência que representa o círculo central.

A equação geral da circunferência

A partir da equação reduzida de uma circunferência, $(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2$, podemos desenvolver os produtos notáveis e obter uma equação equivalente. Temos:

$$x^2 - 2xx_C + x_C^2 + y^2 - 2yy_C + y_C^2 = r^2$$

Agrupando os termos convenientemente, obtemos:

$$\boxed{x^2 + y^2 - 2x_Cx - 2y_Cy + (x_C^2 + y_C^2 - r^2) = 0}$$

A equação destacada é conhecida como **forma geral da equação da circunferência** ou **equação geral da circunferência**, com centro (x_C, y_C) e raio de medida **r**.

A circunferência com centro em $(-1, 3)$ e cujo raio mede 4, por exemplo, tem equação reduzida $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 16$; pode ser escrita como $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 6 = 0$ na forma geral.

Dada a equação geral de uma circunferência, como podemos determinar seu centro e a medida de seu raio? Vamos conhecer agora dois métodos.

Método I: completando os quadrados

Para determinarmos o centro e a medida do raio da circunferência representada, por exemplo, pela equação $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 23 = 0$ (ou mesmo saber se, de fato, a equação representa uma circunferência), utilizamos um processo prático que consiste em "completar quadrados" para podermos escrever a equação em sua forma reduzida:

- Agrupamos os termos em **x** e em **y** e passamos o termo independente para o 2º membro da igualdade:

$$x^2 - 6x + y^2 - 4y = 23 \text{ e escrevemos: } x^2 - 6x + \blacksquare + y^2 - 4y + \blacksquare = 23$$

- Podemos notar que existem números reais que podem ser colocados no lugar do quadradinho azul e do quadradinho vermelho de modo a obter dois trinômios quadrados perfeitos (um em **x** e o outro em **y**). Esses números são 9 e 4, respectivamente, que também devem ser adicionados ao 2º membro da igualdade a fim de não alterá-la:

$$\underbrace{x^2 - 6x + 9}_{(x-3)^2} + \underbrace{y^2 - 4y + 4}_{(y-2)^2} = 23 + 9 + 4 = 36$$

Assim, transformamos a equação geral da circunferência, $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 23 = 0$, na equação reduzida $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 36$ e, como sabemos, o centro é $(3, 2)$ e a medida do raio é 6.

Método II: analisando os coeficientes

Nem sempre, porém, uma equação da forma $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$, com coeficientes reais, representa uma circunferência. Vamos analisar as condições que os coeficientes dessa equação devem satisfazer para que ela represente uma circunferência. Inicialmente vamos dividir os dois membros da equação por $A \neq 0$:

$$x^2 + \frac{B}{A}y^2 + \frac{C}{A}xy + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0$$

Comparando com a equação geral da circunferência, $x^2 + y^2 - 2x_Cx - 2y_Cy + (x_C^2 + y_C^2 - r^2) = 0$, obtemos as relações:

- $\frac{B}{A} = 1 \Rightarrow A = B \neq 0$ (os coeficientes de x^2 e y^2 devem ser iguais, mas não nulos)
- $\frac{C}{A} = 0 \Rightarrow C = 0$ (não há termo em xy)
- $\frac{D}{A} = -2x_C \Rightarrow x_C = \frac{-D}{2A}$
- $\frac{E}{A} = -2y_C \Rightarrow y_C = \frac{-E}{2A}$
- $\frac{F}{A} = x_C^2 + y_C^2 - r^2 \Rightarrow r^2 = x_C^2 + y_C^2 - \frac{F}{A} \Rightarrow r^2 = \frac{D^2}{4A^2} + \frac{E^2}{4A^2} - \frac{4AF}{4A^2} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2}}$ com $D^2 + E^2 - 4AF > 0$.

São essas as relações que deverão ser satisfeitas para determinar se uma equação é realmente a equação de uma circunferência. Em caso afirmativo, elas servirão também para determinar as coordenadas do centro e a medida do raio.

EXEMPLO 3

Para verificar se a equação $x^2 + y^2 + 8x - 6y - 11 = 0$ representa uma circunferência e qual é ela, devemos testar as cinco condições:

- $A = B = 1 \neq 0$
- $C = 0$ (não há termo em xy)
- $x_C = \dfrac{-D}{2A} = \dfrac{-8}{2} = -4$
- $y_C = \dfrac{-E}{2A} = \dfrac{6}{2} = 3$

$$\left.\begin{array}{l} x_C = -4 \\ y_C = 3 \end{array}\right\} \text{centro } C(-4, 3)$$

- $r = \sqrt{\dfrac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2}} = \sqrt{\dfrac{8^2 + (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-11)}{4 \cdot 1^2}} = \sqrt{\dfrac{144}{4}} = 6$ (o raio mede 6)

Para conferir, vamos agora usar o método de completamento de quadrados:

$$x^2 + 8x + \blacksquare + y^2 - 6y + \blacksquare = 11 + \blacksquare + \blacksquare$$

$$x^2 + 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 = 11 + 16 + 9$$

$$(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 36$$

Então, $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 36$ é a equação reduzida da circunferência de centro $(-4, 3)$ e raio de medida 6.

EXEMPLO 4

No estudo das cinco condições a respeito da equação $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 31 = 0$, temos:

- $A = B = 1 \neq 0$
- $C = 0$
- $\dfrac{-D}{2A} = \dfrac{4}{2} = 2$
- $\dfrac{-E}{2A} = \dfrac{-10}{2} = -5$
- $D^2 + E^2 - 4AF = (-4)^2 + 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 31 = 16 + 100 - 124 = -8 < 0$

Como não se verifica a quinta condição, não se trata de equação da circunferência. Conferindo, agora pelo método de completamento dos quadrados:

$$x^2 - 4x + \blacksquare + y^2 + 10y + \blacksquare = -31 + \blacksquare + \blacksquare$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 10y + 25 = -31 + 4 + 25$$

$$(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = -2 \quad *$$

o que é impossível, pois o primeiro membro de $*$ é uma soma de quadrados de dois números reais.

Assim, a equação $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 31 = 0$ representa o conjunto vazio.

PENSE NISTO:

Quaisquer que sejam os números reais **a** e **b**, qual é o sinal de $a^2 + b^2$?

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

17 Verifique se as equações abaixo representam circunferências. Em caso afirmativo, forneça o centro e a medida do raio da circunferência que cada uma representa.

a) $x^2 + y^2 - 10x - 2y + 17 = 0$

b) $x^2 + y^2 + 12x - 12y + 73 = 0$

c) $x^2 + y^2 + 2x + 6y = 0$

d) $x^2 + 2y^2 + 4x + 18y - 100 = 0$

e) $x^2 + 3y^2 - 4 = 0$

f) $x^2 + y^2 + 4x - 4y - 17 = 0$

g) $x^2 + y^2 - 20x + 99 = 0$

h) $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + 3 = 0$

18 Determine as coordenadas do centro e a medida do raio de cada circunferência:

a) $x^2 + y^2 - 6y = 0$

b) $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 1 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$

d) $2x^2 + 2y^2 + 16x - 32y + 134 = 0$

19 Transforme, conforme o caso, a forma geral da equação da circunferência em reduzida (ou vice-versa):

a) $2x^2 + 2y^2 + 4x - 8y + 9 = 0$

b) $(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 9$

c) $x^2 + y^2 - 5x - 9y + \frac{3}{2} = 0$

d) $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = \frac{1}{4}$

20 Escreva a equação geral da circunferência que passa:

a) pela origem e tem centro $C(-1, -4)$.

b) por $(-1, -4)$ e tem centro na origem.

