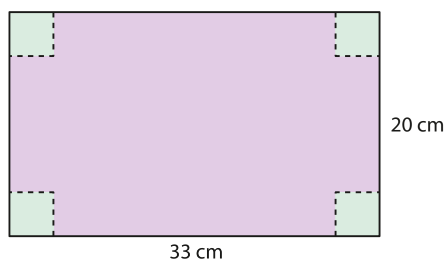
CAPÍTULO 9

# Equações algébricas

## Introdução

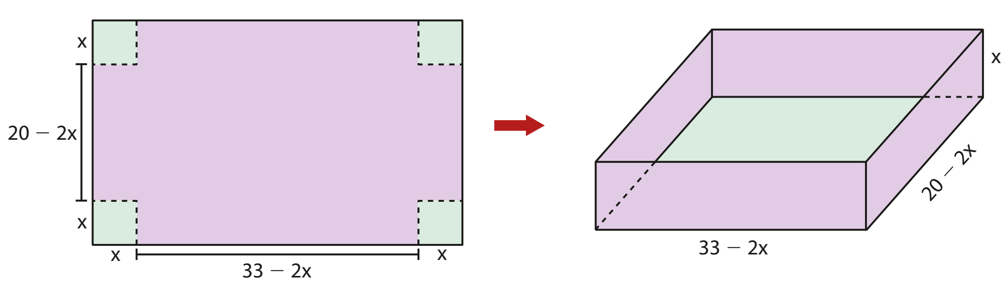
Eduardo construiu uma caixa em forma de bloco retangular, sem tampa, a partir de uma folha retangular de cartolina que media 33 cm por 20 cm, recortando um quadrado em cada vértice do retângulo, conforme mostra a figura.




Pronta a caixa, seu colega Toninho perguntou qual era a medida do lado do quadrado recortado. Eduardo respondeu: "Vou lhe dar uma pista: a caixa fica completamente cheia se você despejar um saco de 1,05 litro (1 050 $cm^3$) de areia".

Como Toninho deverá proceder para descobrir a medida do lado do quadrado?

Inicialmente, ele deverá identificar as dimensões da caixa:




**x** é a medida do lado do quadrado

O volume de um bloco retangular (paralelepípedo retângulo) é dado por:

$$V = (\text{comprimento}) \cdot (\text{largura}) \cdot (\text{altura})$$

Logo,

$$V = (33 - 2x) \cdot (20 - 2x) \cdot x = 4x^3 - 106x^2 + 660x$$

Assim, a condição do problema é:

$$4x^3 - 106x^2 + 660x = 1\,050$$

e o valor de **x** procurado é uma solução da equação:

$$2x^3 - 53x^2 + 330x - 525 = 0$$

Essa equação é um exemplo de **equação algébrica** ou **polinomial**, objeto de estudo deste capítulo.

# Definição

**Equação polinomial** ou **algébrica** é toda equação redutível à forma $p(x) = 0$, em que:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \text{ com } a_n \neq 0,$$

é um polinômio de grau **n**, sendo $n \geqslant 1$, com coeficientes em $\mathbb{C}$, e cuja incógnita **x** pode assumir um valor qualquer em $\mathbb{C}$.

**EXEMPLO 1**

São exemplos de equações polinomiais:

- $4x + 5 = 0$
- $3x^2 + ix - 1 = 0$
- $x^4 - x^2 + x + 3 = 0$
- $x^2 - 2x + 8 = 0$
- $x^3 + 4x^2 + x - 1 = 0$
- $x^6 - 2i = 0$

# Raiz

Seja a equação polinomial $p(x) = 0$, em que:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Um número complexo **r** é raiz dessa equação se, substituindo **x** por **r** na equação e efetuando os cálculos, obtemos:

$$p(r) = a_n r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0 = 0$$

Em outras palavras, **r** é raiz de uma equação $p(x) = 0$ se **r** for raiz do polinômio $p(x)$.

**EXEMPLO 2**

O número 4 é uma raiz da equação $x^3 - 6x^2 + 10x - 8 = 0$, pois:

$$4^3 - 6 \cdot 4^2 + 10 \cdot 4 - 8 = 64 - 96 + 40 - 8 = 0$$

Já o número complexo **i** não é raiz dessa equação, pois:

$$i^3 - 6i^2 + 10i - 8 = -i + 6 + 10i - 8 = -2 + 9i \neq 0$$

## Conjunto solução

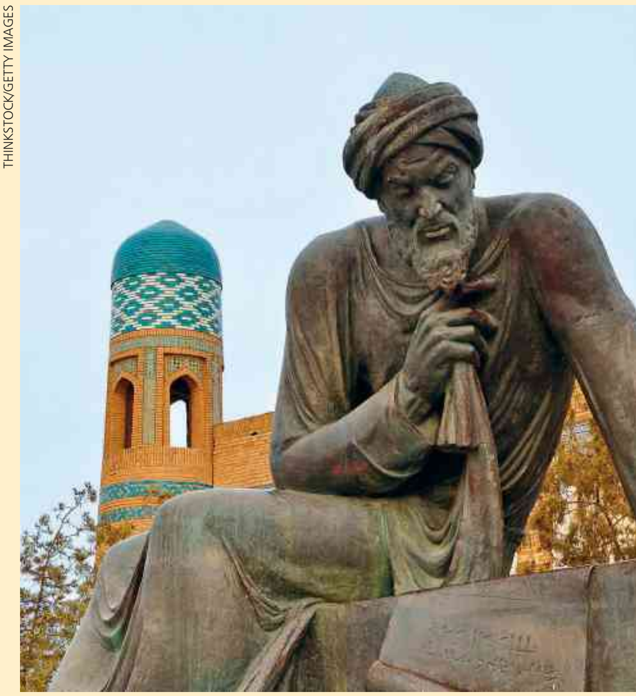
Conjunto solução de uma equação polinomial é o conjunto de todas as raízes dessa equação, considerando $\mathbb{C}$ o conjunto universo. Neste capítulo, vamos considerar $U = \mathbb{C}$ nos exemplos e exercícios.

Vejamos:

- Se o grau do polinômio é 1, para encontrar o conjunto solução da equação $ax + b = 0$ (com $a \neq 0$) basta fazer: $ax = -b \Rightarrow x = -\dfrac{b}{a}$ e $S = \left\{-\dfrac{b}{a}\right\}$
- Se o grau do polinômio é 2, é preciso resolver a equação $ax^2 + bx + c = 0$ (com $a \neq 0$). Usando a fórmula resolutiva da equação do 2º grau, temos:
  $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ e $S = \left\{\dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right\}$
- Se o grau do polinômio é 3 ou 4, é possível determinar as raízes da equação por meio de fórmulas que envolvem as quatro operações fundamentais e a extração de raízes. No entanto, essas fórmulas não são estudadas nos cursos de Ensino Médio.
- Se o grau do polinômio é maior ou igual a 5, não existe uma fórmula resolutiva (envolvendo as quatro operações e a extração de raízes) que se aplique a qualquer equação.

## UM POUCO DE **HISTÓRIA**

### A resolução de equações


THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Estátua de Al-Khowarizmi em Khiva, no Uzbequistão.

Os primeiros registros encontrados sobre a resolução de algumas equações do 2º grau datam de, aproximadamente, 1700 a.C. e pertencem a civilizações antigas, como a dos sumérios, egípcios e babilônios.

Os gregos usaram a Geometria para aperfeiçoar as técnicas de resolução das equações do 2º grau.

A civilização islâmica também deixou um legado importante: a obra *Al-jabr W'al-Mugabala*, do matemático e astrônomo Al-Khowarizmi, datada do século VIII, inclui, entre outros, uma exposição completa da resolução das equações do 1º e 2º graus. A palavra "álgebra" deriva desse nome.

No século XVI, com o Renascimento italiano, ocorreu um progresso significativo: a resolução de equações do 3º grau e, como decorrência, de 4º grau. A história da resolução dessas equações envolve segredos, batalhas, desafios e traições, culminando, em 1545, na publicação de *Ars Magna*, de Girolamo Cardano. Essa obra contém o processo de resolução e a devida demonstração da fórmula de resolução de uma equação do 3º grau, além da explicação de como resolver uma equação do 4º grau, transformando-a em outra do 3º grau.

Durante dois séculos e meio tentou-se encontrar uma fórmula resolutiva para a equação do 5º grau. Somente em 1824 o norueguês Niels Abel (1802-1829) provou, de maneira consistente, a impossibilidade de resolução dessa equação por meio das quatro operações aritméticas e de radiciações.

Poucos anos depois, o francês Évariste Galois (1811-1832) — cujos trabalhos deram início à chamada Álgebra Moderna — generalizou as condições de resolubilidade de uma equação algébrica qualquer.

**Fonte de pesquisa:** BOYER, Carl B. *História da Matemática*. 3ª ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2010.

## Teorema fundamental da Álgebra (TFA)

O teorema seguinte, enunciado e provado por Carl Gauss (1777-1855), constitui um elemento central para o estudo das equações algébricas.

Todo polinômio de grau **n**, $n \geqslant 1$, admite ao menos uma raiz complexa.

A demonstração desse teorema exige conhecimentos de Matemática do Ensino Superior e que, portanto, não são abordados no Ensino Médio.

