CAPÍTULO 8

# Polinômios

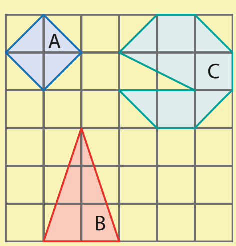
## Introdução aos polinômios

TROQUE **IDEIAS**

### Problemas com polinômios

Resolva os seguintes problemas.

**a)** No quadriculado abaixo, o lado de cada quadradinho mede **x** (unidades de medida de comprimento). Calcule, em função de **x**, a área dos polígonos **A**, **B** e **C**.

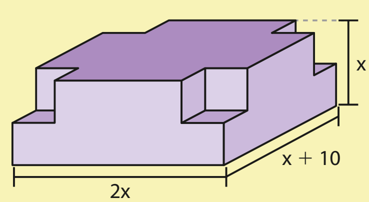



**b)** Responda:

i) De uma folha de cartolina retangular de dimensões 30 cm × 22 cm é recortado, em cada um de seus vértices, um quadrado cujo lado mede **x** centímetros, em que $0 < x < 11$. Determine, em função de **x**, a expressão que representa a área da superfície remanescente.

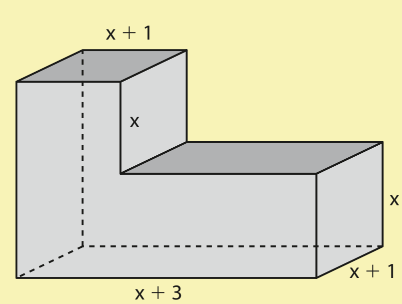
ii) Após a retirada dos quadrados, é possível construir, a partir da superfície obtida, uma caixa sem tampa, na forma de paralelepípedo retângulo, dobrando-se convenientemente seus lados. Determine o volume do paralelepípedo obtido.

**c)** De um paralelepípedo retângulo de dimensões **x**, 2x e x + 10, com $x > 1$, são retirados quatro cubos unitários, como mostra a figura:




Determine o volume do poliedro obtido.

**d)** Observe o poliedro seguinte.




Escreva a expressão algébrica que representa:

i) seu volume;

ii) sua área total.

## Definição

Um **polinômio** na variável complexa **x** é uma expressão dada por:

$$a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

em que:

- $\mathbf{a_n}$, $\mathbf{a_{n-1}}$, ..., $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_0}$ são números complexos chamados **coeficientes** do polinômio; $\mathbf{a_0}$ é o **coeficiente independente** do polinômio;
- todos os expoentes de **x**: n, n − 1, ..., 2, 1, 0 são números naturais;
- cada uma das parcelas, $a_n \cdot x^n$, $a_{n-1} \cdot x^{n-1}$, ..., $a_1 \cdot x$, $a_0$, corresponde a um termo do polinômio;
- o **grau** do polinômio é o número natural igual ao maior expoente de **x**, cujo termo apresenta coeficiente não nulo;
- **x** pode assumir qualquer valor complexo.

EXEMPLO **1**

- $4x^3 - 5x^2 + \frac{1}{2}x - 7$ é um polinômio de grau 3.
- $-\frac{1}{6}x^5 + x^2 - 3x + 1$ é um polinômio de grau 5.
- $2ix^2 + x - 2$ é um polinômio de grau 2.
- $x^6 - ix^3 + 4x^2 - 3i$ é um polinômio de grau 6.
- $x + 4$ é um polinômio de grau 1.
- $5x$ é um polinômio de grau 1.
- $-7$ é um polinômio de grau 0, pois podemos escrevê-lo na forma $-7 \cdot x^0$.
- Em cada item da atividade proposta na seção *Troque ideias* desenvolvido na introdução do capítulo, as expressões obtidas são exemplos de polinômios.

OBSERVAÇÕES

- A expressão $2x + \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x} = 2x + 3x^{-2} + 4x^{-1}$ não é um polinômio, pois os expoentes de **x** não podem ser negativos.
- A expressão $3x^2 - 5\sqrt{x} + 2 = 3x^2 - 5x^{\frac{1}{2}} + 2$ não é um polinômio, pois os expoentes de **x** não podem ser fracionários.

## Coeficiente dominante

Seja $a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$, com $a_n \neq 0$, um polinômio de grau **n**.
O coeficiente $\mathbf{a_n}$ é chamado **coeficiente dominante** do polinômio.

EXEMPLO **2**

- $-x^3 + 15x^2 - 7x + 3$ possui coeficiente dominante igual a $-1$.
- $\frac{4}{3}x^5 + 2x - 1$ tem coeficiente dominante igual a $\frac{4}{3}$.
- $2ix^2 + 4x^3 + ix^4$ tem coeficiente dominante igual a **i**.
- $x^2 - 3x + 5$ tem coeficiente dominante igual a 1.

# Função polinomial

Vamos considerar uma função f: $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, que a cada $x \in \mathbb{C}$ associa o polinômio $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$, isto é, $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$.

A função **f** recebe o nome de **função polinomial**.

Por exemplo, as funções **f**, **g** e **h**, definidas, respectivamente, por $f(x) = 4x - 5$, $g(x) = 2x^2 - x + 1$ e $h(x) = ix^3 - 2x + 4$, são funções polinomiais. Em particular, as funções de variável real ($x \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$) afim (1º grau), definidas por $y = ax + b$, com $a \in \mathbb{R}^*$, e quadráticas (2º grau), definidas por $y = ax^2 + bx + c$, com **a**, **b** e **c** reais e $a \neq 0$, estudadas em anos anteriores, são exemplos de funções polinomiais.

Como a cada polinômio está associada uma única função e, reciprocamente, a cada função está associado um único polinômio, podemos, daqui em diante, usar indistintamente os termos polinômio ou função polinomial.

## EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

**1** Determine $m \in \mathbb{R}$ para que o grau do polinômio $(m + 2)x^4 - 2x^3 + 5x - 1$ seja igual a 4.

**Solução:**

Para que o polinômio tenha grau 4, basta que o coeficiente de $x^4$ não se anule, isto é: $m + 2 \neq 0 \Rightarrow m \neq -2$.

**2** Discuta, em função de **m**, em que **m** varia em $\mathbb{R}$, o grau do polinômio:

$$p(x) = (m^2 - 25)x^7 + (m + 5)x^4 + 6x^3 - 2x + 5$$

**Solução:**

Devemos considerar todas as possibilidades para o grau de p(x), de acordo com os valores que **m** assume.