21 Calcule a distância do ponto $P(4, 6)$ ao centro da circunferência de equação $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 3 = 0$.

22 Determine os valores reais de **k** para que a equação $x^2 + y^2 - 2x + 10y - k + 28 = 0$ seja de uma circunferência.

23 Determine o maior valor inteiro de **k** de modo que $x^2 + y^2 + 6x + 14y + k = 0$ seja equação de uma circunferência.

24 Determine a equação geral da reta que passa pelos centros das circunferências de equações $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 19$ e $x^2 + y^2 - (x + y + 1) = 0$.

25 Qual é a distância entre os centros das circunferências de equações $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 12 = 0$ e $(x - 3)^2 + y^2 = 11$?

26 Determine o único valor real de **p** que faz com que as circunferências λ_1: $x^2 + y^2 + px - 6y - 17 = 0$ e λ_2: $x^2 + y^2 + 4x - (p + 2)y - 10 = 0$ sejam concêntricas. Qual é o centro comum de λ_1 e λ_2?

27 O centro de uma circunferência λ pertence à reta **r** de equação: $2x - y + 4 = 0$. Sabe-se que λ passa por $(2, 2)$ e $(-1, 5)$.

a) Determine a equação geral de λ.

b) Represente **r** e λ em um mesmo plano cartesiano. Se desejar, use um quadriculado.

28 Dadas as circunferências λ_1: $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 11 = 0$ e λ_2: $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 12 = 0$, determine as coordenadas:

a) do ponto de maior abscissa de $\boldsymbol{\lambda_1}$;

b) do ponto de menor ordenada de $\boldsymbol{\lambda_2}$.

29 Determine o perímetro do quadrado inscrito na circunferência de equação:

$$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 32$$

30 Em certa cidade, foi decretado o rodízio de carros como forma de reduzir os congestionamentos e a emissão de poluentes. Ficou estabelecido que a limitação ao uso dos carros ficaria restrita à região formada pelas vias que distassem até 8 quilômetros do marco zero da cidade.

Vamos representar essa cidade em um sistema de coordenadas cartesianas cuja origem é o marco zero da cidade, a unidade de medida de comprimento usada é o centímetro e a escala é de 1 : 20 000.

A região de abrangência do rodízio é limitada por uma circunferência. Determine, nesse sistema de coordenadas,

a) a equação dessa circunferência;

b) a área da região de abrangência do rodízio.

Posições relativas entre ponto e circunferência

Todos os pontos de uma circunferência distam igualmente do centro e mantêm dele distância igual à medida do raio. Assim, dada uma circunferência de centro **C** e raio de medida **r**, se a distância de um ponto **P** qualquer do plano cartesiano a **C** é diferente de **r**, então **P** é externo ou interno à circunferência.

EXEMPLO 5

A circunferência λ: $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 25$, de centro C(3, 1) e raio 5, passa pelo ponto P(−1, −2), pois:

$$(-1 - 3)^2 + (-2 - 1)^2 = 25$$

λ também passa por Q(7, 4), pois:

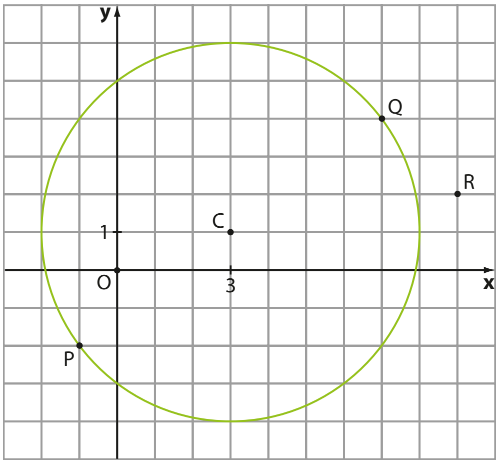
$$(7 - 3)^2 + (4 - 1)^2 = 25$$

Mas λ não passa pela origem **O**, pois:

$$(0 - 3)^2 + (0 - 1)^2 \neq 25$$

O ponto R(9, 2) também não pertence a λ, já que:

$$(9 - 3)^2 + (2 - 1)^2 \neq 25$$



Observe que:

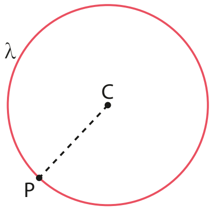
- $d_{OC} = \sqrt{(3 - 0)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{10} < 5 = r$, e **O** é interno a λ.
- $d_{RC} = \sqrt{(9 - 3)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{37} > 5 = r$, e **R** é externo a λ.

Trata-se, portanto, de uma simples comparação de distâncias.

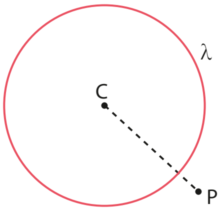
Para uma circunferência λ de centro $C(x_C, y_C)$, raio de medida **r** e um ponto **P** qualquer do plano, distinto de **C**, compararemos d_{PC} com **r**.

Há três possibilidades:

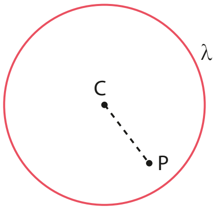
- Se $d_{PC} = r$, então **P** pertence à circunferência.
- Se $d_{PC} > r$, então **P** é externo à circunferência.
- Se $d_{PC} < r$, então **P** é interno à circunferência.



$d_{PC} = r \Rightarrow P \in \lambda$



$d_{PC} > r \Rightarrow$ **P** é externo a λ



$d_{PC} < r \Rightarrow$ **P** é interno a λ

No exemplo 5, em que foi dada a equação reduzida da circunferência, determinamos a posição de um ponto dado em relação à circunferência calculando a distância entre o centro e o ponto em questão e comparando-a com a medida do raio.

De modo geral, dados um ponto $P(x_0, y_0)$ e uma circunferência λ de equação $(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2$, temos:

- $P \in \lambda \Leftrightarrow d^2_{CP} = r^2 \Leftrightarrow (x_0 - x_C)^2 + (y_0 - y_C)^2 = r^2 \Leftrightarrow (x_0 - x_C)^2 + (y_0 - y_C)^2 - r^2 = 0$
- **P** externo a $\lambda \Leftrightarrow d^2_{CP} > r^2 \Leftrightarrow (x_0 - x_C)^2 + (y_0 - y_C)^2 > r^2 \Leftrightarrow (x_0 - x_C)^2 + (y_0 - y_C)^2 - r^2 > 0$
- **P** interno a $\lambda \Leftrightarrow d^2_{CP} < r^2 \Leftrightarrow (x_0 - x_C)^2 + (y_0 - y_C)^2 < r^2 \Leftrightarrow (x_0 - x_C)^2 + (y_0 - y_C)^2 - r^2 < 0$

EXEMPLO 6

Para determinar a posição relativa entre a circunferência de equação $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$ e o ponto P(2, 1), podemos fazer:

$$2^2 + 1^2 - 6 \cdot 2 - 2 \cdot 1 + 6 = -3 < 0$$

concluindo que o ponto **P** é interno à circunferência.

