CAPÍTULO 7

Números complexos

UM POUCO DE **HISTÓRIA**

Introdução aos números complexos

Os números complexos são usualmente apresentados a partir de uma equação do 2º grau. Por exemplo, quando resolvemos a equação $x^2 + 2x + 5 = 0$, utilizando a usual fórmula resolutiva, encontramos:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

Para determinar o valor de **x** é preciso calcular a raiz quadrada de -16, o que, em $\mathbb{R}$, é impossível, pois não existe um número real **m** tal que $m^2 = -16$. Daí a necessidade de um novo conjunto numérico para se obter a solução para esse tipo de problema.

Primeiro objeto de uma construção abstrata, presente nos vários domínios da Matemática, os **números complexos** foram um grande desafio imposto aos matemáticos.

Como justificar sua existência e constituição?

Das tentativas de responder a essa questão nasceram novos conceitos algébricos e novas teorias, produzindo um grande desenvolvimento das pesquisas matemáticas.

Um primeiro avanço importante foi dado por Girolamo Cardano (1501-1576) ao tentar resolver o seguinte problema: "Dividir um segmento de comprimento 10 em duas partes cujo produto seja 40".

Chamando de **x** e $10 - x$ as partes procuradas, Cardano montou a seguinte equação:

$$x \cdot (10 - x) = 40 \Rightarrow x^2 - 10x + 40 = 0 \Rightarrow x = 5 \pm \sqrt{-15}$$

e, como $\sqrt{-15}$ não é um número real, para Cardano tal problema não teria solução.

Entretanto, ele trabalhou com os resultados obtidos, ou seja, com $x = 5 + \sqrt{-15}$ e $10 - x = 5 - \sqrt{-15}$, constatando que:

$$\begin{cases} \left(5 + \sqrt{-15}\right) + \left(5 - \sqrt{-15}\right) = 10 \\ \text{e} \\ \left(5 + \sqrt{-15}\right) \cdot \left(5 - \sqrt{-15}\right) = 40 \end{cases}$$

Então, mesmo desconhecendo o significado dos números que havia obtido, Cardano pôde concluir que $5 + \sqrt{-15}$ e $5 - \sqrt{-15}$ eram soluções da equação.

Anos depois, o matemático Rafael Bombelli (1526-1572), ao aplicar a fórmula de Cardano para a resolução de equações do 3º grau, obteve para a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$ a solução $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ (*).

Como sabia que 4 era uma raiz dessa equação, pois a sentença $4^3 - 15 \cdot 4 - 4 = 0$ é verdadeira, Bombelli concluiu que essa raiz poderia ser obtida pela fórmula (*), desde que se calculasse $\sqrt{-121}$.

Esse foi o mais importante passo para que fosse admitida a existência de um número da forma $a + \sqrt{-b}$, em que $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}_+^*$.

Responsáveis pela legitimação de toda teoria estudada nos dias de hoje, Johan Carl Friedrich Gauss (1777-1855) e Jean Robert Argand (1768-1822) foram os primeiros matemáticos a terem uma ideia mais clara sobre os chamados números imaginários e a perceber as vantagens que os matemáticos do século XIX poderiam obter através do aprendizado de sua representação geométrica.

De fato, o reconhecimento desses números, com base nos estudos de Gauss, propiciou o desenvolvimento de várias teorias matemáticas. Eles foram universalmente adotados por volta de 1830.

Em 1835, o matemático irlandês William R. Hamilton (1805-1866) elaborou uma teoria aritmética dos números complexos, a qual consistia em considerá-los como pares ordenados de números reais e em definir a soma e o produto de tais pares da maneira mostrada a seguir.

O matemático alemão Gauss também trabalhou em áreas como Geometria, Astronomia e Óptica. Pintura de Jensen, 1840.

Fontes de pesquisa: BOYER, Carl B. *História da Matemática*. 3ª ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2010; GARBI, G. *O romance das equações algébricas*. 2ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2006.

Conjunto dos números complexos

Chama-se **conjunto dos números complexos** o conjunto $\mathbb{C}$ de todos os pares ordenados de números reais para os quais valem as seguintes definições:

$$
\begin{array}{lrl}
\text{(I)} & \text{Igualdade:} & (a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \ \text{ e } \ b = d \\
\text{(A)} & \text{Adição:} & (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \\
\text{(M)} & \text{Multiplicação:} & (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)
\end{array}
$$

Assim, $z \in \mathbb{C}$, temos que $z = (a, b)$, em que $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$.

EXEMPLO 1

Dados os números complexos $z_1 = (x - 1, y + 2)$ e $z_2 = (-4, 3)$, vamos determinar os números reais **x** e **y** para que se tenha $z_1 = z_2$.

Pela definição (I), temos:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow (x - 1, y + 2) = (-4, 3) \underset{\text{(I)}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x - 1 = -4 \\ \quad \text{e} \\ y + 2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = -3 \text{ e } y = 1$$

EXEMPLO 2

Dados os números complexos $z_1 = (2, 4)$ e $z_2 = (3, -1)$, determinemos os complexos **v** e **w**, tais que $v = z_1 + z_2$ e $w = z_1 \cdot z_2$.

$$v = z_1 + z_2 = (2, 4) + (3, -1) \underset{\text{(A)}}{=} (2 + 3, 4 + (-1)) \Rightarrow v = (5, 3)$$

$$w = z_1 \cdot z_2 = (2, 4) \cdot (3, -1) \underset{\text{(M)}}{=}$$

$$\underset{\text{(M)}}{=} (2 \cdot 3 - 4 \cdot (-1), 2 \cdot (-1) + 4 \cdot 3) \Rightarrow w = (10, 10)$$

EXEMPLO 3

Dados os números complexos $z_1 = (1, 2)$ e $z_2 = (3, 4)$, em cada caso vamos determinar o complexo **z** que satisfaz a condição indicada:

a) $z_2 + z = z_1$

Fazendo $z = (x, y)$, em que $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$, temos:

$$z_2 + z = z_1 \Rightarrow (3, 4) + (x, y) = (1, 2) \underset{(A)}{\Rightarrow} (3 + x, 4 + y) = (1, 2) \underset{(I)}{\Rightarrow}$$

$$\underset{(I)}{\Rightarrow} \begin{cases} 3 + x = 1 \\ 4 + y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - 3 = -2 \\ y = 2 - 4 = -2 \end{cases}$$

Como $z = (x, y)$, então $z = (-2, -2)$.

Note que, dados os números complexos $z_1 = (a, b)$ e $z_2 = (c, d)$, ao determinarmos o número complexo $z = (x, y)$ que satisfaz a condição $z_2 + z = z_1$, estamos calculando a diferença entre $\mathbf{z}_1$ e $\mathbf{z}_2$, que é indicada por $z_1 - z_2$.

Assim: $z_1 - z_2 = z \Rightarrow (a, b) - (c, d) = (a - c, b - d)$

b) $z_2 \cdot z = z_1$

Fazendo $z = (x, y)$, em que $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$, temos:

$$z_2 \cdot z = z_1 \Rightarrow (3, 4) \cdot (x, y) = (1, 2) \underset{(M)}{\Rightarrow} (3x - 4y, 3y + 4x) = (1, 2) \underset{(I)}{\Rightarrow}$$

$$\underset{(I)}{\Rightarrow} \begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ 3y + 4x = 2 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{11}{25} \text{ e } y = \frac{2}{25}$$

Como $z = (x, y)$, então $z = \left(\frac{11}{25}, \frac{2}{25}\right)$.

Note que, dados os números complexos $z_1 = (a, b)$ e $z_2 = (c, d) \neq (0, 0)$, ao determinarmos o número complexo $z = (x, y)$, que satisfaz a condição $z_2 \cdot z = z_1$, estamos calculando o quociente entre $\mathbf{z}_1$ e $\mathbf{z}_2$, que é indicado por $\frac{z_1}{z_2}$.

Examinemos o comportamento dos números complexos da forma $z = (x, 0)$, em que $x \in \mathbb{R}$, relativamente às definições de igualdade, adição e multiplicação:

(I) $(x, 0) = (y, 0) \Leftrightarrow x = y$

(A) $(x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0 + 0) = (x + y, 0)$

(M) $(x, 0) \cdot (y, 0) = (x \cdot y - 0 \cdot 0, x \cdot 0 + 0 \cdot y) = (x \cdot y, 0)$

Notamos que, relativamente às operações de adição e multiplicação, esses números se "comportam" como números reais, como mostram os exemplos:

$$(3, 0) + (5, 0) = (3 + 5, 0 + 0) = (8, 0) \quad \text{e} \quad 3 + 5 = 8$$

$$(3, 0) \cdot (5, 0) = (3 \cdot 5 - 0 \cdot 0, 3 \cdot 0 + 0 \cdot 5) = (15, 0) \quad \text{e} \quad 3 \cdot 5 = 15$$

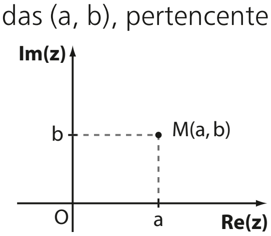
Esse fato permite que se faça a identidade $(x, 0) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, ou seja, todo número real **x** é um número complexo da forma $(x, 0)$.

Em particular, o número complexo $(1, 0) = 1$ é chamado **unidade real**.