Há três casos:

- 1º caso:
  O grau de p(x) será 7 se $m^2 - 25 \neq 0$, isto é, se:
  $m \neq -5$ e $m \neq 5$
- 2º caso:
  O grau de p(x) será 4 se o coeficiente de $x^7$ for nulo e o coeficiente de $x^4$ não for nulo, isto é, se:
  $m^2 - 25 = 0$ e $m + 5 \neq 0 \Rightarrow m = \pm 5$ e $m \neq -5 \Rightarrow m = 5$
- 3º caso:
  O grau de p(x) será 3 se os coeficientes de $x^7$ e de $x^4$ se anularem simultaneamente, isto é, se:
  $m^2 - 25 = 0$ e $m + 5 = 0 \Rightarrow m = -5$

## EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

**1** Indique os itens cujas expressões representam polinômios:

**a)** $-2x^{10} + x^5 - 1$

**b)** $\frac{4}{x^2} + \frac{1}{x} - 3x + 5$

**c)** $(x + 4)^2$

**d)** $2x + 3^x - 1$

**e)** $\sqrt{x + 5}$

**f)** $\frac{1}{i}x^3 - 2x + 4i$

**g)** $2ix^2 - 1$

**2** Determine o grau de cada polinômio seguinte:

**a)** $3x^4 - 6x^2 + 5x - 1$

**b)** $2x - x^3$

**c)** $x^7 + x^2 + 1$

**d)** $(3x^2 + 10x)^7$

**e)** $(4x - 1) \cdot (x^2 - x - 3)$

**f)** $-3$

**g)** $x$

**h)** $x \cdot x^2 \cdot x^3 \cdot ... \cdot x^{15}$

**3** Identifique o coeficiente dominante de cada um dos polinômios seguintes:

**a)** $10x^5 - x^3 + 100x - 99$

**b)** $-\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}x^4 - x^2 + 2$

**c)** $-x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$

**d)** $x + x^2 + 2ix^3 + ix^4$

**e)** $(x + 5)^3$

**4** Determine $m \in \mathbb{R}$ de modo que o polinômio $p(x) = (m^2 - 2)x^4 + 6x^3 - 4x + 2$ tenha grau 4.

**5** Para que valores reais de **k** a expressão polinomial $(2k^2 - 8)x^3 - 2x^2 + 5x - 1$ tem grau 2?

**6** Discuta, em função do parâmetro real **m**, o grau de $p(x) = (m^2 - 16)x^8 + (m + 4)x^5 - x^4 + 3x - 1$.

**7** Responda: é possível que o grau do polinômio $p(x) = (m^2 - 4)x^5 + (m + 2)x^4 - 3x + 1$ seja:

**a)** 5? **b)** 4? **c)** 3?

Em caso afirmativo, dê, para cada item, as condições em que isso ocorre.

## Polinômio nulo

**Polinômio nulo** (ou polinômio identicamente nulo) é aquele que possui todos os coeficientes iguais a zero. Assim, o polinômio $a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$ é nulo se $a_n = a_{n-1} = \dots = a_2 = a_1 = a_0 = 0$.

Pelo fato de possuir todos os coeficientes iguais a zero, não se define o grau de um polinômio nulo.

EXEMPLO 3

A condição para que o polinômio $ax^2 + bx + (c + 1)$ seja nulo é que todos os seus coeficientes sejam iguais a zero, isto é:

$$a = 0;\ b = 0 \text{ e } c + 1 = 0 \Rightarrow c = -1$$

## Valor numérico

Seja $\alpha \in \mathbb{C}$ e **p** o polinômio definido por $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$.

O **valor numérico de p em α** é igual ao número complexo obtido quando substituímos **x** por **α** e efetuamos as operações indicadas, isto é:

$$p(\alpha) = a_n \cdot \alpha^n + a_{n-1} \cdot \alpha^{n-1} + \dots + a_1 \cdot \alpha + a_0$$

EXEMPLO 4

Seja o polinômio $p(x) = 2x^3 + x^2 - 4x + 1$.

Vamos calcular seus valores numéricos para $x = 2$ e para $x = i$.

- Substituímos **x** por 2:

$$p(2) = 2 \cdot 2^3 + 2^2 - 4 \cdot 2 + 1 = 16 + 4 - 8 + 1 \Rightarrow p(2) = 13$$

- Substituímos **x** por **i**:

$$p(i) = 2 \cdot i^3 + i^2 - 4i + 1 = -2i - \cancel{1} - 4i + \cancel{1} \Rightarrow p(i) = -6i$$

OBSERVAÇÕES

Considerando o polinômio $p(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1 \cdot x + a_0$, temos que:

- $p(1) = a_n \cdot 1^n + a_{n-1} \cdot 1^{n-1} + \dots + a_2 \cdot 1^2 + a_1 \cdot 1 + a_0 = a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1 + a_0$, isto é, p(1) é igual à soma dos coeficientes do polinômio.
- $p(0) = a_n \cdot 0^n + a_{n-1} \cdot 0^{n-1} + \dots + a_2 \cdot 0^2 + a_1 \cdot 0^1 + a_0 = a_0$, isto é, p(0) é igual ao coeficiente independente do polinômio.

## Raiz

Seja $\alpha \in \mathbb{C}$.

Dizemos que $\boldsymbol{\alpha}$ é raiz do polinômio $p(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$ se $p(\alpha) = 0$, isto é:

$$a_n \cdot \alpha^n + a_{n-1} \cdot \alpha^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot \alpha + a_0 = 0$$

**EXEMPLO 5**

O número $2i$ é uma raiz do polinômio $p(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 12$, pois $p(2i) = 0$, isto é:

$p(2i) = (2i)^3 + 3(2i)^2 + 4 \cdot 2i + 12 \Rightarrow p(2i) = 8i^3 + 12i^2 + 8i + 12 \Rightarrow p(2i) = -8i - 12 + 8i + 12 = 0$

Já o número $-2$ não é raiz desse polinômio, pois:

$$p(-2) = (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 + 4 \cdot (-2) + 12 = 8 \neq 0$$

## EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

**3** Sabendo que $x = -4$ é uma raiz do polinômio $p(x) = x^2 + mx - 3$, em que $m \in \mathbb{R}$, determine o valor de **m**.

**Solução:**

Como $-4$ é raiz, devemos ter $p(-4) = 0$, isto é:

$$(-4)^2 + m(-4) - 3 = 0 \Rightarrow 16 - 4m - 3 = 0 \Rightarrow m = \frac{13}{4}$$

## EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

**8** O polinômio $p(x) = ax + (b - 2)$ é nulo. Quais são os valores de **a** e **b**?

**9** Determine os valores de **a**, **b**, **c** e **d**, a fim de que $p(x) = (a - 1)x^3 + (2a - b + 3)x^2 + (b - c)x + (c - 2d)$ seja o polinômio nulo.