Já o ponto Q(5, 1) pertence à circunferência, pois:

$$5^2 + 1^2 - 6 \cdot 5 - 2 \cdot 1 + 6 = 0$$

E o ponto R(6, 2) é externo a ela, pois:

$$6^2 + 2^2 - 6 \cdot 6 - 2 \cdot 2 + 6 = 6 > 0$$

Resumindo, dados um ponto $P(x_0, y_0)$ e a equação geral $Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$, com $A > 0$ e com todas as condições para que ela represente uma circunferência satisfeitas, basta substituirmos na equação as coordenadas do ponto dado e obtermos o valor numérico $M(x_0, y_0)$ da expressão do primeiro membro da equação.

- Se $M(x_0, y_0) = 0$, então **P** é ponto da circunferência.
- Se $M(x_0, y_0) < 0$, então **P** é interno à circunferência.
- Se $M(x_0, y_0) > 0$, então **P** é externo à circunferência.

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

31 Em relação à circunferência λ: $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$, dê a posição dos pontos A(−2, 2), B(−5, 1), D(−1, 2), E(0, 1) e F(−5, −1).

32 Dê a posição dos pontos A(−1, 2), B(3, 6), O(0, 0), D(−1, −4) e E(3, 0) em relação à circunferência λ: $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$.

33 O ponto (3, −3) pertence à circunferência de equação $x^2 + y^2 - 2x - 4y + k = 0$. Determine o valor de **k**.

34 O ponto (−3, k) pertence à circunferência λ de equação $x^2 + y^2 + 12x + 4y + 15 = 0$.

a) Determine os possíveis valores reais de **k**.

b) Considere o triângulo cujos vértices são o centro de λ e os pontos de abscissa −3 pelos quais passa λ. Qual é a área desse triângulo?

35 Para quais valores reais de **p** o ponto (−3, p) é interno à circunferência de equação geral $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 5 = 0$?

36 Para quais valores reais de **p** o ponto (−1, p) não é interno à circunferência de equação geral $x^2 + y^2 - 7x + 2y - 11 = 0$?

37 Para que valores reais de **m** o ponto (m, 0) é externo à circunferência de equação $x^2 + y^2 - 4x + 5y - 5 = 0$?

38 Considere a circunferência λ que passa por P(−1, 4) e P'(−3, −2), sendo **P'** diametralmente oposto a **P**. Qual é a posição do ponto Q(−2, 4) em relação a λ?

39 Uma circunferência λ de centro $\left(\frac{k}{2}, \frac{k}{2}\right)$, em que $k \in \mathbb{R}^*_+$, tangencia os eixos coordenados, no 1º quadrante.

Determine:

a) a equação reduzida de λ.

b) a posição da origem (0, 0) em relação a λ.

c) a posição do ponto (k, k) em relação a λ.

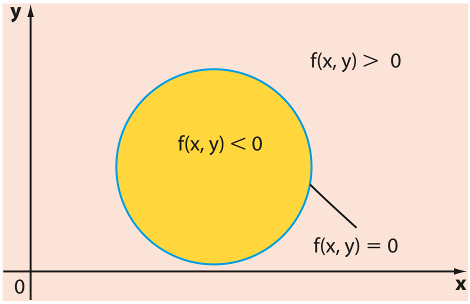
d) a posição do ponto $\left(0, \frac{k}{2}\right)$ em relação a λ.

Inequações do 2º grau com duas incógnitas

Uma aplicação do estudo sobre as posições relativas entre um ponto e uma circunferência é o desenvolvimento de um método para resolver inequações do 2º grau da forma $f(x, y) > 0$ ou $f(x, y) < 0$, em que $f(x, y) = 0$ é a equação de uma circunferência com coeficiente de x^2 positivo.

Dada a circunferência λ de equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, temos: $f(x, y) = (x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2$; o plano cartesiano fica dividido em três subconjuntos:

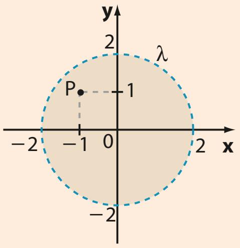
- subconjunto dos pontos (x, y) exteriores a λ, para os quais $(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 > 0$, isto é, satisfazem a desigualdade $f(x, y) > 0$.
- subconjunto dos pontos (x, y) pertencentes a λ, para os quais $(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0$, isto é, satisfazem a igualdade $f(x, y) = 0$.
- subconjunto dos pontos (x, y) interiores a λ, para os quais $(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 < 0$, isto é, satisfazem a desigualdade $f(x, y) < 0$.



Nos exercícios resolvidos a seguir, veremos como resolver graficamente inequações do 2º grau com duas incógnitas.

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

4 Resolva graficamente a inequação $x^2 + y^2 < 4$.



Solução:

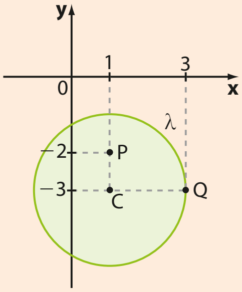
Temos $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4$, e $f(x, y) = 0$ é a equação da circunferência λ de centro $(0, 0)$ e raio 2.

O conjunto de pontos que tornam $f(x, y) < 0$ é o conjunto dos pontos internos a λ.

Veja, por exemplo, o ponto $P(-1, 1)$. Se $x = -1$ e $y = 1$, então $f(x, y) < 0$:

$$f(-1, 1) = (-1)^2 + 1^2 - 4 = -2 < 0$$

5 Qual é a solução gráfica da inequação: $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 \leq 0$?



Solução:

Fazemos:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = (x - 1)^2 - 1 + (y + 3)^2 - 9 + 6 =$$
$$= (x - 1)^2 + (y + 3)^2 - 4$$

Então $f(x, y) = 0$ é a equação da circunferência λ de centro $C(1, -3)$ e raio 2.

O conjunto dos pontos que tornam $f(x, y) \leq 0$ é o conjunto dos pontos interiores a λ, reunidos com os pontos de λ.

Veja, por exemplo, o ponto $P(1, -2)$. Suas coordenadas satisfazem $f(x, y) < 0$:

$$f(1, -2) = 1^2 + (-2)^2 - 2 \cdot 1 + 6 \cdot (-2) + 6 = -3 < 0$$

Já o ponto $Q(3, -3)$ pertence à circunferência, pois, se $x = 3$ e $y = -3$, então $f(x, y) = 0$:

$$f(3, -3) = 3^2 + (-3)^2 - 2 \cdot 3 + 6 \cdot (-3) + 6 = 9 + 9 - 6 - 18 + 6 = 0$$

6 Represente graficamente o conjunto de pontos do plano que satisfazem a desigualdade $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 \geqslant 0$.