Como um número complexo é um par ordenado de números reais, então podemos dizer que existe uma correspondência biunívoca entre os elementos do conjunto $\mathbb{C}$ e o conjunto dos pontos de um plano, isto é, a cada número complexo $z = (a, b)$ corresponde um único ponto **M**, de coordenadas (a, b), pertencente a um plano e reciprocamente.

Chamaremos esse ponto **M** de **imagem** ou **afixo** do número complexo **z**.

O plano ao qual **M** pertence é chamado **Plano de Argand-Gauss**, ou **Plano de Gauss**, e é determinado por dois eixos perpendiculares, denominados eixo real (Re(z)) e eixo imaginário (Im(z)), conforme é mostrado na figura ao lado.



Assim sendo, as imagens dos números complexos da forma (x, 0) pertencem ao eixo Re(z) e as imagens dos números complexos da forma (0, y) pertencem ao eixo Im(z).

Os números complexos da forma (0, y) são chamados **imaginários puros**.

Em particular, chama-se **unidade imaginária** o número complexo i = (0, 1).

Note que: $i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) \Rightarrow \mathbf{i^2 = -1}$

Vamos estabelecer uma regra prática para o cálculo de i^n, em que $i \in \mathbb{N}$.

Calculemos, por recorrência, o valor de algumas potências naturais de **i**:

$$\begin{array}{llll}
i^0 = 1 & i^1 = i & i^2 = -1 & i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i \\
i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1 & i^5 = i^{4+1} = i^4 \cdot i^1 = i & i^6 = i^{4+2} = i^4 \cdot i^2 = -1 & i^7 = i^{4+3} = i^4 \cdot i^3 = -i \\
i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1 & i^9 = i^{8+1} = i^8 \cdot i^1 = i & i^{10} = i^{8+2} = i^8 \cdot i^2 = -1 & i^{11} = i^{8+3} = i^8 \cdot i^3 = -i \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

De modo geral, $\forall k \in \mathbb{N}$, temos:

$$i^{4k} = i^{4k+0} = 1 \qquad i^{4k+1} = i^{4k} \cdot i^1 = i \qquad i^{4k+2} = i^{4k} \cdot i^2 = -1 \qquad i^{4k+3} = i^{4k} \cdot i^3 = -i$$

Como sabemos, na divisão de **n** por 4 os possíveis restos são 0, 1, 2 ou 3, ou seja,

$$\begin{array}{r|l} n & \underline{\;4\;} \\ r & k \end{array} \Rightarrow n = 4k + r\text{, em que } r \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Temos: $i^n = i^{4k+r} = i^{4k} \cdot i^r \xrightarrow[i^{4k} = 1]{} i^n = i^r$, em que **r** é o resto da divisão de **n** por 4.

Dessa forma, fica estabelecida a seguinte regra para o cálculo das potências naturais de **i**:

> Para calcular i^n, em que $n \in \mathbb{N}$, divide-se **n** por 4 e o novo expoente de **i** será o resto dessa divisão.

Note que essa regra pode ser estendida às potências inteiras de **i**, pois $i^{-n} = \dfrac{1}{i^n}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

EXEMPLO 4

Vamos calcular i^{107} e i^{2050} aplicando a regra obtida.

$$\begin{array}{r|l} 107 & \underline{\;4\;\;\;} \\ 27 & 26 \\ 3 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 2050 & \underline{\;4\;\;\;\;} \\ 05 & 512 \\ 10 & \\ 2 & \end{array}$$

Logo, $i^{107} = i^3 = -i$ e $i^{2050} = i^2 = -1$.

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

1 Em cada caso, efetue as operações indicadas:

a) (3, 2) + (0, 1)

b) (2, 3) · (−1, 4)

c) (2x − y, 6x + 2y) + (x − 2y, x); $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$

d) (−1, −1) · (−4, 2)

e) (2, −3) − (−1, −2)

f) (1, 0) · (x, −y); $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$

2 Represente no plano de Argand-Gauss os pontos **M**, **N**, **P** e **Q**, respectivas imagens dos números complexos $z_1 = (-2, 1)$, $z_2 = (0, -1)$, $z_1 + z_2$ e $z_1 \cdot z_2$.

3 Dados os números complexos $z_1 = (x, 3)$ e $z_2 = (2 - y, y)$, determine os números reais **x** e **y** de modo que $z_2 - z_1 = (5, -4)$.

4 Calcule:

a) i^{54} **b)** i^{95} **c)** i^{161} **d)** i^{200} **e)** $i^{1\,221}$ **f)** $i^{2\,022}$ **g)** $i^{13\,335}$ **h)** $i^{12\,784}$

5 Efetue:

a) $i^{25} \cdot i^{18}$ **b)** $(-2i)^{11}$ **c)** $\dfrac{i^{79}}{i^{32}}$ **d)** $\left[(i^2)^{2^0}\right]^{3^2}$ **e)** $\dfrac{i^{-98}}{i^{-34}}$ **f)** $\dfrac{i^{132} + i^{61}}{i^{42}}$

6 Se **i** é a unidade imaginária, determine em cada caso o valor de **A**:

a) $A = i + i^2 + i^3 + \ldots + i^{49} + i^{50}$ **b)** $A = i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot \ldots \cdot i^{19} \cdot i^{20}$

Forma algébrica de z

Dado o complexo $z = (x, y)$, observe que:

$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y \cdot 0 - 0 \cdot 1, y \cdot 1 + 0 \cdot 0) = (x, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1)$ (*)

Como já foi visto, $(x, 0) = x \in \mathbb{R}$, $(y, 0) = y \in \mathbb{R}$ e $(0, 1) = i$, então, substituindo em (*), obtemos uma nova expressão para o complexo $z = (x, y)$, que é chamada **forma algébrica de z**:

$$z = x + y \cdot i, \text{ em que } x \in \mathbb{R} \text{ e } y \in \mathbb{R}$$

Temos agora duas expressões para um número complexo, pois $z = (x, y) = x + y \cdot i$, em que **x** e **y** são números reais.

EXEMPLO 5

Dados os números complexos $(2, 5)$, $(-1, 1)$, $\left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{5}\right)$, $(0, 4)$, $\left(-\frac{1}{5}, 0\right)$ e $\left(-\sqrt{2}, -\sqrt{6}\right)$, temos:

- $(2, 5) = 2 + 5i$
- $(-1, 1) = -1 + i$
- $\left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{5}\right) = \frac{1}{2} - \frac{2}{5}i$
- $(0, 4) = 0 + 4i = 4i$
- $\left(-\frac{1}{5}, 0\right) = -\frac{1}{5} + 0 \cdot i = -\frac{1}{5}$
- $\left(-\sqrt{2}, -\sqrt{6}\right) = -\sqrt{2} - i\sqrt{6}$

Dado o número complexo $z = x + y \cdot i$, em que $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$, temos:

$\begin{cases} \textbf{x} \text{ é chamado } \textbf{parte real} \text{ de } \textbf{z} \text{ e indica-se } x = \operatorname{Re}(z); \\ \textbf{y} \text{ é chamado } \textbf{parte imaginária} \text{ de } \textbf{z} \text{ e indica-se } y = \operatorname{Im}(z). \end{cases}$

$\begin{cases} y = 0 \Leftrightarrow z = x \in \mathbb{R}, \text{ isto é, } \textbf{z} \text{ é um número real se, e somente se, } \operatorname{Im}(z) = 0; \\ x = 0 \text{ e } y \neq 0 \Leftrightarrow z = y \cdot i, \text{ isto é, } \textbf{z} \text{ é um imaginário puro se, e somente se, } \operatorname{Re}(z) = 0 \text{ e } \operatorname{Im}(z) \neq 0. \end{cases}$

Para os números complexos $a + bi$ e $c + di$, em que $\{a, b, c, d\} \subset \mathbb{R}$, as definições de igualdade, adição e multiplicação, definidas para números complexos dados por pares ordenados de números reais, são expressas como:

(I) $a + bi = c + di \Rightarrow a = c \text{ e } b = d$

(A) $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

(M) $(a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac + adi + bci + bd(-1) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

EXEMPLO 6

- $z = 3 + 2i \quad \Rightarrow \quad Re(z) = 3$ e $Im(z) = 2$
- $z = -1 - 3i \quad \Rightarrow \quad Re(z) = -1$ e $Im(z) = -3$
- $z = -\dfrac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad Re(z) = -\dfrac{2}{3}$ e $Im(z) = 0$
- $z = -i \quad \Rightarrow \quad Re(z) = 0$ e $Im(z) = -1$
- $z = -1 + i \quad \Rightarrow \quad Re(z) = -1$ e $Im(z) = 1$

EXEMPLO 7

Em cada caso, vamos obter o número real **k** que satisfaz a condição determinada:

a) o número complexo $z = (k - 2) + 4i$ deve ser um imaginário puro.

Sabe-se que **z** é um imaginário puro se, e somente se, $Re(z) = 0$ e $Im(z) \neq 0$.

Então, devemos ter: $\begin{cases} Re(z) = k - 2 = 0 \\ Im(z) = 4 \neq 0 \end{cases}$, ou seja, $k - 2 = 0 \Rightarrow k = 2$

b) o número complexo $z = \left(-3, \dfrac{2k-1}{3}\right)$ deve ser um número real.