**10** Sendo $p(x) = x^2 - 5x + 3$, obtenha o valor numérico de **p** para:

**a)** $x = 0$ **c)** $x = 2$ **e)** $x = i$

**b)** $x = 1$ **d)** $x = 1 + i$ **f)** $x = \frac{3}{2}$

**11** Verifique quais dos números complexos **i**, 1, 3, $1 + 2i$ e 0 são raízes de $p(x) = x^3 - 5x^2 + 11x - 15$.

**12** Determine $m \in \mathbb{R}$ a fim de que $-1$ seja raiz do polinômio $x^2 - 4x + (m + 4)$.

**13** Determine **a** e **b** reais em $p(x) = ax^3 - 2x^2 + bx - 1$, sabendo que 1 é raiz de $p(x)$ e que $p(2) = 3$.

**14** Determine o polinômio **p** de grau 1, tal que $p(2) = 5$ e $p(-1) = 2$.

**PENSE NISTO:**

Como se escreve genericamente um polinômio de grau 1?

**15** O número **i** é raiz do polinômio $p(x) = x^2 + 3x + k$, em que **k** é uma constante complexa. Determine:

**a)** **k**;

**b)** $p(2 + i)$, usando o item *a*.

**16** Seja o polinômio:

$p(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + 49x^{49} + 50x^{50}$

**a)** Verifique se 0 é raiz de $p(x)$.

**b)** Determine a soma dos coeficientes de $p(x)$.

**17** Obtenha o polinômio do 2º grau que tem $2i$ como uma de suas raízes e cuja soma dos coeficientes é igual a 5.

## Polinômios iguais (ou idênticos)

Sejam **f** e **g** dois polinômios respectivamente definidos por:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad \text{e}$$
$$g(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

Dizemos que **f** e **g** são iguais (ou idênticos) se assumem o mesmo valor numérico para qualquer valor de **x**, isto é:

$$f = g \Leftrightarrow f(x) = g(x),\ \forall x \in \mathbb{C}$$

Vamos mostrar que dois polinômios, **f** e **g**, são iguais se e somente se os coeficientes de **f** e de **g** são ordenadamente iguais, isto é, os coeficientes dos termos de mesmo expoente de **x** são iguais:

$$a_n = b_n;\ a_{n-1} = b_{n-1};\ \ldots;\ a_1 = b_1 \ \text{ e } \ a_0 = b_0$$

- Se os coeficientes dos termos de mesmo expoente de **x** são ordenadamente iguais, isto é: $a_n = b_n$; $a_{n-1} = b_{n-1}$; ...; $a_1 = b_1$ e $a_0 = b_0$, temos, para todo $x \in \mathbb{C}$:

  $$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0 = g(x)$$

  e, desse modo, **f** e **g** são iguais.

- Se $f(x) = g(x),\ \forall x \in \mathbb{C}$, temos que $f(x) - g(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{C}$, isto é:

  $$(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0) - (b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0) = 0$$

  $$(a_n - b_n)x^n + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0) = 0$$

  Lembrando que um polinômio é nulo se todos os seus coeficientes são iguais a zero, temos:

  $$\begin{cases} a_n - b_n = 0 \Rightarrow a_n = b_n \\ a_{n-1} - b_{n-1} = 0 \Rightarrow a_{n-1} = b_{n-1} \\ \quad\vdots \\ a_1 - b_1 = 0 \Rightarrow a_1 = b_1 \\ a_0 - b_0 = 0 \Rightarrow a_0 = b_0 \end{cases}$$

  Isso mostra que os coeficientes de **f** e de **g** são ordenadamente iguais.

**EXEMPLO 6**

- Para que os polinômios $ax^2 + bx + c$ e $-3x^2 + 5x - 1$ sejam iguais, devemos ter: $a = -3$, $b = 5$ e $c = -1$.

- O polinômio $mx^3 + nx^2 + px + q$ é idêntico ao polinômio $4x^2 - x + 2$ se $m = 0$, $n = 4$, $p = -1$ e $q = 2$.

## EXERCÍCIO RESOLVIDO

**4** Determine os valores de **a** e **b** reais para os quais ocorre a igualdade: $\frac{x+3}{x^2-4} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-2}$; $x \neq -2$ e $x \neq 2$.

**Solução:**

$$\frac{x+3}{x^2-4} = \frac{a(x-2)+b(x+2)}{\underbrace{(x+2)\cdot(x-2)}_{x^2-4}} \Rightarrow a(x-2)+b(x+2) = x+3 \Rightarrow ax-2a+bx+2b = x+3$$

Agrupamos os termos semelhantes:

$$(a+b)x + (-2a+2b) = x+3$$

Da igualdade de polinômios segue:

$$\begin{cases} a+b=1 \\ -2a+2b=3 \end{cases}$$

cuja solução é: $a = -\frac{1}{4}$ e $b = \frac{5}{4}$.

## EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

**18** Calcule os valores de **a** e **b** reais de modo que seja satisfeita a igualdade $(a+3)x + (b-1) = 2x - 3$.

**19** Para que valores de **m**, **n** e **p**, com $\{m, n, p\} \subset \mathbb{C}$, ocorre a igualdade $mx^2 + (2n+3)x - p = 5x + i$?

**20** Determine **m** e **n** reais de modo que: $\frac{m}{x} + \frac{n}{x-1} = \frac{-3x+4}{x(x-1)}$.

**21** Obtenha os valores das constantes reais **a** e **b** para que se tenha: $\frac{a}{x-2} + \frac{bx}{x+2} = \frac{-x^2+3x+2}{x^2-4}$.

**22** Seja o polinômio do 1º grau $p(x) = ax + b$, em que **a** e **b** são coeficientes reais tais que:

$$\frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+1} = \frac{2x-7}{x^2-x-2}$$

Qual é o valor de $p(i) + p(-i)$?

# Adição, subtração e multiplicação de polinômios

Vamos revisar, por meio de exemplos, as operações de adição, subtração e multiplicação de polinômios, estudadas no Ensino Fundamental.

**EXEMPLO 7**

Dados os polinômios $f(x) = -7x^3 + 5x^2 - x + 4$ e $g(x) = -2x^2 + 8x - 7$, vamos obter $f(x) + g(x)$:

$$(-7x^3 + 5x^2 - x + 4) + (-2x^2 + 8x - 7) = -7x^3 + 5x^2 - 2x^2 - x + 8x + 4 - 7 =$$
$$= -7x^3 + 3x^2 + 7x - 3$$

Lembre que a soma de dois polinômios **f** e **g** é o polinômio obtido quando adicionamos os coeficientes dos termos semelhantes de **f** e de **g**.

**EXEMPLO 8**

Dados os polinômios $f(x) = 4x^2 - 5x + 6$ e $g(x) = 3x - 8$, vamos obter $f(x) - g(x)$:

$$(4x^2 - 5x + 6) - (3x - 8) = 4x^2 - 5x + 6 - 3x + 8 = 4x^2 - 8x + 14$$

Note que a diferença entre os polinômios **f** e **g** é o polinômio obtido quando adicionamos **f** ao oposto de **g**, isto é, $f - g = f + (-g)$.