Solução:

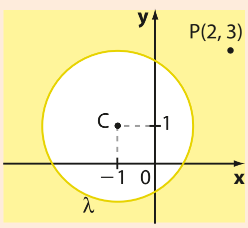
Fazendo:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 =$$
$$= (x + 1)^2 - 1 + (y - 1)^2 - 1 - 2 =$$
$$= (x + 1)^2 + (y - 1)^2 - 4$$

$f(x, y) = 0$ representa a circunferência λ de centro $C(-1, 1)$ e raio 2.

O conjunto solução de $f(x, y) \geqslant 0$ é o conjunto de todos os pontos do plano, exceto os pontos internos a λ. Veja, por exemplo, o ponto $P(2, 3)$. Suas coordenadas satisfazem $f(x, y) > 0$, pois:

$$f(2, 3) = 2^2 + 3^2 + 2 \cdot 2 - 2 \cdot 3 - 2 = 9 > 0$$

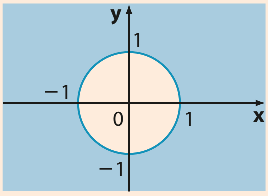


7 Resolva graficamente o sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 \geqslant 1 \\ x^2 + y^2 < 4 \end{cases}$.

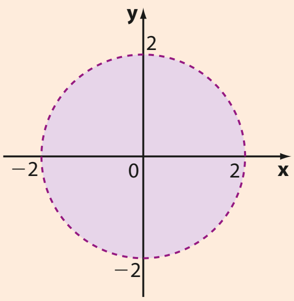
Solução:

O conjunto solução da inequação $x^2 + y^2 - 1 \geqslant 0$ é o conjunto dos pontos do plano cartesiano menos o conjunto dos pontos interiores à circunferência de centro na origem e raio de medida 1.

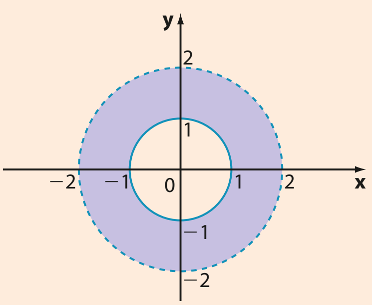
Veja a figura abaixo.



O conjunto solução da inequação $x^2 + y^2 - 4 < 0$ é o conjunto dos pontos internos à circunferência com centro na origem e raio de medida 2. Veja a figura abaixo.



Como as duas inequações devem ser simultaneamente satisfeitas, basta fazer a interseção dos dois conjuntos obtidos. A solução do sistema é a coroa circular colorida da figura abaixo.



EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

40 Resolva graficamente as seguintes inequações:

a) $x^2 + y^2 \leqslant 1$

b) $x^2 + y^2 < 1$

c) $x^2 + y^2 \geqslant 1$

d) $x^2 + y^2 > 1$

41 Resolva graficamente as inequações:

a) $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 > 0$

b) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 \leqslant 0$

c) $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 \leqslant 0$

d) $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 > 0$

42 Resolva graficamente os sistemas de inequações:

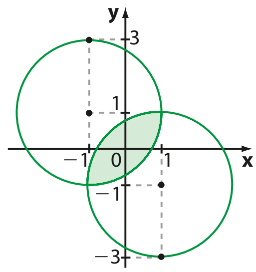
a) $\begin{cases} x^2 + y^2 > 4 \\ x^2 + y^2 \leqslant 9 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x^2 + y^2 \geqslant 2 \\ x^2 + y^2 < 4 \end{cases}$

43 Apresente a solução gráfica do sistema:

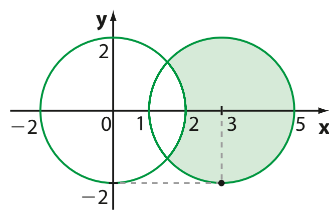
$$\begin{cases} (x - 1)^2 + y^2 < 4 \\ x^2 + (y - 1)^2 \geqslant 4 \end{cases}$$

44 Em cada caso, caracterize, por meio de duas desigualdades, o conjunto sombreado:

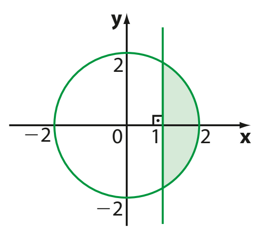
a)



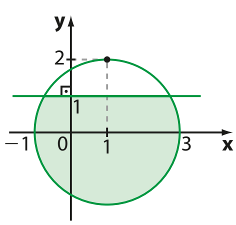
b)



c)



d)



45 Resolva graficamente o sistema:

$$\begin{cases} 3x - y - 2 \leqslant 0 \\ x^2 + y^2 \leqslant 1 \end{cases}$$

46 Em cada item, represente, no plano cartesiano, a região de pontos **P** cujas coordenadas (x, y) satisfazem as condições dadas; em seguida, determine a área da região:

a) $x + y \leqslant 2$ e $x^2 + y^2 \leqslant 4$

b) $x + y \geqslant 2$ e $x^2 + y^2 \leqslant 4$

47 Representando a região central de um pequeno município em um sistema de coordenadas cartesianas, em que a unidade de medida de comprimento é o quilômetro, é possível localizar alguns pontos de referência da cidade por meio de suas coordenadas:

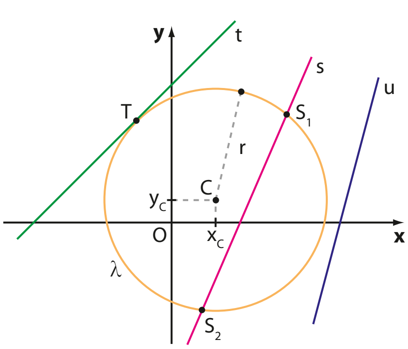
praça central: (0, 0); escola municipal: (−4, 0); posto de saúde: (0, −6).

O prefeito pretende construir um edifício residencial para suprir a carência habitacional do município. Esse edifício deve ser equidistante da escola e do posto de saúde.

Estudos preliminares feitos por técnicos de engenharia mostram que seria possível construir esse edifício em um ponto cuja distância à praça central poderia variar de 2 quilômetros, no mínimo, a 4 quilômetros, no máximo.

Caso o parecer dos técnicos seja confirmado, represente, nesse sistema de coordenadas, o conjunto de pontos que satisfazem, simultaneamente, a intenção do prefeito e o parecer, ou seja, o conjunto de pontos onde seria possível construir o edifício. Não se esqueça de fornecer as equações das retas e circunferências envolvidas.

Posição relativa de reta e circunferência



Seja uma circunferência λ de centro $C(x_C, y_C)$ e raio **r**. No plano existem retas que intersectam a circunferência em dois pontos, retas que tocam a circunferência em apenas um ponto e outras que não intersectam a circunferência em ponto algum.

Essas retas são chamadas, respectivamente, **secantes**, **tangentes** e **externas à circunferência**.

Na figura:

- $s \cap \lambda = \{S_1, S_2\}$, e **s** é secante à circunferência.
- $t \cap \lambda = \{T\}$, e **t** é tangente à circunferência.
- $u \cap \lambda = \varnothing$, e **u** é externa à circunferência.