Sabe-se que **z** é um número real se, e somente se, $Im(z) = 0$.

Então, devemos ter: $\dfrac{2k-1}{3} = 0$, ou seja, $2k - 1 = 0 \Rightarrow k = \dfrac{1}{2}$

EXEMPLO 8

Determinemos os números reais **x** e **y** que satisfazem a igualdade $(2x + 1) + (1 - 3y)i = -1 - 2i$.

A igualdade $(2x + 1) + (1 - 3y)i = -1 - 2i$ se verifica quando:

$$\begin{cases} 2x + 1 = -1 & \text{(partes reais iguais)} \\ 1 - 3y = -2 & \text{(partes imaginárias iguais)} \end{cases} \Rightarrow x = -1 \text{ e } y = 1$$

EXEMPLO 9

Dados os números complexos $v = 1 + 2i$ e $w = 2 - 2i$, vamos calcular $v + w$, $v \cdot w$, w^2 e $w - v$.

- $v + w = (1 + 2i) + (2 - 2i) = (1 + 2) + (2 - 2)i = 3$
- $v \cdot w = (1 + 2i) \cdot (2 - 2i) = 2 - 2i + 4i - 4i^2 = 2 + 2i - 4(-1) = 2 + 2i + 4 = 6 + 2i$
- $w^2 = (2 - 2i)^2 = 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2i + (2i)^2 = 4 - 8i + 4i^2 = 4 - 8i + 4 \cdot (-1) = 4 - 8i - 4 = -8i$
- $w - v = (2 - 2i) - (1 + 2i) = 2 - 1 - 2i - 2i = 1 - 4i$

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

1 Resolva as equações seguintes no universo $\mathbb{C}$:

a) $x^2 + 16 = 0$ **b)** $x^2 - 2x + 4 = 0$

Solução:

a) $x^2 + 16 = 0 \Rightarrow x^2 = -16 \Rightarrow x^2 = 16 \cdot (-1) \Rightarrow x^2 = 16 \cdot i^2 \Rightarrow x = 4i$ ou $x = -4i$

b) $x^2 - 2x + 4 = 0$

Como $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -12 = 12 \cdot (-1) = 12i^2$, temos:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{12i^2}}{2} = \frac{2 \pm 2i\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = 1 + i\sqrt{3} \text{ ou } x = 1 - i\sqrt{3}$$

2 Calcule $\sqrt{3 - 4i}$.

Solução:

Seja **z** um número complexo tal que $\sqrt{3 - 4i} = z$, ou seja, $z^2 = 3 - 4i$.

Então, fazendo $z = x + yi$, em que $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$, temos: $(x + yi)^2 = 3 - 4i$. *

Assim, devemos determinar os números reais **x** e **y** que satisfazem a sentença *, ou seja:

$$x^2 + 2xyi + \underbrace{y^2i^2}_{y^2 \cdot (-1)} = 3 - 4i \Rightarrow (x^2 - y^2) + 2xyi = 3 - 4i \quad **$$

Pela definição de igualdade, aplicada em **, temos: $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 & (1) \\ 2xy = -4 \Rightarrow y = -\dfrac{2}{x} & (2) \end{cases}$

Substituindo (2) em (1): $x^2 - \left(-\dfrac{2}{x}\right)^2 = 3 \Rightarrow x^2 - \dfrac{4}{x^2} = 3 \Rightarrow (x^2)^2 - 3x^2 - 4 = 0$

Fazendo $x^2 = a$, obtemos a equação do 2º grau $a^2 - 3a - 4 = 0$, que admite as soluções: $a = 4$ e $a = -1$.

Assim, como $x^2 = a$, temos:

$$a = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \overset{(2)}{\Rightarrow} y = -1 \\ x = -2 \underset{(2)}{\Rightarrow} y = 1 \end{cases} \Rightarrow z = 2 - i \text{ ou } z = -2 + i$$

$a = -1 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow$ não existe solução, pois devemos ter $x \in \mathbb{R}$

Logo, como $\sqrt{3 - 4i} = z$, temos:

$$\sqrt{3 - 4i} = 2 - i \text{ ou } \sqrt{3 - 4i} = -2 + i$$

PENSE NISTO:

O método usado para calcular a raiz quadrada de um número complexo na forma algébrica seria facilmente aplicável, caso o índice da raiz fosse um número maior do que dois, como, por exemplo, no cálculo de $\sqrt[4]{3 - 4i}$?

OBSERVAÇÕES

- Sabe-se que, em $\mathbb{R}$, $\sqrt{1} = 1$, pois, por definição: $\forall a \in \mathbb{R}$, $\sqrt{a^2} = |a|$.
- Em $\mathbb{C}$, temos: $\sqrt{1} = 1$ ou -1, pois, fazendo $\sqrt{1} = a + bi$ *, em que $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, temos:

$$(a + bi)^2 = \left(\sqrt{1}\right)^2 \Rightarrow a^2 - b^2 + 2abi = 1 \Rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 1 & (1) \\ 2ab = 0 & (2) \end{cases}$$

De (2), temos: $a = 0$ ou $b = 0$

Assim: $a = 0 \underset{(1)}{\Rightarrow} -b^2 = 1 \Rightarrow b^2 = -1 \Rightarrow \nexists b \in \mathbb{R}$

$$b = 0 \underset{(1)}{\Rightarrow} a^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \underset{*}{\Rightarrow} \sqrt{1} = 1 \\ \text{ou} \\ a = -1 \underset{*}{\Rightarrow} \sqrt{1} = -1 \end{cases}$$

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

7 Escreva cada um dos números complexos seguintes na correspondente forma algébrica ou como par ordenado:

a) $(3, -2)$
b) $(-4, 3)$
c) $(0, 4)$
d) $5i$
e) -5
f) $-3 + i$

8 Identifique a parte real e a parte imaginária de cada um dos seguintes números complexos:

a) $4 + 5i$
b) $3i + 3$
c) $\frac{-2 + 5i}{3}$
d) $-i\sqrt{3}$

9 Em cada caso, determine o número real **m** de modo que:

a) $z = (m - 3) + 4i$ seja imaginário puro;

b) $z = -3 + (m + 3)i$ seja real.

10 Determine os números reais **m** e **n**, para que os números complexos $v = (-2 - m) + 3ni$ e $w = 4 - (m^2 - 4)i$ sejam, respectivamente, imaginário puro e real. Nesse caso, determine **v** e **w**.

11 Dado o número complexo $z = (3 - x) + (x + 1)i$, em cada caso seguinte determine os valores reais de **x** para que se tenha:

a) $\text{Re}(z) = 2$
b) $\text{Im}(z) = -4$
c) $\text{Re}(z) > \text{Im}(z)$
d) $\text{Im}(z) < 3$

12 Em cada caso, determine os números reais **m** e **n** para que a igualdade seja verdadeira:

a) $m + (n - 1)i = -4 + 3i$
b) $(n - 2, m + 5) = (3, -2)$
c) $(m - 3) + (n - 2)i = 5i$
d) $(m - n + 1) + (2m + n - 4)i = 0$

13 Efetue:

a) $(-7 + 5i) - (3 - 2i)$
b) $2 + (3 - i) + (-1 + 2i) + i$
c) $(-4 + 3i) + 2i - (-3 - i)$
d) $-1 - (-2 + i) + (5 - i) - (3 - 7i)$

14 Determine os complexos **u** e **v** tais que $u + v = 2 - 5i$ e $u - 2v = -4 + 13i$.

15 Resolva, em $\mathbb{C}$, as equações:

a) $x^2 + 100 = 0$
b) $x^2 - 6x + 10 = 0$
c) $-x^2 + 4x - 29 = 0$
d) $(x^2 + 9) \cdot (x^2 - 1) = 0$
e) $x^4 + 5x^2 + 6 = 0$
f) $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$

16 Resolva a equação $x^3 - 14x^2 + 58x = 0$, considerando o conjunto universo:

a) $\mathbb{R}$
b) $\mathbb{C}$

17 Determine as raízes quadradas dos complexos:

a) $-5 + 12i$
b) $4i$
c) $4 + 3i$
d) $1 - i\sqrt{3}$

18 Em cada caso, efetue as operações indicadas:

a) $(2 + 5i) \cdot (1 - i)$
b) $(4 + 3i) \cdot (-2 + 2i)$
c) $(4 + i) \cdot (2 - i) + 3 - i$
d) $(-5i) \cdot (4 - 3i) \cdot (1 + 2i)$
e) $(1 + i) \cdot (1 - i)$
f) $(2 - 3i)^2$
g) $(-3 - 3i)^2$
h) $(2 + i)^3$

19 Dados os complexos $z_1 = \left(\frac{1}{2}, 3\right)$ e $z_2 = (2, -5)$, determine:

a) $z_1 \cdot z_2$
b) z_2^2

20 Efetue:

a) $(1 + i)^5 \cdot (1 - i)^5$
b) $(1 - i)^3$
c) $(2 + 2i)^4$

21 Determine $x \in \mathbb{R}$ de modo que o número complexo $z = (x + 3i) \cdot (1 - 2i)$ seja:

a) um número real;
b) um imaginário puro.

Conjugado de um número complexo

Dado o número complexo $z = a + bi$, com **a** e **b** reais, chama-se **conjugado** de **z**, e indica-se por $\bar{z}$, o número complexo $\bar{z} = a - bi$.