**EXEMPLO 9**

Dados os polinômios $f(x) = 3x^2 - 5x + 8$ e $g(x) = -2x + 1$, vamos determinar $f(x) \cdot g(x)$:

$$(3x^2 - 5x + 8) \cdot (-2x + 1) = -6x^3 + 3x^2 + 10x^2 - 5x - 16x + 8 =$$
$$= -6x^3 + 13x^2 - 21x + 8$$

Lembre que o produto dos polinômios **f** e **g** corresponde ao polinômio obtido quando multiplicamos cada um dos termos de **f** por todos os termos de **g** e adicionamos os produtos obtidos.

## EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

**5** Os polinômios $f(x) = -2x + a$ e $g(x) = x + b$, com **a** e **b** constantes reais, são tais que $f(x) \cdot g(x) = -2x^2 - 3x - 1$. Determine **a** e **b**.

**Solução:**

Temos:

$$f(x) \cdot g(x) = (-2x + a) \cdot (x + b) = -2x^2 - 2bx + ax + ab = -2x^2 + x(-2b + a) + ab$$

Daí:

$$-2x^2 + x \cdot (-2b + a) + ab = -2x^2 - 3x - 1 \Rightarrow \begin{cases} -2b + a = -3 & (1) \\ ab = -1 & (2) \end{cases}$$

De (2), temos $a = -\dfrac{1}{b}$ e, substituindo em (1), obtemos:

$$-2b - \frac{1}{b} = -3 \Rightarrow 2b^2 - 3b + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = \dfrac{1}{2} \Rightarrow a = -2 \\ \text{ou} \\ b = 1 \Rightarrow a = -1 \end{cases}$$

Assim, podemos ter $\left(a = -2 \text{ e } b = \dfrac{1}{2}\right)$ ou $(a = -1 \text{ e } b = 1)$.

**6** Considerando que f(x) é um polinômio de grau 4 e g(x) é um polinômio de grau 3, determine o grau de:

**a)** $f(x) + g(x)$

**b)** $f(x) \cdot g(x)$

**Solução:**

**a)** Na adição de polinômios, só podemos adicionar os termos semelhantes, isto é, aqueles cujas potências de **x** têm o mesmo expoente.

Como somente o polinômio f(x) apresenta termo em $x^4$, então o grau de $f(x) + g(x)$ é 4.

**b)** Quando multiplicamos polinômios, devemos lembrar a propriedade de potências: $x^\alpha \cdot x^\beta = x^{\alpha + \beta}$. Assim, o grau de $f(x) \cdot g(x)$ é $4 + 3 = 7$.

**PENSE NISTO:**

Neste exercício, qual seria o grau do polinômio $f(x) + x \cdot g(x)$?

## EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

**23** Dadas as expressões polinomiais $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$, $g(x) = x^3 - x + 1$ e $h(x) = -x^2 + x - 4$, determine:

**a)** $f(x) + g(x)$
**b)** $g(x) - h(x)$
**c)** $f(x) - g(x) - h(x)$
**d)** $f(x) \cdot h(x)$
**e)** $x \cdot f(x) + 2 \cdot g(x)$

**24** Sejam $p_1(x) = ax^2 + bx + c$ e $p_2(x) = bx^2 + 4x - 3$. Sabendo que $p_1(x) + p_2(x)$ é o polinômio nulo, determine os valores de **a**, **b** e **c**.

**25** Sejam os polinômios $f(x) = 3x + 2i$ e $g(x) = ix$ e **i** a unidade imaginária em $\mathbb{C}$. Obtenha os polinômios:

**a)** $f(x) - g(x)$
**b)** $i \cdot g(x) + f(x)$
**c)** $g(x) \cdot f(x)$

**26** Determine os valores das constantes reais **a** e **b** que satisfazem:

$$(ax + 5)^2 + (b - 2x)^2 = 13x^2 + 42x + 34$$

**27** Sejam f(x) e g(x) dois polinômios de grau 4. O que se pode afirmar em relação ao grau do polinômio:

**a)** $f(x) \cdot g(x)$?
**b)** $f(x) + g(x)$?
**c)** $f(x) - g(x)$?
**d)** $x^2 \cdot f(x) + x \cdot g(x)$?

**28** Os polinômios f(x), g(x) e h(x) têm graus 2, 3 e 5, respectivamente. Classifique como verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**) as afirmações seguintes:

**a)** $f(x) + g(x) + h(x)$ é um polinômio de grau 5.
**b)** $f(x) - g(x)$ pode ter grau 2.
**c)** $f(x) \cdot g(x) + h(x)$ pode ser polinômio nulo.
**d)** $f(x) \cdot g(x) + h(x)$ pode ter grau 3.

## Divisão de polinômios

Sejam dois polinômios f(x) e g(x), com $g(x) \neq 0$.

Dividir o dividendo f(x) pelo divisor g(x) é determinar dois outros polinômios, o quociente q(x) e o resto r(x), que verifiquem as seguintes condições:

- $f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$
- grau de r(x) < grau de g(x) ou $r(x) = 0$ (isto é, r(x) é o polinômio nulo)

Vamos apresentar o processo mais geral usado para dividir polinômios, baseado na divisão entre números naturais e conhecido como **método da chave**.

Acompanhe, inicialmente, a divisão de 195 por 8:

$$\begin{array}{r|l} 195 & 8 \\ \cline{2-2} -16\phantom{0} & 24 \\ \cline{1-1} 35 & \\ -32 & \\ \cline{1-1} 3 & \end{array}$$

Observe que a divisão inteira está encerrada, pois 3 < 8. Note que $195 = 8 \cdot 24 + 3$.

Vamos agora dividir dois polinômios:

$$f(x) = 6x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 1 \text{ por } g(x) = 2x^2 + x - 3$$

Dispomos o dividendo (f(x)) e o divisor (g(x)), conforme o esquema usado na divisão de números naturais.

- 1º passo: Dividimos o termo de maior grau de f(x) pelo termo de maior grau de g(x):

$$\frac{6x^4}{2x^2} = 3x^2$$

obtendo, assim, o 1º termo do quociente q(x).

$$\begin{array}{r|l} 6x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 1 & 2x^2 + x - 3 \\ \cline{2-2} & 3x^2 \end{array}$$

- 2º passo: Multiplicamos o quociente obtido ($3x^2$) por g(x) e subtraímos de f(x), isto é, adicionamos f(x) com o oposto do produto obtido. Obtemos um resto parcial.