Vejamos, por meio de exercícios resolvidos, como analisar essas posições relativas, baseando-se na determinação da quantidade de pontos comuns à reta e à circunferência.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

8 Qual é a posição relativa de r: $x - y + 4 = 0$ e λ: $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$?

Solução:

Vamos verificar se existem pontos de interseção entre elas.

Inicialmente, podemos isolar **y** na equação de **r**, obtendo $y = x + 4$.

Substituindo esse valor na equação da circunferência, temos:

$$x^2 + (x + 4)^2 - 2x - 4(x + 4) - 4 = 0 \Rightarrow x^2 + x^2 + 8x + 16 - 2x - 4x - 16 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

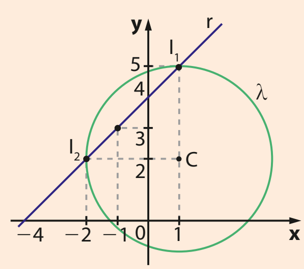
Calculando o discriminante da equação $\Delta = 1 + 8 = 9$, vemos que ela possui duas raízes reais e distintas. Cada uma delas é a abscissa de um ponto de interseção entre **r** e λ. Assim, a reta é secante à circunferência.

Temos, então:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = x + 4 = 1 + 4 = 5 \\ \quad\text{ou} \\ x = -2 \Rightarrow y = x + 4 = -2 + 4 = 2 \end{cases}$$

Assim, $I_1(1,\ 5)$ e $I_2(-2,\ 2)$ são os pontos de interseção entre **r** e λ.

A representação gráfica abaixo confirma a resolução algébrica apresentada.



PENSE NISTO:

Qual é o comprimento da corda que **r** determina em $\boldsymbol{\lambda}$?

9 Qual é a posição relativa de r: $2x + y + 2 = 0$ e λ: $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 5$?

Solução:

No estudo da posição relativa entre a reta **r** e a circunferência λ podemos repetir o raciocínio do exercício resolvido 8.

Isolamos **y** na equação da reta, $y = -2x - 2$, e substituímos na equação de λ:

$$(x - 1)^2 + (-2x - 2 - 1)^2 = 5$$
$$(x - 1)^2 + (-2x - 3)^2 = 5$$
$$x^2 - 2x + 1 + 4x^2 + 12x + 9 = 5$$
$$x^2 + 2x + 1 = 0, \text{ com } \Delta = 4 - 4 = 0$$

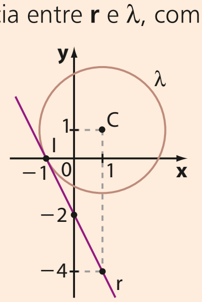
A equação possui apenas uma raiz real, que é a abscissa do único ponto comum a **r** e λ. Assim, a reta é tangente à circunferência.

Temos, então:

$$x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2}{2} = -1$$

Assim, $y = -2x - 2 = -2(-1) - 2 = 0$.

Logo, $I(-1,\ 0)$ é o ponto de tangência entre **r** e λ, como mostra o gráfico abaixo.



PENSE NISTO:

Qual é a medida do ângulo que **r** forma com $\overleftrightarrow{CI}$?

10 Qual é a posição relativa de r: $x - y - 3 = 0$ e λ: $x^2 + (y - 1)^2 = 4$?

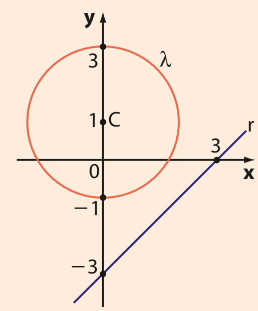
Solução:

Para estudar a posição relativa entre elas, podemos isolar **y** na equação da reta e substituir esse valor na equação da circunferência, chegando a uma equação do 2º grau.

Substituindo $y = x - 3$, temos:

$$x^2 + (x - 3 - 1)^2 = 4$$
$$x^2 + (x - 4)^2 = 4$$
$$x^2 + x^2 - 8x + 16 - 4 = 0$$
$$x^2 - 4x + 6 = 0$$

Essa equação, por possuir discriminante negativo ($\Delta = -8 < 0$), não possui raízes reais. Assim, não há pontos de interseção entre **r** e λ, ou seja, a reta é externa à circunferência, como mostra o gráfico ao lado.



O quadro a seguir apresenta um resumo de como obter a posição relativa entre uma reta e uma circunferência.

Se substituirmos o valor de uma das variáveis (isolada na equação da reta) na equação da circunferência, obteremos uma equação do 2º grau (na outra variável).

Calculando o discriminante da equação obtida, poderemos ter:

- $\Delta > 0 \Rightarrow$ a reta e a circunferência são secantes (há dois pontos de interseção).
- $\Delta = 0 \Rightarrow$ a reta e a circunferência são tangentes (há um único ponto de interseção).
- $\Delta < 0 \Rightarrow$ a reta é externa à circunferência (não há ponto de interseção).

Para encontrar os eventuais pontos comuns, basta prosseguir na resolução da equação.

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

48 Em cada caso, dê a posição relativa entre **r** e λ:

a) r: $x - y = 0$ e λ: $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$

b) r: $x - y + 1 = 0$ e λ: $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$

c) r: $x + y - 2 = 0$ e λ: $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 6 = 0$

d) r: $2x - y - 1 = 0$ e λ: $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 16$

49 Em cada caso, obtenha, se existir, os pontos de interseção entre a reta **r** e a circunferência λ:

a) r: $3x + 4y - 35 = 0$ e λ: $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$

b) r: $y = -\frac{x}{2} + \frac{3}{2}$ e λ: $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$

c) r: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \end{cases}$ e λ: $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 24 = 0$, em que $t \in \mathbb{R}$.

50 Sabendo que a reta **r** passa por (1, 0), verifique a posição de **r** em relação à circunferência de equação $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$.

51 Determine os valores reais de **p** para que a reta de equação $2x - y + p = 0$ seja tangente à circunferência de equação $x^2 + y^2 - 4 = 0$.

52 Determine os valores reais de **k** de modo que a reta de equação $x + y + k = 0$ em relação à circunferência de equação $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 5 = 0$ seja:

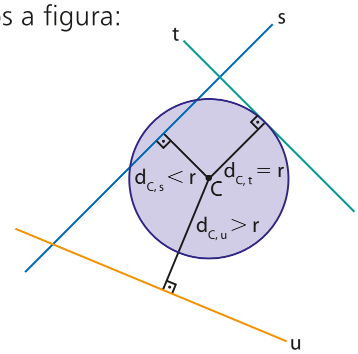
a) tangente; **b)** secante; **c)** externa.

53 Qual é o comprimento da corda cujas extremidades são os pontos de interseção de r: $2x - y = 0$ com λ: $x^2 + y^2 = 4$?

Método alternativo

Existe outro processo, geralmente menos trabalhoso, para determinar a posição relativa de uma reta e uma circunferência. Por meio desse processo, uma vez conhecidos o centro e a medida do raio da circunferência, bem como a equação da reta, calcula-se a distância entre o centro da circunferência e a reta, comparando-a, em seguida, com a medida do raio.

Observemos a figura:



- $d_{C,s} < r \Leftrightarrow$ **s** é secante a λ.
- $d_{C,t} = r \Leftrightarrow$ **t** é tangente a λ.
- $d_{C,u} > r \Leftrightarrow$ **u** é externa a λ.