EXEMPLO 10

Vejamos o conjugado de alguns números complexos:

a) $z = 2 + 3i \Rightarrow \bar{z} = 2 - 3i$

b) $z = -1 + 4i \Rightarrow \bar{z} = -1 - 4i$

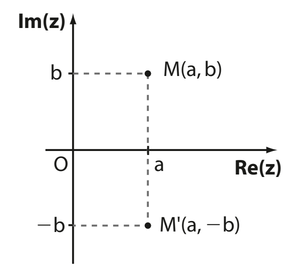
c) $z = -5i \Rightarrow \bar{z} = 5i$

d) $z = 3 \Rightarrow \bar{z} = 3$

Interpretação geométrica do conjugado

Seja $\bar{z} = a - bi$ o conjugado do número complexo $z = a + bi$, com **a** e **b** reais.

Como os pontos $M = (a, b)$ e $M' = (a, -b)$, representados na figura ao lado, são as respectivas imagens de **z** e $\bar{\mathbf{z}}$, conclui-se que:



A imagem de $\bar{\mathbf{z}}$ é o ponto simétrico da imagem de **z**, em relação ao eixo real.

Propriedades:

1ª) $\forall z \in \mathbb{C},\ z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

De fato, se $z = a + bi$, com **a** e **b** reais, temos:

$$z = \bar{z} \Leftrightarrow a + bi = a - bi \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = a \Rightarrow \mathbf{a} \text{ é um número real qualquer} \\ b = -b \Rightarrow b = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow z = a \in \mathbb{R}$$

2ª) $\forall z \in \mathbb{C},\ \bar{\bar{z}} = z$

3ª) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C},\ \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

De fato, se $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, com **a**, **b**, **c** e **d** reais, temos:

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

Logo:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a + c) + (b + d)i} = (a + c) - (b + d)i = (a - bi) + (c - di) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

4ª) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C},\ \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

De fato, se $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, com **a**, **b**, **c** e **d** reais, temos:

I. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(a + bi) \cdot (c + di)} = \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} = (ac - bd) - (ad + bc)i$

II. $\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = \overline{(a + bi)} \cdot \overline{(c + di)} = (a - bi) \cdot (c - di) = ac - adi - bci + bdi^2 = (ac - bd) - (ad + bc)i$

Logo, de I e II, conclui-se que: $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$.

OBSERVAÇÃO

Essa propriedade pode ser generalizada para um produto de **n** números complexos, ou seja:

$$\forall z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C},\ \overline{z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \cdot \ldots \cdot \bar{z}_n$$

5ª) $\forall z \in \mathbb{C},\ (\bar{z})^n = \overline{z^n}$, em que $n \in \mathbb{N}$

De fato, fazendo $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = z$ na expressão $\overline{z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \cdot \ldots \cdot \bar{z}_n$, temos:

$$\underbrace{\overline{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}}_{\mathbf{n}\text{ fatores}} = \underbrace{\bar{z} \cdot \bar{z} \cdot \ldots \cdot \bar{z}}_{\mathbf{n}\text{ fatores}} \Rightarrow \overline{z^n} = (\bar{z})^n$$

6ª) $\forall z \in \mathbb{C},\ z + \bar{z} = 2 \cdot \mathrm{Re}(z)$

7ª) $\forall z \in \mathbb{C},\ z - \bar{z} = 2 \cdot \mathrm{Im}(z) \cdot i$

PENSE NISTO:

Considerando $z = a + bi$, em que **a** e **b** são números reais,como seriam demonstradas a 2ª, a 6ª e a 7ª propriedades?

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

3 Determine os números complexos **z**, tais que $z \cdot \bar{z} = 13 + 6i + \bar{z} - z$.

Solução:

Fazendo $z = a + bi$, com **a** e **b** reais, na equação $z \cdot \bar{z} = 13 + 6i + \bar{z} - z$, temos:

$(a + bi) \cdot (a - bi) = 13 + 6i + (a - bi) - (a + bi) \Rightarrow a^2 - b^2i^2 = 13 + 6i + \cancel{a} - bi - \cancel{a} - bi \Rightarrow$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = 13 + (6 - 2b)i \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 13 & (1) \\ 0 = 6 - 2b \Rightarrow b = 3 & (2) \end{cases}$$

Substituindo (2) em (1), temos:

$$a^2 + 3^2 = 13 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = 2 \text{ ou } a = -2$$

Assim, como $z = a + bi$, temos:

- $a = 2$ e $b = 3 \Rightarrow z = 2 + 3i$
- $a = -2$ e $b = 3 \Rightarrow z = -2 + 3i$

4 Determine os complexos **z**, tais que $z^2 = \bar{z}$.

Solução:

Na equação $z^2 = \bar{z}$, fazendo $z = x + yi$, em que **x** e **y** são números reais, temos:

$$(x + yi)^2 = x - yi \Rightarrow x^2 + 2xyi + y^2i^2 = x - yi \Rightarrow (x^2 - y^2) + 2xyi = x - yi \quad (*)$$

Da definição de igualdade de números complexos, aplicada em (*), temos:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = x & (**) \\ 2xy = -y \Rightarrow y(2x + 1) = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ ou } x = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Assim, fazendo em (**):

- $y = 0$, temos:

  $x^2 = x \Rightarrow x(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 1 \quad (1)$

- $x = -\dfrac{1}{2}$, temos:

  $\dfrac{1}{4} - y^2 = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow y^2 = \dfrac{3}{4} \Rightarrow y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ou $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \quad (2)$

Como $z = x + yi$, então obtemos:

de (1): $\begin{cases} x = 0 \text{ e } y = 0 \Rightarrow z = 0 \\ x = 1 \text{ e } y = 0 \Rightarrow z = 1 \end{cases}$ e de (2): $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \text{ e } y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow z = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i \\ x = -\dfrac{1}{2} \text{ e } y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow z = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$

Logo, satisfazem a equação dada os complexos: $z = 0$, $z = 1$, $z = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ ou $z = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

22 Dados os complexos $z_1 = -1 - 3i$, $z_2 = 2i$ e $z_3 = 1 - i$, determine:

a) $z_1 + \bar{z}_2$

b) $z_2 \cdot \bar{z}_3$

c) $\overline{\bar{z}_1 + z_3}$

d) $\overline{z_2 \cdot \bar{z}_3}$

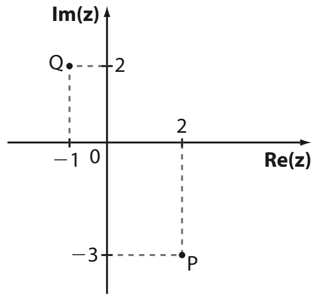
23 Na figura, **P** é o afixo de $\mathbf{z_1}$ e **Q** é o afixo de $\mathbf{z_2}$.

Determine o afixo de:

a) $\overline{z_1}$

b) $z_1 \cdot \overline{z_2}$

c) $(\overline{z_1} \cdot z_2)^2$



24 Determine $z \in \mathbb{C}$ que verifica a igualdade $z - \overline{z} = 6i$.

25 Determine $z \in \mathbb{C}$ de modo que a igualdade a seguir seja verdadeira: $2\overline{z} \cdot i + 3 = 2z - \overline{z} + 2i$.

26 Em cada caso, determine os complexos **z** que verificam a igualdade:

a) $(\overline{z})^2 = z^2$

b) $z^2 = 2 \cdot \overline{z} \cdot i$

c) $(\overline{z})^2 = -2i$

Quociente de dois números complexos na forma algébrica

Dados os números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di \neq 0$, com **a**, **b**, **c** e **d** reais, vamos obter o número complexo **z** tal que $z_2 \cdot z = z_1$.

Fazendo $z = x + yi$, com **x** e **y** reais, temos:

$$z_2 \cdot z = z_1 \Rightarrow (c + di) \cdot (x + yi) = a + bi \Rightarrow (cx - dy) + (cy + dx)i = a + bi \quad (*)$$

Da definição de igualdade aplicada em (*), obtém-se o sistema seguinte, nas incógnitas **x** e **y**:

$$\begin{cases} cx - dy = a \\ dx + cy = b \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, obtêm-se: $x = \dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2}$ e $y = \dfrac{bc - ad}{c^2 + d^2}$

Logo: $z = x + yi$, isto é, $z = \dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \dfrac{bc - ad}{c^2 + d^2} \cdot i$

O número complexo **z** obtido é chamado **quociente** de $\mathbf{z_1}$ por $\mathbf{z_2}$, ou seja, se $z_2 \cdot z = z_1$, com $z_2 \neq 0$, então $\dfrac{z_1}{z_2} = z$.

Mas o cálculo do quociente $\dfrac{z_1}{z_2}$ pode ser feito de maneira mais simples.