$3x^2 \cdot (2x^2 + x - 3) = 6x^4 + 3x^3 - 9x^2$

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
 & \cancel{6x^4} & -\ x^3 & +\ 3x^2 & -\ x & +\ 1 & \big|\ 2x^2 + x - 3 \\
\oplus & \cancel{-6x^4} & -\ 3x^3 & +\ 9x^2 & & & \ \ 3x^2 \\
\hline
 & & -\ 4x^3 & +\ 12x^2 & -\ x & +\ 1 & \leftarrow \text{resto parcial}
\end{array}
$$

- 3º passo: Repetimos o procedimento anterior com o resto parcial obtido até que o grau do resto se torne menor que o grau do divisor (ou o resto seja o polinômio nulo):

$\dfrac{-4x^3}{2x^2} = -2x;\ \ -2x \cdot (2x^2 + x - 3) = -4x^3 - 2x^2 + 6x$

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
 & \cancel{6x^4} & -\ x^3 & +\ 3x^2 & -\ x & +\ 1 & \big|\ 2x^2 + x - 3 \\
\oplus & \cancel{-6x^4} & -\ 3x^3 & +\ 9x^2 & & & \ \ 3x^2 - 2x \\
\hline
 & & -\ \cancel{4x^3} & +\ 12x^2 & -\ x & +\ 1 & \\
 & & +\ \cancel{4x^3} & +\ 2x^2 & -\ 6x & & \\
\hline
 & & & 14x^2 & -\ 7x & +\ 1 & \leftarrow \text{novo resto parcial}
\end{array}
$$

$\dfrac{14x^2}{2x^2} = 7;\ \ 7 \cdot (2x^2 + x - 3) = 14x^2 + 7x - 21$

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
 & \cancel{6x^4} & -\ x^3 & +\ 3x^2 & -\ x & +\ 1 & \big|\ 2x^2 + x - 3 \\
\oplus & \cancel{-6x^4} & -\ 3x^3 & +\ 9x^2 & & & \ \ 3x^2 - 2x + 7 \\
\hline
 & & -\ \cancel{4x^3} & +\ 12x^2 & -\ x & +\ 1 & \\
 & & +\ \cancel{4x^3} & +\ 2x^2 & -\ 6x & & \\
\hline
 & & & \cancel{14x^2} & -\ 7x & +\ 1 & \text{O grau do resto é} \\
 & & + & -\ \cancel{14x^2} & -\ 7x & +\ 21 & \text{menor que o grau} \\
\hline
 & & & & -\ 14x & +\ 22 & \leftarrow \text{do divisor. A divisão está encerrada.}
\end{array}
$$

Daí: $q(x) = 3x^2 - 2x + 7$ e $r(x) = -14x + 22$.

Observe que $f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$. De fato:

$$\underbrace{(2x^2 + x - 3)}_{g(x)} \cdot \underbrace{(3x^2 - 2x + 7)}_{q(x)} + \underbrace{(-14x + 22)}_{r(x)} =$$

$$= 6x^4 - 4x^3 + 14x^2 + 3x^3 - 2x^2 + 7x - 9x^2 + 6x - 21 - 14x + 22 =$$

$$= 6x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 1 = f(x)$$

**PENSE NISTO:**

Se **f** é um polinômio de grau **n** e **g** é um polinômio de grau **m**, com $n \geqslant m$, na divisão de **f** por **g**, qual é o grau do quociente obtido?

**EXEMPLO 10**

Vamos efetuar a divisão de $f(x) = 3x^3 - 14x^2 + 23x - 10$ por $g(x) = x^2 - 4x + 5$.

$$\begin{array}{rrrr|l}
\cancel{3x^3} & -\ 14x^2 & +\ 23x & -\ 10 & x^2 - 4x + 5 \\ \cline{5-5}
\cancel{-3x^3} & +\ 12x^2 & -\ 15x & & 3x - 2 \\ \cline{1-3}
& \cancel{-2x^2} & +\ \cancel{8x} & -\ \cancel{10} & \\
+ & \cancel{2x^2} & -\ \cancel{8x} & +\ \cancel{10} & \\ \cline{2-4}
& & & 0 &
\end{array}$$

Assim, $q(x) = 3x - 2$ e $r(x) = 0$, ou seja, $r(x)$ é o polinômio nulo.

**OBSERVAÇÃO**

Se a divisão de $f(x)$ por $g(x)$, com $g(x) \neq 0$, é exata, isto é, $r(x) = 0$, dizemos que $f(x)$ é divisível por $g(x)$, ou ainda, $g(x)$ divide $f(x)$.

# EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

**7** Para que valores de **a** e **b**, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$, o polinômio $-2x^3 + ax + b$ é divisível pelo polinômio $-x^2 + 6x - 1$?

**Solução:**

Devemos efetuar a divisão e impor que o resto seja o polinômio nulo. Temos:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
\cancel{-2x^3} & + & ax & + & b & -x^2 + 6x - 1 \\ \cline{6-6}
\cancel{+2x^3} & -\ 12x^2\ + & 2x & & & 2x + 12 \\ \cline{1-3}
& \cancel{-12x^2}\ + & (a + 2)x & + & b & \\
& \cancel{+12x^2}\ - & 72x & + & 12 & \\ \cline{2-5}
& \text{resto} \rightarrow & (a - 70)x & + & (b + 12) &
\end{array}$$

O polinômio $(a - 70)x + (b + 12)$ é nulo se todos os seus coeficientes forem iguais a zero, isto é, se:

$$\begin{cases} a - 70 = 0 \Rightarrow a = 70 \\ b + 12 = 0 \Rightarrow b = -12 \end{cases}$$

**8** Dividindo-se o polinômio $-x^3 - 4x^2 + 3$ por um polinômio **p**, obtêm-se $-x - 6$ como quociente e $-12x + 3$ como resto. Determine o polinômio **p**.

**Solução:**

Do enunciado, podemos escrever:

$$\underbrace{(-x^3 - 4x^2 + 3)}_{f(x)} = p(x) \cdot \underbrace{(-x - 6)}_{q(x)} + \underbrace{(-12x + 3)}_{r(x)}$$

Como o grau de $f(x)$ é 3 e o grau de $q(x)$ é 1, o grau de $p(x)$ deve ser igual a 2 para que a igualdade acima seja válida.

Façamos $p(x) = ax^2 + bx + c$; devemos determinar os valores das constantes **a**, **b** e **c**:

$-x^3 - 4x^2 + 3 = (ax^2 + bx + c) \cdot (-x - 6) + (-12x + 3) \Rightarrow$

$\Rightarrow -x^3 - 4x^2 + 3 = -ax^3 - 6ax^2 - bx^2 - 6bx - cx - 6c - 12x + 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow -x^3 - 4x^2 + 3 = -ax^3 + x^2(-6a - b) + x(-6b - c - 12) + (3 - 6c) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} -1 = -a \Rightarrow a = 1 \\ -4 = -6a - b;\ \text{como } a = 1, \text{ temos: } -4 = -6 - b \Rightarrow b = -2 \\ 0 = -6b - c - 12;\ \text{como } b = -2, \text{ temos: } 0 = 12 - c - 12 \Rightarrow c = 0 \\ 3 = 3 - 6c \Rightarrow c = 0 \end{cases}$$

Desse modo, $p(x) = 1 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 0 = x^2 - 2x$

**PENSE NISTO:**

Proponha outro modo de resolver este exercício.