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

11 Seja a circunferência λ: $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 20$.

Dadas as retas f: $4x + 3y - 36 = 0$, g: $3x - y + 5 = 0$ e h: $x + y + 5 = 0$, verifique suas posições em relação a λ, calculando a distância entre cada uma delas e o centro **C** de λ.

Solução:

Completando os quadrados da equação da circunferência λ, encontramos C(2, 1) e r = 5.

- Quanto à reta **f**:

$$d_1 = d_{C,\,f} = \frac{|4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 - 36|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{25}{5} = 5 = r$$

f é tangente à circunferência.

- Quanto à reta **g**:

$$d_2 = d_{C,\,g} = \frac{|3 \cdot 2 - 1 \cdot 1 + 5|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} < 5 = r$$

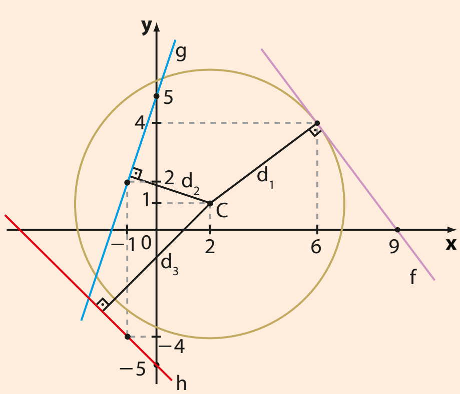
g é secante à circunferência.

- Quanto à reta **h**:

$$d_3 = d_{C,\,h} = \frac{|1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} > 5 = r$$

h é externa à circunferência.

Observe no gráfico abaixo a posição da circunferência e das três retas:



$$\lambda: \begin{cases} C(2, 1) \\ r = 5 \end{cases}$$

f:

x	y
6	4
9	0

g:

x	y
0	5
−1	2

h:

x	y
0	−5
−1	−4

12 Seja o feixe de retas paralelas dado por r: $2x + y + c = 0$, $c \in \mathbb{R}$, e a circunferência λ: $x^2 + y^2 - 2x - 10y + 21 = 0$ (centro $C(1, 5)$ e raio de medida $\sqrt{5}$). Discuta, em função de **c**, a posição relativa de **r** e λ.

Solução:

Conforme os valores de **c**, as retas do feixe assumem diferentes posições em relação à circunferência.

Vamos calcular a distância **d** do centro **C** a uma reta genérica do feixe:

$$d = \frac{|2 \cdot 1 + 1 \cdot 5 + c|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|7 + c|}{\sqrt{5}}$$

Há três possibilidades comparando-se essa distância com a medida do raio $(\sqrt{5})$ de λ:

- Para que a reta seja tangente à circunferência:

$$\frac{|7 + c|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \Rightarrow |7 + c| = 5 \Rightarrow 7 + c = \pm 5 \Rightarrow c = -2 \text{ ou } c = -12$$

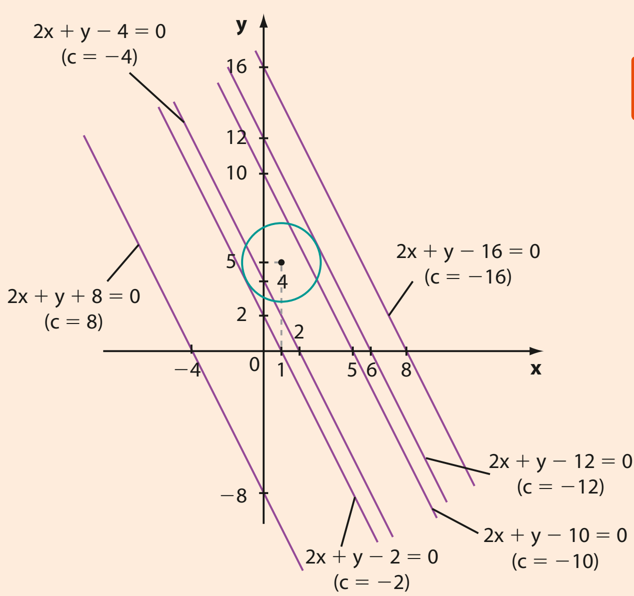
- Para que a reta seja secante à circunferência:

$$\frac{|7 + c|}{\sqrt{5}} < \sqrt{5} \Rightarrow |7 + c| < 5 \Rightarrow -5 < 7 + c < 5 \Rightarrow -12 < c < -2$$

- Para que a reta seja externa à circunferência:

$$\frac{|7 + c|}{\sqrt{5}} > \sqrt{5} \Rightarrow |7 + c| > 5 \Rightarrow \begin{cases} 7 + c > 5 \Rightarrow c > -2 \quad \text{ou} \\ 7 + c < -5 \Rightarrow c < -12 \end{cases}$$

Para alguns valores escolhidos para **c**, veja as posições das retas do feixe e da circunferência:



PENSE NISTO:

Se $a \in \mathbb{R}_+^*$, qual é o conjunto-solução da inequação $|x| < a$? E $|x| > a$?

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

54 Em cada caso, por meio do cálculo da distância entre o centro da circunferência λ e a reta **r**, apresente a posição de **r** em relação a λ:

a) r: $x + 2y + 3 = 0$ e λ: $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 7 = 0$

b) r: $x - 2y - 3 = 0$ e λ: $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$

c) r: $3x + y - 4 = 0$ e λ: $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 10$

d) r: $4x - 3y - 24 = 0$ e λ: $x^2 + y^2 - 24x + 4y + 99 = 0$

e) r: $x - 2 = 0$ e λ: $4x^2 + 4y^2 - 25 = 0$

55 Em cada caso, determine o comprimento da corda determinada pela reta **r** sobre a circunferência λ:

a) r: $x + y - 5 = 0$ e λ: $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$

b) r: $3x - y = 0$ e λ: $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$

56 Determine os valores reais de **k** de modo que a reta r: $3x - 4y - 18 = 0$ em relação à circunferência λ: $x^2 + y^2 - 2x + k = 0$ seja:

a) tangente; **b)** externa; **c)** secante.

57 A reta de equação $2x + 3y - 1 = 0$ passa pelo centro da circunferência de equação $(x + m)^2 + (y - 1)^2 = 200$. Encontre o valor real de **m** e a medida do diâmetro da circunferência.

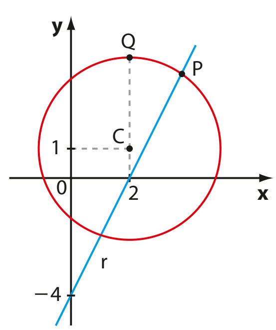
58 Determine o ponto de λ: $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 9$ mais próximo da reta r: $x + y + 11 = 0$.

59 Determine as equações das retas paralelas ao eixo das abscissas e tangentes à circunferência de equação $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 16$.

60 Sejam **r** a reta de equação $y = x + 2$ e λ a circunferência de equação $x^2 + y^2 - 4x - 2y + a = 0$, em que **a** é uma constante real. Determine o maior valor de **a** de modo que ocorra interseção entre **r** e λ.