Note que: $z = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \dfrac{(a + bi) \cdot (c - di)}{(c + di) \cdot (c - di)} =$

$$= \frac{ac - adi + bci - bdi^2}{c^2 - d^2i^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \cdot i$$

Assim:

Para se obter o quociente de dois números complexos $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)$, basta multiplicar o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador, ou seja:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}}$$

EXEMPLO 11

Em cada caso, determinemos a forma algébrica dos seguintes quocientes:

a) $\dfrac{3 - 2i}{2 + i} = \dfrac{3 - 2i}{2 + i} \cdot \dfrac{2 - i}{2 - i} = \dfrac{6 - 3i - 4i + 2i^2}{4 - i^2} = \dfrac{4 - 7i}{4 - (-1)} = \dfrac{4}{5} - \dfrac{7}{5}i$

b) $\dfrac{-1 + 5i}{i} = \dfrac{(-1 + 5i) \cdot (-i)}{i \cdot (-i)} = \dfrac{i - 5i^2}{-i^2} = \dfrac{i - 5(-1)}{-(-1)} = 5 + i$

EXEMPLO 12

Determinemos o quociente de 5i por 3 − 4i:

$$\frac{5i}{3-4i} = \frac{5i\cdot(3+4i)}{(3-4i)\cdot(3+4i)} = \frac{15i+20i^2}{9-16i^2} =$$

$$= \frac{15i+20(-1)}{9-16(-1)} = \frac{-20+15i}{25} = -\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

5 Determine o número real **x** de modo que $z = \frac{2-i}{1+xi}$ seja imaginário puro. Nesse caso, qual é o complexo **z**?

Solução:

Expressando **z** na forma algébrica, temos:

$$z = \frac{2-i}{1+xi} = \frac{(2-i)\cdot(1-xi)}{(1+xi)\cdot(1-xi)} = \frac{2-2xi-i+xi^2}{1-(xi)^2} = \frac{(2-x)-(2x+1)i}{1-x^2\cdot i^2} = \frac{2-x}{1+x^2} - \frac{2x+1}{1+x^2}\cdot i$$

Como **z** é um imaginário puro se, e somente se, Re(z) = 0 e Im(z) ≠ 0, então devemos ter:

$$\frac{2-x}{1+x^2} = 0 \quad (1) \qquad \text{e} \qquad -\frac{2x+1}{1+x^2} \neq 0 \quad (2)$$

De (1), temos: $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

Substituindo x = 2 em (2): $-\frac{2\cdot 2+1}{1+2^2} = -1 \neq 0$, isto é, x = 2 satisfaz a condição (2).

Logo, **z** é imaginário puro se x = 2.

Se x = 2, então, como $z = \frac{2-x}{1+x^2} - \frac{2x+1}{1+x^2}\cdot i$, temos:

$$z = \frac{2-2}{1+2^2} - \frac{2\cdot 2+1}{1+2^2}\cdot i \Rightarrow z = 0 - \frac{5}{5}i \Rightarrow z = -i$$

6 Calcule $\frac{(1-i)^{322}}{i^{-105}}$.

Solução:

$$\frac{(1-i)^{322}}{i^{-105}} = \frac{[(1-i)^2]^{161}}{\frac{1}{i^{105}}} = [1-2i+i^2]^{161}\cdot i^{105} = (-2i)^{161}\cdot i^{105} =$$

$$= (-2)^{161}\cdot i^{161}\cdot i^{105} \underset{*}{=} -2^{161}\cdot i^{266} \underset{*}{=} -2^{161}\cdot i^2 = -2^{161}\cdot(-1) = 2^{161}$$

Observe que, na passagem (*), foi usada a regra prática para o cálculo de potências naturais de **i**, estudada anteriormente.

PENSE NISTO:

Qual é a particularidade dos complexos $(x + xi)^n$ em que **x** é um número real não nulo e **n** é um número natural par?

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

27 Escreva as seguintes expressões na forma algébrica:

a) $\frac{6}{5i}$

b) $\frac{2i}{1-i}$

c) $\frac{3-7i}{3+4i}$

d) $\frac{1-2i}{2+i}$

e) $\frac{1}{i}+\frac{1}{1+i}$

f) $\frac{(1+i)^2}{1-i}$

g) $\frac{3}{2+3i}-\frac{2i}{3-2i}$

h) $\frac{\overline{1+i}}{i}-\frac{i}{1+i}$

28 Dado o complexo $z = 3 - 4i$, determine:

a) o inverso de **z**; **b)** o conjugado do inverso de z^2; **c)** o inverso de $z \cdot i$.

29 Se o quociente de $3 + 2i$ pelo complexo **z** é igual a $1 - i$, determine **z**.

30 Determine $a \in \mathbb{R}$ de modo que $z = \dfrac{2 + i}{3 - ai}$ seja imaginário puro.

31 Se $z = \dfrac{2 + mi}{1 - i}$, determine o número real **m** para que **z** seja um número real. Nesse caso, qual é o valor de **z**?

32 Mostre que $\dfrac{(1 + i)^{53}}{(1 - i)^{51}}$ é um número real.

Módulo

Dado o número complexo $z = a + bi$, com **a** e **b** reais, chama-se **módulo** de **z**, e indica-se por $|z|$ ou pela letra grega ρ (lê-se: "rô"), o número real não negativo dado por:

$$|z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

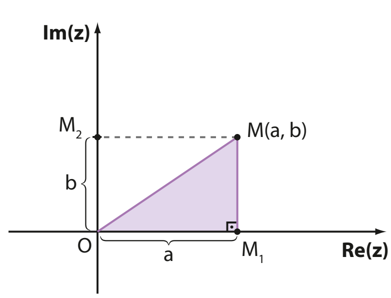
EXEMPLO **13**

Vamos calcular o módulo de alguns números complexos:

- $z_1 = 3 - 4i \quad \Rightarrow \quad |z_1| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$
- $z_2 = 3i = 0 + 3i \quad \Rightarrow \quad |z_2| = \sqrt{0^2 + 3^2} = \sqrt{9} = 3$
- $z_3 = 2 + 2i \quad \Rightarrow \quad |z_3| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
- $z_4 = 4 = 4 + 0 \cdot i \quad \Rightarrow \quad \rho_4 = \sqrt{4^2 + 0^2} = \sqrt{16} = 4$
- $z_5 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i \quad \Rightarrow \quad \rho_5 = \sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}} = 1$
- $z_6 = -5 - 5i \quad \Rightarrow \quad \rho_6 = \sqrt{(-5)^2 + (-5)^2} = \sqrt{2 \cdot 25} = 5\sqrt{2}$

Interpretação geométrica do módulo

No plano de Argand-Gauss, seja $M = (a, b)$ a imagem do número complexo $z = a + bi$, com **a** e **b** reais, conforme mostrado na figura abaixo.



Note que o triângulo OM_1M é retângulo em $\mathbf{M_1}$.
Assim, pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$(OM)^2 = (OM_1)^2 + (M_1M)^2$$

Como $\begin{cases} OM_1 = a \\ M_1M = OM_2 = b \end{cases}$, então:

$(OM)^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow OM = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$

Portanto, conclui-se que:

> Geometricamente, o módulo de um número complexo é a distância de sua imagem à origem do plano de Argand-Gauss.

1ª) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

2ª) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, com $z_2 \neq 0$, $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

7 Determine um número complexo **z** tal que $Im(z) - Re(z) = 17$ e $|z| = 13$.

Solução:

Fazendo $z = a + bi$, com **a** e **b** reais, devemos determinar os números reais **a** e **b** que satisfazem as condições dadas, ou seja: $\begin{cases} Im(z) - Re(z) = 17 \Rightarrow b - a = 17 \Rightarrow b = a + 17 & (1) \\ |z| = 13 \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 13 \Rightarrow a^2 + b^2 = 169 & (2) \end{cases}$

Substituindo (1) em (2), temos:

$a^2 + (a + 17)^2 = 169 \Rightarrow a^2 + a^2 + 34a + 289 = 169 \Rightarrow a^2 + 17a + 60 = 0 \Rightarrow a = -5$ ou $a = -12$

Logo: $\begin{cases} a = -5 \underset{(1)}{\Rightarrow} b = 12 \Rightarrow z = -5 + 12i \\ a = -12 \underset{(1)}{\Rightarrow} b = 5 \Rightarrow z = -12 + 5i \end{cases}$

8 Represente geometricamente, no plano de Argand-Gauss, os seguintes subconjuntos de $\mathbb{C}$:

a) $A = \{z \in \mathbb{C};\ |z| = 4\}$

b) $B = \{z \in \mathbb{C};\ |z + 2i| = 1\}$

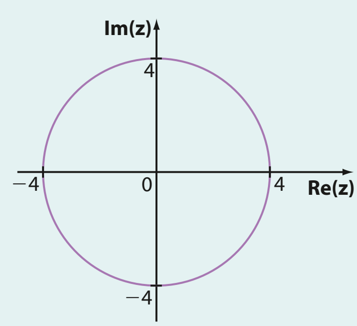
c) $C = \{z \in \mathbb{C};\ |z - 1| \leqslant 3\}$

Solução:

a) Fazendo $z = x + yi$, com **x** e **y** reais, temos:

$|z| = 4 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 = 16$

Logo, os pontos (x, y) que satisfazem a condição $|z| = 4$ pertencem à circunferência de centro na origem do plano de Argand-Gauss e raio de medida 4, representada na figura ao lado.