**PENSE NISTO:**

- Se $g(x) = 0$ e $h(x) \neq 0$, qual é o resto e qual é o quociente da divisão de $g(x)$ por $h(x)$?
- E se $g(x)$ tem grau **n** e $h(x)$ tem grau **m** (com $m > n$), qual é o resto e qual é o quociente da divisão de $g(x)$ por $h(x)$?

## EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

**29** Determine o quociente q(x) e o resto r(x) da divisão de f(x) por g(x) em cada caso:

**a)** $f(x) = 3x^2 + 5x + 7$ e $g(x) = 3x - 1$

**b)** $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 5x + 1$ e $g(x) = x^2 - 1$

**c)** $f(x) = 5x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 4x - 1$ e $g(x) = x^2 - 4$

**d)** $f(x) = 3x^5 - x^3 + 4x^2 - 2x + 1$ e $g(x) = x^3 - x^2 + 1$

**e)** $f(x) = 4x - 1$ e $g(x) = x^2 - 2x + 3$

**f)** $f(x) = -5x^3 + 4x^2 + 7x - 11$ e $g(x) = x$

**g)** $f(x) = x^2 + 2ix - 3$ e $q(x) = x - i$, em que **i** é a unidade imaginária dos números complexos.

**30** Verifique, em cada caso, se o polinômio f(x) é divisível por g(x), exibindo o quociente dessa divisão:

**a)** $f(x) = x^2 - x - 6$ e $g(x) = x + 2$

**b)** $f(x) = x^4 + x^2 - 1$ e $g(x) = x^2 + 1$

**c)** $f(x) = 4x^3 + x + 1$ e $g(x) = 2x^2 - x + 1$

**d)** $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x + 1$ e $g(x) = 2x + 1$

**31** Determine $m \in \mathbb{R}$ a fim de que $x^2 + 2mx - 5$ seja divisível por $x - 1$.

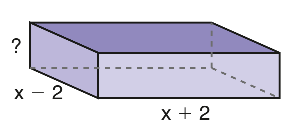
**32** Dividindo o polinômio $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ por g(x), obtemos o quociente $q(x) = 1 + x$ e o resto $r(x) = x + 1$. Determine g(x).

**33** Dividindo-se um polinômio de grau 7 por um de grau 3, obtêm-se um polinômio quociente (**q**) e um polinômio resto (**r**). O que se pode afirmar em relação ao grau de **q**? E ao grau de **r**?

**34** Determine **m** e **n** reais, de modo que o polinômio $-2x^3 + mx^2 + n$ seja divisível por $x^2 + x + 1$.

**35** Em um retângulo, o comprimento é expresso por $x + 2$, e sua área é expressa por $3x^2 + 5x - 2$. Como se expressa a largura desse retângulo?

**36** Observe as dimensões do paralelepípedo seguinte:




Sabe-se que o volume desse paralelepípedo é expresso por $2x^3 + x^2 - 8x - 4$.

**a)** Expresse, em função de **x**, a medida da altura do paralelepípedo.

**b)** Existe algum polinômio que represente a medida da diagonal desse sólido? Determine-o, em caso afirmativo.

**c)** Existe algum polinômio que represente a área total desse sólido? Determine-o, em caso afirmativo.

**37** Dividindo um polinômio f(x) pelo polinômio $x^2 + x + 1$, obtemos o quociente $q(x) = x^2 - x$ e o resto $r(x) = -x + 13$. Determine f(x).

## Divisões por x – a

Um caso particular importante na divisão de polinômios é aquele em que o divisor é um polinômio do 1º grau, com coeficiente dominante unitário, isto é, um polinômio do tipo $x - a$ ou $x + a$, sendo $a \in \mathbb{C}$. Esse caso de divisão será frequentemente usado no capítulo seguinte.

Considerando como dividendo um polinômio **f** de grau **n** (com $n \geqslant 1$), temos:

$$\begin{array}{l|l} f(x) & x - a \\ \cline{2-2} \downarrow & \quad q(x) \\ r(x) & \end{array}$$

O grau de $q(x)$ é $n - 1$.

Como o grau do resto deve ser menor que o grau do divisor, temos:

$$\text{grau } r(x) < 1 \Rightarrow \underbrace{\text{grau } r(x) = 0}_{\substack{r(x) = k \\ (k \in \mathbb{C},\ k \neq 0)}} \text{ ou } \underbrace{r(x) = 0}_{\substack{r(x) \text{ é o} \\ \text{polinômio nulo}}}$$

## Teorema do resto

Vamos efetuar a divisão de $f(x) = 4x^3 + x^2 - 5x + 8$ por $g(x) = x - 2$ usando o método da chave:

$$\begin{array}{rrrr|l}
\cancel{4x^3} + & x^2 - & 5x + & 8 & x - 2 \\ \cline{5-5}
\cancel{-4x^3} + & 8x^2 & & & 4x^2 + 9x + 13 \\ \cline{1-3}
& \cancel{9x^2} - & 5x + & 8 & \\
& \cancel{-9x^2} + & 18x & & \\ \cline{2-3}
& & \cancel{13x} + & 8 & \\
& & \cancel{-13x} + & 26 & \\ \cline{3-4}
& & & 34 &
\end{array}
\qquad
\begin{cases} q(x) = 4x^2 + 9x + 13 \\ r(x) = 34 \end{cases}$$

Observe que o resto também pode ser obtido calculando-se o valor numérico do polinômio dividendo (**f**) para $x = 2$:

$$f(2) = 4 \cdot 2^3 + 2^2 - 5 \cdot 2 + 8 \Rightarrow f(2) = 32 + 4 - 10 + 8 \Rightarrow f(2) = 34$$

Vamos agora enunciar e demonstrar o teorema do resto:

> O resto da divisão de um polinômio $f(x)$ por $x - a$ é igual a $f(a)$.

**Demonstração:**

Da divisão de $f(x)$ por $x - a$, podemos escrever:

$$f(x) = (x - a) \cdot q(x) + r(x)$$

em que $r(x) = r \neq 0$ é um polinômio constante (pois $r(x)$ tem grau zero) ou $r(x)$ é o polinômio nulo.

Calculando os valores desses polinômios para $x = a$, temos:

$$f(a) = \underbrace{(a - a) \cdot q(a)}_{= 0} + r, \text{ isto é, } r = f(a).$$

### EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

**9** Qual é o resto da divisão de $p(x) = 3x^2 - 17x + 15$ por $x - 2$? E por $x + 1$?

**Solução:**

Não é necessário efetuar a divisão para sabermos o valor do resto.

Então, vejamos:

- Na divisão de $p(x)$ por $x - 2$ temos:
  A raiz do divisor é: $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$.
  Pelo teorema do resto, sabemos que:
  $$r = p(2) = 3 \cdot 2^2 - 17 \cdot 2 + 15 = 12 - 34 + 15 = -7$$
- Na divisão de $p(x)$ por $x + 1$, o resto é $r = p(-1)$, isto é, $r = 3 \cdot (-1)^2 - 17 \cdot (-1) + 15 = 35$.