61 Obtenha a equação geral da circunferência de centro (1, 2) que tangencia a reta de equação $5x + 12y + 10 = 0$.

62 Na figura abaixo, sabe-se que Q(2, 5) é o ponto de ordenada máxima da circunferência de centro **C**.



a) Determine a soma das coordenadas de **P**.

b) Obtenha as equações das retas paralelas a **r** e tangentes a essa circunferência.

63 Dê o valor de $\mathbf{k} \in \mathbb{R}$ para que a equação $x^2 + y^2 + 5x + 4y + k = 0$ seja a equação de uma circunferência e determine no eixo das abscissas uma corda de comprimento 3.

64 Determine as equações das retas tangentes a λ: $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$ que são:

a) horizontais;

b) verticais;

c) perpendiculares a r: $3x - 4y = 0$.

65 Qual é a distância entre as retas tangentes à circunferência λ: $4x^2 + 4y^2 - 4x - 20y - 15 = 0$ que são paralelas a r: $6x - 8y + 15 = 0$?

66 Determine a equação reduzida da circunferência que passa por (3, 0) e (5, 0) e é tangente à reta de equação $y + 10 = 0$.

67 Encontre as equações das retas que tangenciam a circunferência $x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0$ e formam ângulo de 60° com o eixo das abscissas, no seu sentido positivo.

68 Seja $\boldsymbol{\lambda}$ uma circunferência com centro sobre a reta $y = 3x$. Sendo $\boldsymbol{\lambda}$ tangente à reta de equação $y = x$ no ponto de ordenada 4, determine a equação de $\boldsymbol{\lambda}$.

Interseção de circunferências

Dadas duas circunferências λ_1 e λ_2, achar a interseção de λ_1 com λ_2 é determinar os pontos P(x, y) que pertencem a ambas as curvas e que, portanto, satisfazem ao sistema formado por suas equações.

Por meio de exercícios resolvidos mostraremos como fazer isso.

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

13 Obtenha a interseção das circunferências λ_1: $x^2 + (y - 2)^2 = 4$ e λ_2: $(x - 1)^2 + y^2 = 1$.

Solução:

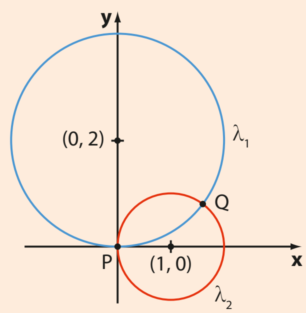
Vamos resolver o sistema: $\begin{cases} x^2 + (y-2)^2 = 4 & (1) \\ (x-1)^2 + y^2 = 1 & (2) \end{cases}$

Subtraindo, membro a membro, (2) de (1), obtemos: $-4y + 2x = 0$ e, daí: $x = 2y$ (3).

Substituindo (3) em (1), resulta:

$$(2y)^2 + (y-2)^2 = 4 \Rightarrow 5y^2 - 4y = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \Rightarrow x = 0 \\ \text{ou} \\ y = \dfrac{4}{5} \Rightarrow x = \dfrac{8}{5} \end{cases}$$

Concluímos que as circunferências têm dois pontos em comum: P(0, 0) e $Q\left(\dfrac{8}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$.



$$\lambda_1 \cap \lambda_2 = \left\{(0, 0), \left(\dfrac{8}{5}, \dfrac{4}{5}\right)\right\}$$

14 Obtenha a interseção das circunferências λ_1: $x^2 + y^2 = 49$ e λ_2: $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$.

Solução:

Vamos resolver o sistema: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 49 & (1) \\ x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0 & (2) \end{cases}$

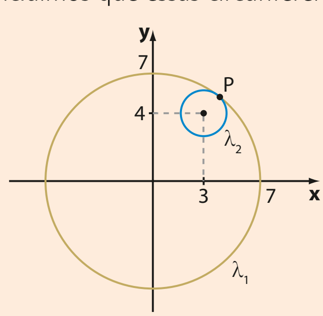
Subtraindo, membro a membro, (2) de (1), obtemos:

$$6x + 8y - 21 = 49 \Rightarrow x = \dfrac{70 - 8y}{6} \quad (3)$$

Substituindo (3) em (1), resulta:

$$\left(\dfrac{70 - 8y}{6}\right)^2 + y^2 = 49 \Rightarrow 100y^2 - 1\,120y + 3\,136 = 0 \Rightarrow (10y - 56)^2 = 0 \Rightarrow y = \dfrac{28}{5} \Rightarrow x = \dfrac{21}{5}$$

Concluímos que essas circunferências têm um único ponto comum: $P\left(\dfrac{21}{5}, \dfrac{28}{5}\right)$.



$$\lambda_1 \cap \lambda_2 = \left\{\left(\dfrac{21}{5}, \dfrac{28}{5}\right)\right\}$$

PENSE NISTO:

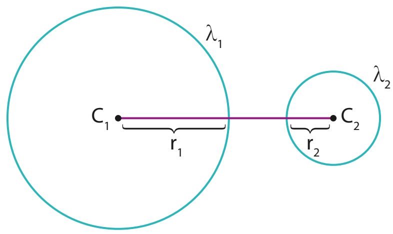
Qual é a área da região interna a λ_1 e externa a λ_2?

Posições relativas de duas circunferências

A posição relativa das circunferências λ_1(com centro $\mathbf{C_1}$ e raio de medida $\mathbf{r_1}$) e λ_2 (com centro $\mathbf{C_2}$ e raio de medida $\mathbf{r_2}$) pode ser determinada comparando-se a distância C_1C_2 entre os centros com a soma $r_1 + r_2$ ou com o módulo da diferença $|r_1 - r_2|$ das medidas dos raios.

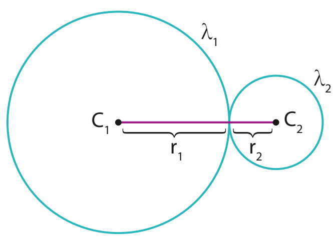
De acordo com a Geometria Plana, são possíveis cinco casos distintos:

- **1º caso:** $\boldsymbol{\lambda_1}$ e $\boldsymbol{\lambda_2}$ exteriores



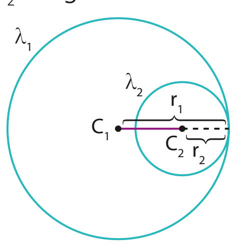
$C_1C_2 > r_1 + r_2$

- **2º caso:** $\boldsymbol{\lambda_1}$ e $\boldsymbol{\lambda_2}$ tangentes exteriores



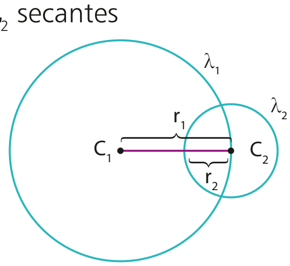
$C_1C_2 = r_1 + r_2$

- **3º caso:** $\boldsymbol{\lambda_1}$ e $\boldsymbol{\lambda_2}$ tangentes interiores