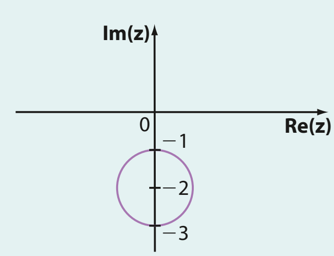


b) Fazendo $z = x + yi$, com **x** e **y** reais, temos:

$|z + 2i| = 1 \Rightarrow |x + yi + 2i| = 1 \Rightarrow |x + (y + 2)i| = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{x^2 + (y + 2)^2} = 1 \Rightarrow x^2 + (y + 2)^2 = 1$

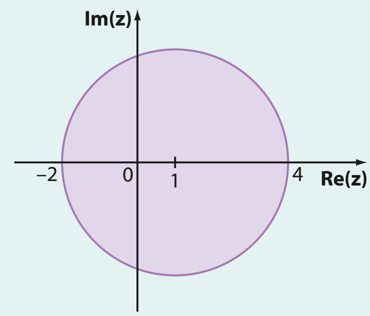
Logo, os pontos (x, y) que satisfazem a condição $|z + 2i| = 1$ pertencem à circunferência de centro $(0, -2)$ e raio de medida 1, representada na figura ao lado.



c) Fazendo $z = x + yi$, com **x** e **y** reais, temos:

$$|z - 1| \leqslant 3 \Rightarrow |x + yi - 1| \leqslant 3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |(x - 1) + yi| \leqslant 3 \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \leqslant 3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x - 1)^2 + y^2 \leqslant 9$$

Logo, os pontos (x, y) que satisfazem a condição $|z - 1| \leqslant 3$ pertencem ao círculo de centro (1, 0) e raio de medida 3, representado na figura ao lado.



EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

33 Calcule o módulo de cada um dos números complexos:

a) $z = 2 + i$

b) $z = 5i$

c) $z = -4 + 3i$

d) $z = -4$

e) $z = -2\sqrt{3} - 2i$

f) $z = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$

34 Entre os números complexos $2 + 3i$, $3 + i$, 1, -2, $4i$ e $-\frac{1}{2}i$, qual possui o maior módulo?

35 Determine o módulo de cada um dos seguintes números complexos:

a) $z = (2 - 3i) \cdot (4 + 6i)$

b) $z = \frac{3i}{1 + i}$

c) $z = 2 \cdot i^{119}$

d) $z = 2i(-1 + 2i)$

36 São dados os números complexos $z_1 = x + 3i$ e $z_2 = 2 + (x - 1)i$, nos quais **x** é um número real. Determine **x** para que se tenha $|z_1| = |z_2|$.

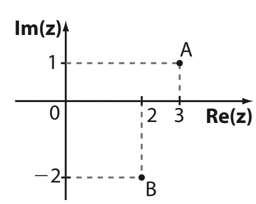
37 No plano de Argand-Gauss representado ao lado, **A** e **B** são as respectivas imagens dos números complexos $\mathbf{z_1}$ e $\mathbf{z_2}$.

Determine o módulo de:

a) $z_1 + z_2$

b) $z_1 - z_2$

c) $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$



38 Represente geometricamente no plano de Argand-Gauss os seguintes subconjuntos de $\mathbb{C}$:

a) $A = \{z \in \mathbb{C};\ |z| = 0\}$

b) $B = \{z \in \mathbb{C};\ |z| = 10\}$

c) $C = \{z \in \mathbb{C};\ |z - \bar{z}| = 4\}$

d) $D = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 4\}$

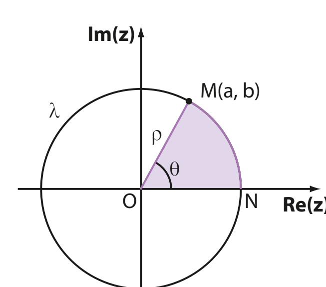
e) $E = \{z \in \mathbb{C};\ |z| \geqslant 2\}$

f) $F = \{z \in \mathbb{C};\ |z + i| = 2\}$

Argumento

No plano complexo, sejam **M** a imagem de um complexo $z = a + bi$, não nulo, e **N** a interseção da circunferência $\boldsymbol{\lambda}$, de centro na origem **O** do plano e raio $\overline{OM}$, em que $OM = \rho = |z|$, com o semieixo real positivo.

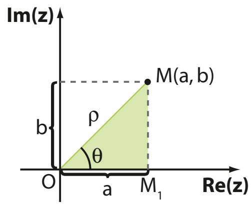
Chama-se **argumento** de **z** qualquer ângulo θ que corresponde a um arco de λ, de origem **N** e extremidade **M**, conforme mostrado na figura ao lado.



Indica-se: $\theta = \arg z$

Em particular, se $0 \leqslant \theta < 2\pi$, diz-se que θ é o **argumento principal** de **z**.

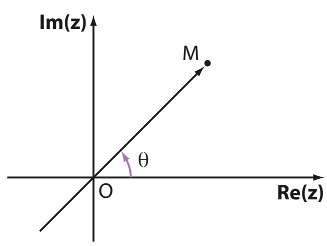
Observe na figura abaixo que o triângulo OM_1M é retângulo.



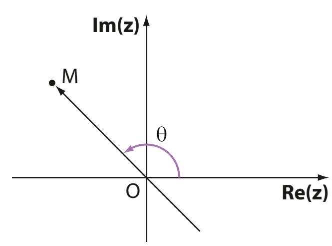
$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{\rho} \\ \operatorname{sen}\theta = \dfrac{b}{\rho} \end{cases}$$

Representações geométricas do argumento principal

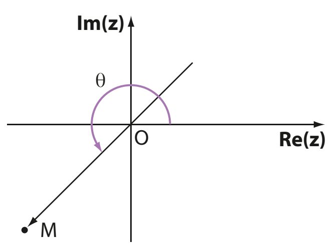
Observe a seguir as representações geométricas do argumento principal θ, em que $0 \leqslant \theta < 2\pi$.



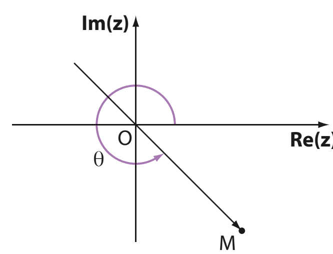
$M \in 1^{\text{o}}$ quadrante



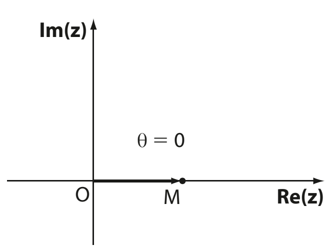
$M \in 2^{\text{o}}$ quadrante

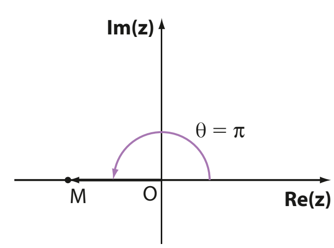


$M \in 3^{\text{o}}$ quadrante

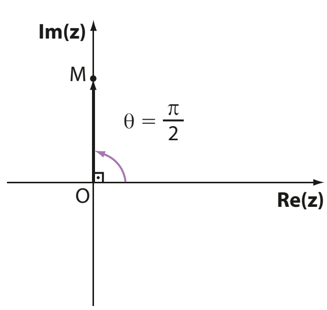


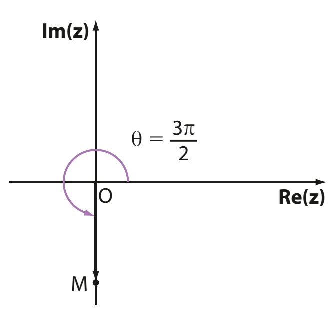
$M \in 4^{\text{o}}$ quadrante





M pertence ao eixo real





M pertence ao eixo imaginário

OBSERVAÇÕES

- Se **z** é um número complexo não nulo cujo argumento principal é θ_0, então todos os ângulos congruentes a ele são argumentos de **z**, ou seja:

  $\theta = \arg z \Rightarrow \theta = \theta_0 + k \cdot 2\pi$, em que $k \in \mathbb{Z}$

  Assim, a notação $\arg z = \theta$ pode ser usada para indicar o argumento principal de **z** (quando $k = 0$) ou para indicar qualquer outro argumento de **z** (quando $k \neq 0$).
- Dado o número complexo $z = a + bi$, com **a** e **b** reais:
  - se $z = 0$, então $M = (0, 0)$ é a imagem de **z** no plano complexo, ou seja, não fica definida a circunferência λ, já que $\rho = OM = 0$. Nesse caso, não se define o argumento de **z**.
  - **z** é um número real positivo $\Leftrightarrow$ $\arg z = k \cdot 2\pi$, em que $k \in \mathbb{Z}$
  - **z** é um número real negativo $\Leftrightarrow$ $\arg z = \pi + k \cdot 2\pi$, em que $k \in \mathbb{Z}$
  - **z** é um imaginário puro e $\text{Im}(z) > 0$ $\Leftrightarrow$ $\arg z = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, em que $k \in \mathbb{Z}$
  - **z** é um imaginário puro e $\text{Im}(z) < 0$ $\Leftrightarrow$ $\arg z = -\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, em que $k \in \mathbb{Z}$

EXEMPLO 14

Em cada caso, determinemos o argumento principal dos números complexos dados:

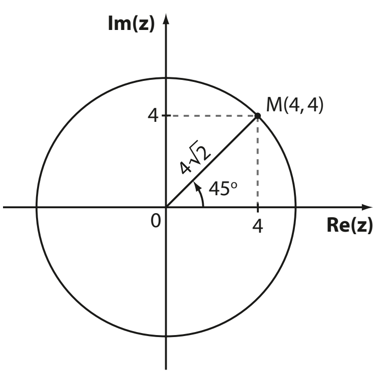
a) $z_1 = 4 + 4i$

Como $a = 4$, $b = 4$ e $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$, temos:

$$\rho = \sqrt{4^2 + 4^2} \Rightarrow \rho = 4\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{\rho} \\ \text{sen}\,\theta = \dfrac{b}{\rho} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{4}{4\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{sen}\,\theta = \dfrac{4}{4\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \theta \in 1^{\underline{o}}$ quadrante $\Rightarrow \theta = 45°$ ou $\frac{\pi}{4}$ rad

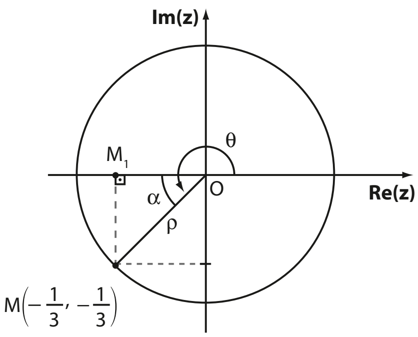


b) $z_2 = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}i$

Outro modo de calcular θ, argumento principal de um número complexo **z**, pode ser o seguinte:

Primeiramente vamos determinar a medida (α) do ângulo mostrado na figura. Para isso, temos:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow \rho = \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$



Usando trigonometria no triângulo retângulo, temos:

$$\text{sen}\,\alpha = \cos\alpha = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45° \text{ ou } \alpha = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

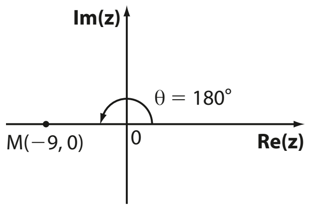
Como o afixo de $\mathbf{z}_2$ é $M\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, ou seja, $M \in 3^{\underline{o}}$ quadrante, então:

$$\theta = \alpha + 180° \Rightarrow \theta = 45° + 180° \Rightarrow \theta = 225° \text{ ou } \theta = \frac{5\pi}{4} \text{ rad}$$

c) $z_3 = -9$

Como $\mathbf{z}_3$ é um número real negativo, então:

$\theta = 180°$ ou $\theta = \pi$ rad



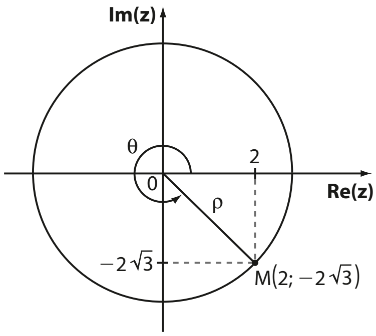
d) $z_4 = 2 - 2i\sqrt{3}$

Como $a = 2$, $b = -2\sqrt{3}$ e $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$, temos:

$\rho = \sqrt{2^2 + (-2\sqrt{3})^2} \Rightarrow \rho = 4$

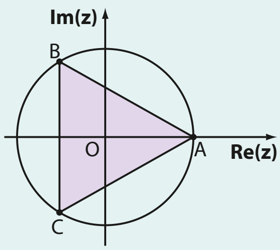
$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{\rho} \\ \operatorname{sen}\theta = \dfrac{b}{\rho} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \\ \operatorname{sen}\theta = \dfrac{-2\sqrt{3}}{4} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \theta = 300°$ ou $\theta = \dfrac{5\pi}{3}$ rad



EXERCÍCIO RESOLVIDO

9 Os pontos **A**, **B** e **C**, representados na figura ao lado, são vértices de um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência de centro na origem do plano de Argand-Gauss e raio de medida 2 cm. Determine a forma algébrica dos números complexos $\mathbf{z_1}$, $\mathbf{z_2}$ e $\mathbf{z_3}$ cujos afixos são **A**, **B** e **C**, respectivamente.



Solução:

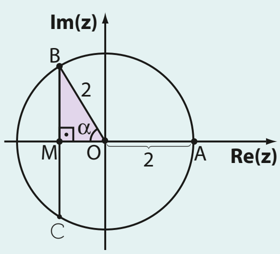
Observe na figura ao lado que:

- como **A**, **B** e **C** são vértices de um triângulo equilátero, temos:

  med(AÔB) = med(BÔC) = med(CÔA) = 120° ⇒

  ⇒ α = med(BÔM) = 180° − 120° = 60°

- $\triangle$BMO é retângulo ⇒ $\begin{cases} \cos 60° = \dfrac{|OM|}{2} \Rightarrow |OM| = 2 \cdot \dfrac{1}{2} = 1 \\ \operatorname{sen} 60° = \dfrac{|BM|}{2} \Rightarrow |BM| = 2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \end{cases}$



Assim, temos:

A pertence ao eixo real ⇒ A = (2, 0) ⇒ $z_1 = 2$

$B(x_2, y_2) \in$ 2º quadrante ($x_2 < 0$ e $y_2 > 0$) ⇒ $x_2 = -|OM| = -1$ e $y_2 = |BM| = \sqrt{3} \Rightarrow z_2 = -1 + i\sqrt{3}$

$C(x_3, y_3) \in$ 3º quadrante ($x_3 < 0$ e $y_3 < 0$) ⇒ $x_3 = -|OM| = -1$ e $y_3 = -|BM| = -\sqrt{3} \Rightarrow z_3 = -1 - i\sqrt{3}$

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

39 Determine o argumento principal de cada um dos seguintes números complexos:

a) $z = \sqrt{3} + i$

b) $z = 4\sqrt{3} - 4i$

c) $z = -2 + 2i$

d) $z = -2 + 2i\sqrt{3}$

e) $z = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$

f) $z = 2i$

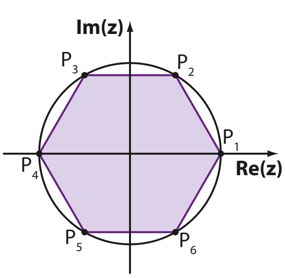
g) $z = -3 - 3i\sqrt{3}$

h) $z = -6$

i) $z = \sqrt{6} - i\sqrt{2}$

j) $z = -\dfrac{i}{4}$

40 A figura apresenta, no plano complexo, um hexágono regular inscrito em uma circunferência cujo raio mede 4.



Determine o argumento principal dos complexos $\mathbf{z_1}$, $\mathbf{z_2}$, $\mathbf{z_3}$, $\mathbf{z_4}$, $\mathbf{z_5}$ e $\mathbf{z_6}$, cujas respectivas imagens são os vértices $\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_2}$, $\mathbf{P_3}$, $\mathbf{P_4}$, $\mathbf{P_5}$ e $\mathbf{P_6}$.

Forma trigonométrica ou polar

Se $z = a + bi$, com **a** e **b** reais, é um número complexo não nulo, sabemos que $\theta = \arg z$ satisfaz as condições:

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{\rho} \Rightarrow a = \rho \cdot \cos\theta & (1) \\ \operatorname{sen}\theta = \dfrac{b}{\rho} \Rightarrow b = \rho \cdot \operatorname{sen}\theta & (2) \end{cases}$$

Assim, substituindo (1) e (2) em $z = a + bi$, temos: $z = \rho \cdot \cos\theta + (\rho \cdot \operatorname{sen}\theta)i$

Obtemos então uma nova expressão para um número complexo, que é chamada **forma trigonométrica** ou **forma polar** de **z**:

$$z = \rho \cdot (\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta)$$

Vejamos agora a igualdade de números complexos dados na forma trigonométrica.

Dados $z_1 = \rho_1 \cdot (\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)$ e $z_2 = \rho_2 \cdot (\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)$, dois números complexos, podemos concluir que:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \rho_1 = \rho_2 \text{ e } \theta_1 = \theta_2 + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

De fato: $z_1 = \rho_1 \cdot (\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1) = \rho_1 \cdot \cos\theta_1 + \rho_1 \cdot i \operatorname{sen}\theta_1$ (1)

$z_2 = \rho_2 \cdot (\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2) = \rho_2 \cdot \cos\theta_2 + \rho_2 \cdot i \operatorname{sen}\theta_2$ (2)

Assim:

$$z_1 = z_2 \Rightarrow \begin{cases} \rho_1 \cdot \cos\theta_1 = \rho_2 \cdot \cos\theta_2 \\ \rho_1 \cdot \operatorname{sen}\theta_1 = \rho_2 \cdot \operatorname{sen}\theta_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho_1^2 \cdot \cos^2\theta_1 = \rho_2^2 \cdot \cos^2\theta_2 & (3) \\ \rho_1^2 \cdot \operatorname{sen}^2\theta_1 = \rho_2^2 \cdot \operatorname{sen}^2\theta_2 & (4) \end{cases}$$

Adicionando membro a membro (3) e (4), temos:

$$\rho_1^2 \cdot (\cos^2\theta_1 + \operatorname{sen}^2\theta_1) = \rho_2^2 \cdot (\cos^2\theta_2 + \operatorname{sen}^2\theta_2) \Rightarrow \rho_1^2 = \rho_2^2 \Rightarrow \rho_1 = \rho_2$$

De (1) e (2), temos: $\begin{cases} \cos\theta_1 = \cos\theta_2 \\ \operatorname{sen}\theta_1 = \operatorname{sen}\theta_2 \end{cases} \Rightarrow \theta_1 = \theta_2 + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Em outras palavras:

> Dois números complexos são iguais se, e somente se, seus módulos são iguais e seus argumentos são congruentes.