**10** Sejam 5 e 2, respectivamente, os restos da divisão de um polinômio **f** por $x - 3$ e por $x + 1$. Qual é o resto da divisão de **f** por $(x - 3) \cdot (x + 1)$?

**Solução:**

Pelo teorema do resto, temos:

$$f(3) = 5 \quad (1) \qquad \text{e} \qquad f(-1) = 2 \quad (2)$$

Quando dividimos **f** por $g(x) = (x - 3) \cdot (x + 1) = x^2 - 2x - 3$, temos grau $r \leqslant 1$ (pois grau $r <$ grau g e grau $g = 2$). Assim, escrevemos $r(x) = ax + b$, com **a** e **b** reais.

Devemos determinar **a** e **b**. Temos, $\forall x \in \mathbb{C}$:

$$f(x) = \underbrace{(x + 1) \cdot (x - 3)}_{g(x)} \cdot q(x) + \underbrace{ax + b}_{r(x)}$$

Calculando o valor numérico desse polinômio em $x = 3$ e em $x = -1$, obtemos:

$$\left.\begin{array}{l} f(3) = \underbrace{(3 + 1) \cdot (3 - 3) \cdot q(3)}_{= 0} + a \cdot 3 + b \overset{(1)}{\Rightarrow} 3a + b = 5 \\ f(-1) = \underbrace{(-1 + 1) \cdot (-1 - 3) \cdot q(-1)}_{= 0} + a(-1) + b \overset{(2)}{\Rightarrow} -a + b = 2 \end{array}\right\}$$

Resolvendo esse sistema, encontramos $a = \frac{3}{4}$ e $b = \frac{11}{4}$. Dessa forma, o resto é $r(x) = \frac{3}{4}x + \frac{11}{4}$.

Uma consequência importante do teorema do resto é o **teorema de D'Alembert**, cujo enunciado é:

Um polinômio **f** é divisível por $x - a$ se, e somente se, **a** for raiz de **f**.

**Demonstração:**

Há duas implicações a provar:

1ª) **f** é divisível por $x - a \Rightarrow$ **a** é raiz de **f**.

Se **f** é divisível por $x - a$, temos $r = 0$ e, pelo teorema do resto, $r = f(a) = 0$, do que concluímos que **a** é raiz de **f**.

2ª) **a** é raiz de **f** $\Rightarrow$ **f** é divisível por $x - a$.

Como **a** é raiz de **f**, temos que $f(a) = 0$; pelo teorema do resto, o resto **r** da divisão de **f** por $x - a$ é igual a $f(a)$. Assim, $r = f(a) = 0$, o que mostra que **f** é divisível por $x - a$.

## EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

**11** Determine $m \in \mathbb{R}$, de modo que $f(x) = -2x^3 + x^2 + mx + 5$ seja divisível por $x - 2$.

**Solução:**

Pelo teorema de D'Alembert, $x = 2$ deve ser raiz de **f**, isto é, $f(2) = 0$:

$$-2 \cdot 2^3 + 2^2 + m \cdot 2 + 5 = 0 \Rightarrow 2m - 7 = 0 \Rightarrow m = \frac{7}{2}$$

## EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

**38** Aplicando o teorema do resto, determine o resto da divisão de f(x) por g(x) em cada caso:

**a)** $f(x) = 3x^2 - x + 4$ e $g(x) = x - 2$

**b)** $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 5x + 1$ e $g(x) = x + 2$

**c)** $f(x) = (4 - x)^{10} + 3x$ e $g(x) = x - 4$

**d)** $f(x) = 2x^5 + x^3 - x^2 + 1$ e $g(x) = x$

**e)** $f(x) = x^{19} + x^{11} + 7x^4 + 3$ e $g(x) = x - 1$

**f)** $f(x) = 4x^2 - x - 1$ e $g(x) = x - 2i$, em que **i** é a unidade imaginária em $\mathbb{C}$.

**39** Em cada caso, p(x) é divisível por q(x). Obtenha o valor real de **m**:

**a)** $p(x) = -3x^2 + 4x + m$ e $q(x) = x - 2$

**b)** $p(x) = 4x^3 - 5x^2 + mx + 3$ e $q(x) = x + 3$

**c)** $p(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^2 + mx - 1$ e $q(x) = x - 1$

**40** Qual é o resto da divisão de $(x^8 + 1) \cdot (3 - x^{29} - 2x^{17})$ por $x - 1$?

**41** Sabendo que o polinômio $2x^2 + mx + n$, com $\{m, n\} \subset \mathbb{R}$, é divisível por $x - 1$ e que, quando dividido por $x + 2$, deixa resto igual a 6, determine **m** e **n**.

**42** Um polinômio p(x), dividido por $x + 2$, dá resto 3 e, dividido por $x - 5$, dá resto $-2$. Qual é o resto da divisão de p(x) por $x^2 - 3x - 10$?

**43** Um polinômio p(x) é tal que $p(1) = 4$. O quociente da divisão de p(x) por $(x - 1)$ é dividido por $(x - 2)$ e obtém-se resto 3. Determine o resto da divisão de p(x) por $(x - 1) \cdot (x - 2)$.

## Dispositivo prático de Briot-Ruffini

Sejam $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, com $a_0 \neq 0$, um polinômio de grau **n**, e $g(x) = x - a$.

Quando dividimos f(x) por g(x), obtemos, como quociente, um polinômio **q** de grau $n - 1$, dado por $q(x) = q_0x^{n-1} + q_1x^{n-2} + \ldots + q_{n-2}x + q_{n-1}$.

Vamos determinar os coeficientes $\mathbf{q_0}$, $\mathbf{q_1}$, ..., $\mathbf{q_{n-2}}$, $\mathbf{q_{n-1}}$ de **q**, bem como o resto **r** dessa divisão.