$C_1C_2 = |r_1 - r_2|$

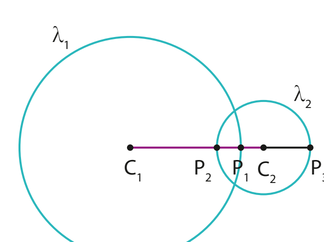
- **4º caso:** $\boldsymbol{\lambda_1}$ e $\boldsymbol{\lambda_2}$ secantes



$|r_1 - r_2| < C_1C_2 < r_1 + r_2$

Justificativa

Considere $r_1 > r_2$ e $\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_2}$ e $\mathbf{P_3}$ pontos de $\overleftrightarrow{C_1C_2}$, tais que $P_1 \in \boldsymbol{\lambda_1}$ e é interno à $\boldsymbol{\lambda_2}$, $P_2 \in \boldsymbol{\lambda_2}$ e é interno à $\boldsymbol{\lambda_1}$ e $P_3 \in \boldsymbol{\lambda_2}$ e é externo à $\boldsymbol{\lambda_1}$. Temos:



$C_1C_2 = C_1P_1 + C_2P_2 - P_1P_2 = r_1 + r_2 - P_1P_2$

Como $P_1P_2 > 0$, segue que: $C_1C_2 < r_1 + r_2$ (1)

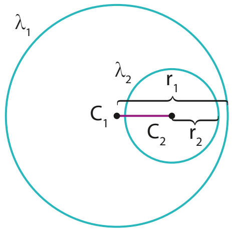
$C_1C_2 = C_1P_1 + P_1P_3 - C_2P_3 = r_1 + P_1P_3 - r_2$

Como $P_1P_3 > 0$, segue que: $C_1C_2 > r_1 - r_2$ (2)

De 1 e 2, temos que $r_1 - r_2 < C_1C_2 < r_1 + r_2$.
Podemos ter também $r_1 < r_2$ e, para esse caso, obter $r_2 - r_1 < C_1C_2 < r_1 + r_2$.
Assim, consideramos o módulo da diferença entre as medidas dos raios e podemos escrever:

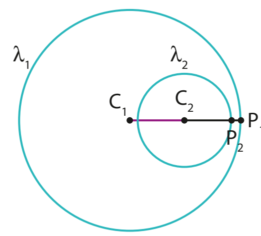
$$|r_1 - r_2| < C_1C_2 < r_1 + r_2$$

- **5º caso: λ_1** e **λ_2** uma interna à outra



$$0 \leqslant C_1C_2 < |r_1 - r_2|$$

Justificativa
Considere $r_1 > r_2$, λ_2 interna a λ_1, e P_1 e P_2 pontos de $\overleftrightarrow{C_1C_2}$, tais que $P_1 \in \lambda_1$, $P_2 \in \lambda_2$, C_2 está entre P_1 e C_1 e P_2 está entre P_1 e C_2.



Temos:
$C_1C_2 = C_1P_1 - C_2P_2 - P_1P_2$
$C_1C_2 = r_1 - r_2 - P_1P_2$
Como $P_1P_2 > 0$, temos que $C_1C_2 < r_1 - r_2$.
Também podemos ter λ_1 interna a λ_2, obtendo $C_1C_2 < r_2 - r_1$.
Assim, consideramos o módulo da diferença entre as medidas dos raios e podemos escrever:

$$0 \leqslant C_1C_2 < |r_1 - r_2|$$

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

15 Qual é a posição das circunferências λ_1: $x^2 + y^2 = 49$ e λ_2: $x^2 + y^2 - 6x - 8y - 11 = 0$?

Solução:

λ_1 tem centro $C_1(0, 0)$ e raio de medida $r_1 = 7$ e λ_2 tem centro $C_2(3, 4)$ e raio de medida $r_2 = 6$.

$$C_1C_2 = \sqrt{(0 - 3)^2 + (0 - 4)^2} = 5$$

Comparemos C_1C_2 com a soma das medidas dos raios: $C_1C_2 = 5$ e $r_1 + r_2 = 13$. Notamos que $C_1C_2 < r_1 + r_2$ e concluímos que λ_1 e λ_2 não podem ser exteriores, nem tangentes exteriormente.

Comparemos C_1C_2 com o módulo da diferença das medidas dos raios:

$$C_1C_2 = 5 \quad \text{e} \quad |r_1 - r_2| = 1$$

Notamos que $C_1C_2 > |r_1 - r_2|$ e concluímos que λ_1 e λ_2 não podem ser uma interna à outra, nem tangentes interiormente. Então, por exclusão, λ_1 e λ_2 são secantes.

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

69 Obtenha os pontos de interseção das circunferências λ_1: $x^2 + y^2 = 100$ e λ_2: $x^2 + y^2 - 12x - 12y + 68 = 0$.

70 Dadas as circunferências λ_1: $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ e λ_2: $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$, determine seus pontos de interseção.

71 Determine, em cada caso, a posição relativa de λ_1 e λ_2.

a) λ_1: $x^2 + y^2 = 16$ e λ_2: $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0$

b) λ_1: $x^2 + y^2 = 18$ e λ_2: $x^2 + y^2 + 20x - 10y + 124 = 0$

c) λ_1: $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 12 = 0$ e λ_2: $x^2 + y^2 + 4x - 12y + 24 = 0$

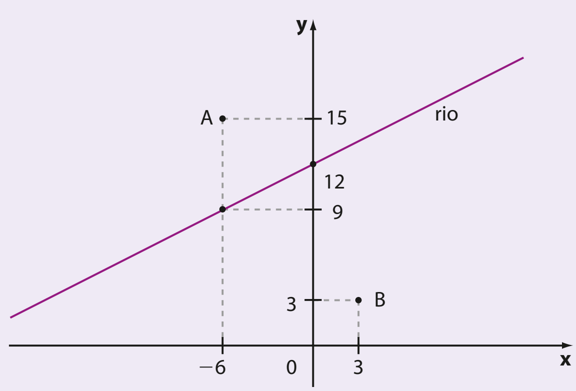
d) λ_1: $x^2 + y^2 = 81$ e λ_2: $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 9 = 0$

72 Obtenha as equações das circunferências de centro C(2, −1) e tangentes à seguinte circunferência:

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$$

DESAFIO

Em um treinamento militar, um míssil será lançado de uma base **B** para atingir o alvo **A**. Um extenso rio retilíneo separa a região em que se encontra a base **B** da região onde está o alvo **A**. A figura a seguir ilustra essa situação em um plano cartesiano representado na escala 1 : 20 000. A unidade de medida de comprimento é o metro.



a) Qual é a distância real entre a base **B** e o alvo **A**?

b) Sabendo que os efeitos de destruição do míssil podem ser sentidos até 200 quilômetros do alvo, qual é a relação que deve ser satisfeita pelas coordenadas de um ponto P(x, y) desse plano para que esses efeitos sejam sentidos em **P**?

c) Qual é a área da região afetada pelo míssil representada nesse sistema cartesiano?

d) No plano cartesiano, o rio pode ser representado pela reta que passa pelos pontos (−6, 9) e (0, 12). Qual é o ponto desse rio mais próximo do alvo? A que distância real do alvo ele se encontra?

Considere $\sqrt{5} \simeq 2{,}24$ e indique o número inteiro mais próximo.