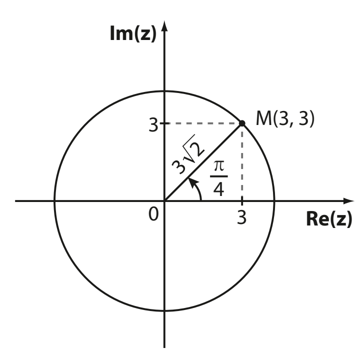
EXEMPLO 15

Vamos escrever os números complexos seguintes na forma trigonométrica:

a) $z = 3 + 3i$

Se $z = 3 + 3i$, temos:

- $\rho = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$
- $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{3}{3\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{sen}\theta = \dfrac{3}{3\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta \in 1^{\text{o}}$ quadrante $\Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{4}$ rad

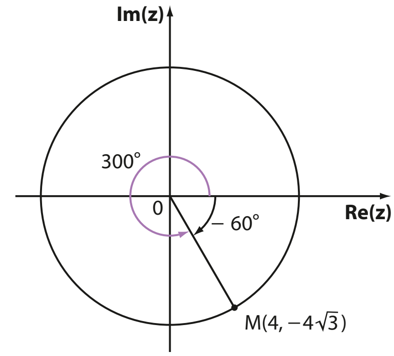


Logo, $z = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) \Rightarrow z = 3\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4}\right)$

b) $z = 4 - 4i\sqrt{3}$

Se $z = 4 - 4i\sqrt{3}$, temos:

- $\rho = \sqrt{4^2 + (-4\sqrt{3})^2} = 8$
- $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2} \\ \text{sen}\,\theta = \dfrac{-4\sqrt{3}}{8} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow$



$\Rightarrow \theta \in 4^{\underline{o}}$ quadrante $\Rightarrow \theta = 300°$

Logo, $z = \rho(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta) \Rightarrow$

$\Rightarrow z = 8(\cos 300° + i\,\text{sen}\,300°)$

Note que, como $\theta \in 4^{\underline{o}}$ quadrante, poderíamos usar qualquer arco congruente a 300° (argumento principal) para escrever **z** na forma trigonométrica, ou seja, **z** poderia ser expresso, por exemplo, como: $z = 8[\cos(-60°) + i\,\text{sen}\,(-60°)]$.

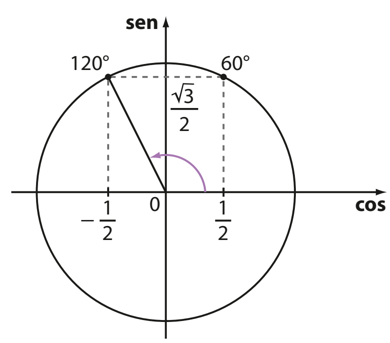
EXEMPLO **16**

Dados os números complexos na forma polar, vamos expressá-los na forma algébrica:

a) $z = 4(\cos 120° + i\,\text{sen}\,120°)$

Como $\begin{cases} \cos 120° = -\cos 60° = -\dfrac{1}{2} \\ \text{e} \\ \text{sen}\,120° = \text{sen}\,60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$, temos:

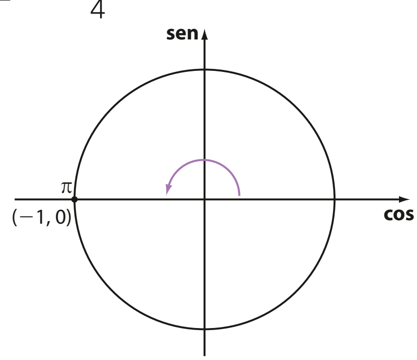
$z = 4\left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, isto é, $z = -2 + 2i\sqrt{3}$



b) $z = \dfrac{1}{4}(\cos\pi + i\,\text{sen}\,\pi)$

Como $\cos\pi = -1$ e $\text{sen}\,\pi = 0$, temos:

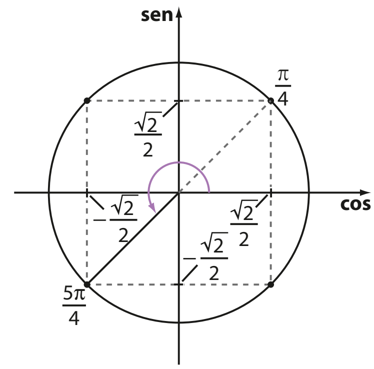
$z = \dfrac{1}{4}(-1 + i \cdot 0)$, isto é, $z = -\dfrac{1}{4}$



c) $z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{4}\right)$

Como $\begin{cases} \cos\frac{5\pi}{4} = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{e} \\ \text{sen}\,\frac{5\pi}{4} = -\text{sen}\,\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$, temos:

$$z = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) \Rightarrow z = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$$



PENSE NISTO:

Dado um número complexo na forma algébrica, como você procederia para escrevê-lo na forma polar, no caso de o argumento não ser um arco notável?

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

10 Determine a forma polar dos números complexos **x** e **y** que satisfazem o sistema:

$$\begin{cases} 2xi + y = -3 + i \\ x + yi = -1 \end{cases}$$

Solução:

$$\begin{cases} 2xi + y = -3 + i & (1) \\ x + yi = -1 \Rightarrow x = -1 - yi & (2) \end{cases}$$

Substituindo (2) em (1), temos:

$$2i(-1 - yi) + y = -3 + i \Rightarrow -2i - 2yi^2 + y = -3 + i \Rightarrow 3y = -3 + 3i \Rightarrow y = -1 + i$$

Como $x = -1 - yi$, então: $x = -1 - (-1 + i)i = -1 + i - i^2 \Rightarrow x = i$

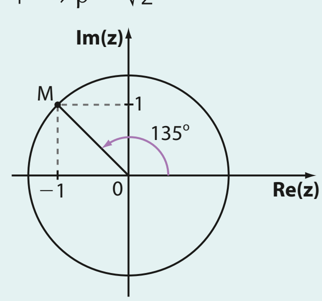
Determinemos a forma polar de **x** e **y**:

- $x = i$ é imaginário puro e sua imagem pertence ao eixo imaginário. A forma trigonométrica de **x** é:

$$x = \cos 90° + i\,\text{sen}\,90°$$

- $y = -1 + i$ e sua imagem é o ponto $M(-1, 1) \Rightarrow \rho = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} \Rightarrow \rho = \sqrt{2}$

Assim, temos: $\begin{cases} \cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{e} \\ \text{sen}\,\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = 135°$



Logo, $y = \sqrt{2}(\cos 135° + i\,\text{sen}\,135°)$.

Portanto, na forma polar, as soluções do sistema são:

$$x = \cos 90° + i\,\text{sen}\,90° \;\text{ e }\; y = \sqrt{2}(\cos 135° + i\,\text{sen}\,135°)$$

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

41 Escreva os seguintes números complexos na forma trigonométrica:

a) $z = -\frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i$

b) $z = 2i$

c) $z = 1 - i\sqrt{3}$

d) $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

e) $z = -4$

f) $z = 3 - 3i$

g) $z = (-5, 5)$

h) $z = -i$

i) $z = \left(-\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

j) $z = (1 - i)^2$

42 Dado o número complexo $z = \frac{i}{1 + i} + \frac{1}{i}$, pede-se:

a) as formas algébricas de **z** e z^2;

b) as formas trigonométricas de **z** e z^2.

43 Obtenha a forma algébrica de cada um dos seguintes números complexos:

a) $z = 4(\cos 120° + i \operatorname{sen} 120°)$

b) $z = 6\left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3}\right)$

c) $z = 3(\cos 90° + i \operatorname{sen} 90°)$

d) $z = \cos \frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2}$

e) $z = \cos 210° + i \operatorname{sen} 210°$

f) $z = 2\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{6}\right)$

g) $z = \sqrt{2}(\cos 135° + i \operatorname{sen} 135°)$

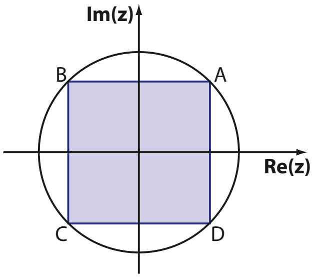
h) $z = 3\left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{4}\right)$

44 Se **x** e **y** são números complexos, escreva as soluções dos sistemas seguintes na forma polar.

a) $\begin{cases} x + yi = -1 - 2i \\ 2xi + y = 1 + i \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + yi = 0 \\ xi + y = 3 - 3i\sqrt{3} \end{cases}$

45 Sabe-se que a medida do lado do quadrado ABCD é 10. Obtenha a forma polar dos números complexos cujos afixos são os vértices desse quadrado. Expresse as medidas dos respectivos argumentos, em radianos.



DESAFIO

Seja **z** um número complexo cuja forma polar é $z = p \cdot (\cos \theta + i \cdot \operatorname{sen} \theta)$.
Determine o conjunto solução da equação $z^2 + |z| = 0$.