Como $f = g \cdot q + r$, podemos escrever, para todo $x \in \mathbb{C}$:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = (x - a) \cdot (q_0x^{n-1} + q_1x^{n-2} + \ldots + q_{n-2}x + q_{n-1}) + r$$

Multiplicando os polinômios e agrupando os termos semelhantes, temos:

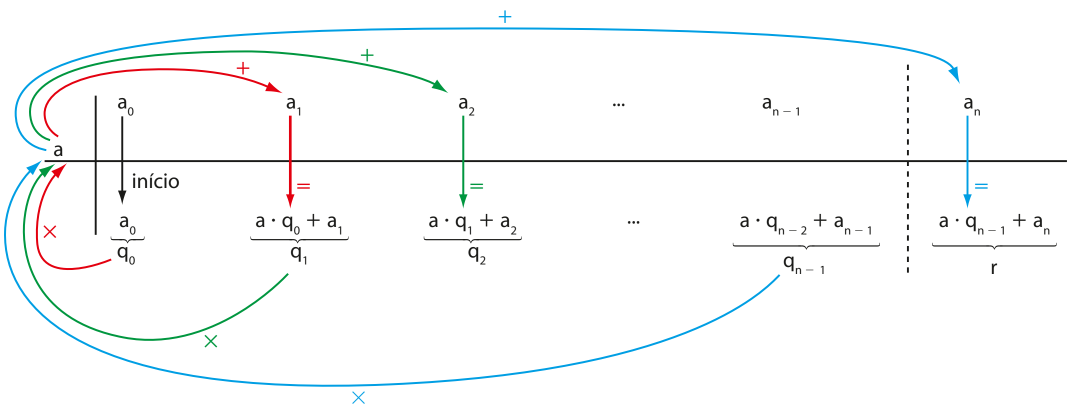
$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n =$$
$$= q_0x^n + (q_1 - aq_0) \cdot x^{n-1} + (q_2 - aq_1) \cdot x^{n-2} + \ldots + (q_{n-1} - a \cdot q_{n-2}) \cdot x + (r - a \cdot q_{n-1})$$

Igualando os coeficientes dos termos de mesmo grau, obtemos:

- $q_0 = a_0$
- $q_1 - aq_0 = a_1 \Rightarrow q_1 = a_1 + aq_0$
- $q_2 - aq_1 = a_2 \Rightarrow q_2 = a_2 + aq_1$

  $\vdots \qquad\qquad \vdots$
- $q_{n-1} - aq_{n-2} = a_{n-1} \Rightarrow q_{n-1} = a_{n-1} + aq_{n-2}$
- $r - aq_{n-1} = a_n \Rightarrow r = aq_{n-1} + a_n$

Observe, a seguir, um método mais rápido e simples, chamado dispositivo prático de Briot-Ruffini, para a determinação dos coeficientes $\mathbf{q_0}$, $\mathbf{q_1}$, ..., $\mathbf{q_{n-1}}$ e do resto **r** da divisão:




Vamos agora acompanhar a "montagem" do dispositivo usando um exemplo numérico.

Seja a divisão de $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ por $g(x) = x - 3$.

- 1º passo: Calculamos a raiz do divisor g(x) e, ao seu lado, colocamos os coeficientes ordenados do dividendo f(x), segundo potências de expoentes decrescentes de **x**:

  Raiz de g(x): $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

$$\begin{array}{c|cccc} \small\text{raiz de } g(x) & & \small\text{coeficientes ordenados de } f(x) & & \\ 3 & 1 & -4 & 5 & -2 \\ \hline & & & & \end{array}$$

- 2º passo: Abaixamos o primeiro coeficiente do dividendo (1) e o multiplicamos pela raiz do divisor ($1 \cdot 3 = 3$).

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & 1 & -4 & 5 & -2 \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$

- 3º passo: Adicionamos o produto obtido (3) ao coeficiente seguinte (−4). A soma (3 + (−4) = −1) é colocada abaixo desse coeficiente.

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & 1 & -4 & 5 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & & \end{array}$$

- 4º passo: Com a soma obtida (−1), repetimos as operações (multiplicamos pela raiz e adicionamos o coeficiente seguinte), e assim por diante.

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & 1 & -4 & 5 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & 2 & 4 \end{array}$$

O último dos números obtidos no dispositivo ou algoritmo de Briot-Ruffini é o resto da divisão. Assim, $r(x) = 4$.

Os demais números obtidos nesse algoritmo correspondem aos coeficientes ordenados (segundo potências de expoentes decrescentes de **x**) do quociente da divisão. Assim:

$$q(x) = 1 \cdot x^2 - 1 \cdot x + 2 = x^2 - x + 2$$

## EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

**12** Obtenha o quociente **q** e o resto **r** da divisão de $-2x^4 + x^3 - 5x^2 - x + 1$ por $x + 2$.

**Solução:**

Temos:

$$\begin{array}{c|cccc|c} -2 & -2 & 1 & -5 & -1 & 1 \\ \hline & -2 & 5 & -15 & 29 & -57 \end{array}$$

$q = -2x^3 + 5x^2 - 15x + 29$ e $r = -57$

**13** Faça a divisão de $f(x) = 2x^3 - 5x + 1$ por $x - 3$.

**Solução:**

Convém, inicialmente, notar que $f(x) = 2 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 1$.

Temos:

$$\begin{array}{c|ccc|c} 3 & 2 & 0 & -5 & 1 \\ \hline & 2 & 6 & 13 & 40 \end{array}$$

O quociente **q** é $2x^2 + 6x + 13$, e o resto **r** é 40.

**14** Determine $a \in \mathbb{R}$ de modo que $2x^3 - 4x^2 - 5x + a$ seja divisível por $x - 3$.

**Solução:**

Construímos o dispositivo de Briot-Ruffini:

$$\begin{array}{c|ccc|c} 3 & 2 & -4 & -5 & a \\ \hline & 2 & 2 & 1 & a + 3 \end{array}$$

Devemos ter resto igual a 0, isto é:

$$a + 3 = 0 \Rightarrow a = -3$$

## EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

**44** Em cada caso, obtenha o quociente e o resto da divisão de $f(x)$ por $g(x)$, utilizando o dispositivo de Briot-Ruffini:

**a)** $f(x) = -2x^3 + 4x^2 - 5x + 1$ e $g(x) = x - 3$

**b)** $f(x) = (3x + 2)^2$ e $g(x) = x + 2$

**c)** $f(x) = x^4 - 3x^2 + x - 2$ e $g(x) = x + 1$

**d)** $f(x) = x^3 - 1$ e $g(x) = x$

**45** Dividindo-se $x^3 - 2x^2 + mx + 4$ (com $m \in \mathbb{R}$) por $x + 2$, obtém-se o quociente $x^2 - 4x + 5$. Qual é o resto dessa divisão?

**46** O polinômio $f(x) = 4x^4 - 5x^2 + 2x + m$ (com $m \in \mathbb{R}$) é divisível por $x - 2$.

**a)** Qual é o valor de **m**?

**b)** Qual é o quociente e o resto da divisão de $f(x)$ por $x + 3$?

**47** Qual é o quociente e o resto da divisão de $(x^4 + 1)^2$ por $x + 1$?

**48** O polinômio $f(x) = 2x^3 + mx + n$, em que $\{m, n\} \subset \mathbb{R}$, é divisível por $x + 1$; dividindo $f(x)$ por $x + \frac{1}{2}$, obtemos resto igual a 2. Determine o valor de $m + n$.

**49** Determine o valor da constante real **k** a fim de que a divisão de $2x^3 - 3x^2 + x + 6k$ por $x - 3$ seja exata.

## DESAFIO

O polinômio $p(x) = x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 26x + 15$ é divisível por $x^2 - 2x + 5$.
Para que valores reais de **x** tem-se $p(x) \geqslant 0$?