# Teorema da decomposição

Seja $p(x)$ um polinômio de grau **n**, $n \geqslant 1$, dado por:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \text{ (com } a_n \neq 0)$$

Então, $p(x)$ pode ser decomposto em **n** fatores do 1º grau sob a forma:

$$p(x) = a_n \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot \ldots \cdot (x - r_n)$$

em que $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, ..., $\mathbf{r}_n$ são as raízes de $p(x)$ e $\mathbf{a}_n$ é o coeficiente dominante de $p(x)$.

**Demonstração:**

Como $p(x)$ é um polinômio de grau $n \geqslant 1$, o TFA garante-nos que $p(x)$ tem ao menos uma raiz complexa $\mathbf{r}_1$. Assim, $p(r_1) = 0$ e, pelo teorema de D'Alembert, $p(x)$ é divisível por $x - r_1$. Então:

$$p(x) = (x - r_1) \cdot q_1(x) \quad (1)$$

em que $q_1(x)$ é um polinômio de grau $n - 1$ e coeficiente dominante $\mathbf{a}_n$ (pois o divisor $x - r_1$ tem coeficiente dominante unitário).

Temos:

- Se $n = 1$, então $q_1(x)$ é um polinômio de grau $1 - 1 = 0$, ou seja, $q_1(x)$ é um polinômio constante, dado por $q_1(x) = a_n$. Substituindo em (1), temos $p(x) = a_n(x - r_1)$, e o teorema fica demonstrado.
- Se $n \geqslant 2$, então $n - 1 \geqslant 1$. Assim, podemos aplicar o TFA ao polinômio $q_1(x)$, isto é, $q_1(x)$ tem ao menos uma raiz complexa $\mathbf{r}_2$. Assim, $q_1(r_2) = 0$ e $q_1(x)$ é divisível por $x - r_2$:

$$q_1(x) = (x - r_2) \cdot q_2(x) \quad (2)$$

em que $q_2(x)$ é um polinômio de grau $n - 2$ e coeficiente dominante $\mathbf{a}_n$. Substituindo (2) em (1), resulta:

$$p(x) = (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot q_2(x) \quad (3)$$

- Se $n = 2$, $q_2(x)$ é um polinômio de grau 0, dado por $q_2(x) = a_n$. De (3), segue que $p(x) = a_n(x - r_1) \cdot (x - r_2)$, e o teorema fica demonstrado.
- Aplicando sucessivamente **n** vezes o TFA, obtemos:

$$p(x) = (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot \ldots \cdot (x - r_n) \cdot q_n(x)$$

em que $q_n(x)$ é um polinômio de grau $n - n = 0$, dado por $q_n(x) = a_n$.

Assim:

$$p(x) = a_n \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot \ldots \cdot (x - r_n)$$

**OBSERVAÇÕES**

- Dizemos que cada um dos polinômios do 1º grau, $x - r_1$, $x - r_2$, ..., $x - r_n$, é um fator de $p(x)$.
- Pode-se mostrar que, com exceção da ordem dos fatores da multiplicação, a decomposição de $p(x)$ em termos de suas raízes é única.
- $p(x)$ é divisível por cada um de seus fatores, individualmente, e também por qualquer produto desses fatores.

## Consequência do teorema da decomposição

Toda equação polinomial de grau **n**, $n \geqslant 1$, admite exatamente **n** raízes complexas.

Vejamos alguns exemplos:

- O polinômio do 1º grau dado por $p(x) = 4x - 8$ admite 2 como raiz; podemos escrever $p(x) = 4 \cdot (x - 2)$.
- O polinômio do 2º grau dado por $p(x) = x^2 - x - 2$ admite como raízes $-1$ e 2. Podemos decompor $p(x)$ fazendo: $p(x) = 1 \cdot (x + 1) \cdot (x - 2)$.

- O polinômio do 2º grau $p(x) = x^2 - 4x + 5$ admite como raízes os números $2 + i$ e $2 - i$; sua decomposição em fatores do 1º grau é: $p(x) = 1 \cdot (x - 2 - i) \cdot (x - 2 + i)$. *
- O polinômio do 3º grau $x^3 + 4x$ pode ser escrito como $x \cdot (x^2 + 4) = x(x - 2i) \cdot (x + 2i)$; suas raízes são, portanto, 0, $2i$ e $-2i$.
- As três raízes do polinômio $x^3 - 4x^2 - 11x + 30$ são 2, $-3$ e 5. Pelo teorema da decomposição, é possível escrever $x^3 - 4x^2 - 11x + 30 = (x - 2) \cdot (x + 3) \cdot (x - 5)$.

**PENSE NISTO:**

Faça a multiplicação indicada em *, usando produtos notáveis, para chegar a $x^2 - 4x + 5$.

## EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

**1** Resolva a equação $x^3 - 8x^2 + 29x - 52 = 0$, sabendo que uma das raízes é 4.

**Solução:**

Seja $p(x)$ o polinômio dado e 4, $\mathbf{r_2}$ e $\mathbf{r_3}$ suas raízes. Usando o teorema da decomposição, podemos escrever:

$$p(x) = 1 \cdot (x - 4) \cdot \underbrace{(x - r_2) \cdot (x - r_3)}_{q(x)}$$

isto é:

$$p(x) = (x - 4) \cdot q(x)$$

Assim, $p(x)$ é divisível por $(x - 4)$ e o quociente dessa divisão é $q(x)$. Usando Briot-Ruffini, obtemos:

$$\begin{array}{c|ccc|c} 4 & 1 & -8 & 29 & -52 \\ \hline & \underbrace{1 \quad -4 \quad 13}_{\text{coeficientes de } q(x)} & & & 0 \end{array}$$

Desse modo, as demais raízes são obtidas de $q(x) = 0$, isto é, $x^2 - 4x + 13 = 0 \Rightarrow x = 2 - 3i$ ou $x = 2 + 3i$ e o conjunto solução da equação $p(x) = 0$ é:

$$S = \{4,\ 2 - 3i,\ 2 + 3i\}$$

**2** Escrever uma equação algébrica de 3º grau cujas raízes sejam 1, $-2$ e 5.

**Solução:**

Seja $p(x)$ o polinômio de grau 3 procurado. Usando o teorema da decomposição, podemos escrever:

$$p(x) = a_n \cdot (x - 1) \cdot (x + 2) \cdot (x - 5) \quad *$$

em que $\mathbf{a_n}$ é o coeficiente dominante de $p(x)$. Assim:

$$p(x) = a_n \cdot (x^2 + x - 2) \cdot (x - 5) \Rightarrow p(x) = a_n \cdot (x^3 - 4x^2 - 7x + 10)$$

Escolhendo, por exemplo, $a_n = 1$, segue a equação $x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = 0$.

E se tivéssemos escolhido outro valor para $\mathbf{a_n}$?

Caso tivéssemos escolhido $a_n = 2$, teríamos em *:

$$p(x) = 2 \cdot (x - 1) \cdot (x + 2) \cdot (x - 5)$$

e a equação obtida é $2 \cdot (x - 1) \cdot (x + 2) \cdot (x - 5) = 0$, que equivale a $(x - 1) \cdot (x + 2) \cdot (x - 5) = 0$, e suas raízes também são: 1, $-2$ e 5.

De fato, $\forall a_n \neq 0$ a equação $a_n \cdot (x - 1) \cdot (x + 2) \cdot (x - 5) = 0$ apresenta como conjunto solução $S = \{1, -2, 5\}$.

**3** Duas das raízes da equação $2x^4 + 5x^3 - 35x^2 - 80x + 48 = 0$ são $-3$ e $-4$. Quais são as outras duas raízes?

**Solução:**

Seja p(x) o polinômio dado e $-3$, $-4$, $\mathbf{r_3}$ e $\mathbf{r_4}$ suas raízes.

Podemos escrever o polinômio da seguinte forma:

$$p(x) = 2 \cdot (x + 3) \cdot (x + 4) \cdot (x - r_3) \cdot (x - r_4)$$

$$p(x) = (x + 3) \cdot (x + 4) \cdot \underbrace{2 \cdot (x - r_3) \cdot (x - r_4)}_{q(x)}, \text{ isto é, } p(x) = (x^2 + 7x + 12) \cdot q(x)$$

Efetuando a divisão de p(x) por $x^2 + 7x + 12$, determinamos o polinômio q(x):

$$\begin{array}{rrrrr|l}
\cancel{2x^4} & + 5x^3 & - 35x^2 & - 80x & + 48 & x^2 + 7x + 12 \\ \cline{6-6}
\cancel{-2x^4} & - 14x^3 & - 24x^2 & & & \underbrace{2x^2 - 9x + 4}_{q(x)} \\ \cline{1-3}
 & -\cancel{9x^3} & - 59x^2 & - 80x & + 48 & \\
 & +\cancel{9x^3} & + 63x^2 & + 108x & & \\
 & & \cancel{4x^2} & + \cancel{28x} & + \cancel{48} & \\
 & & \cancel{-4x^2} & - \cancel{28x} & - \cancel{48} & \\ \cline{3-5}
 & & & & 0 &
\end{array}$$

As demais raízes vêm de $q(x) = 0$, ou seja, $2x^2 - 9x + 4 = 0 \Rightarrow x = 4$ ou $x = \frac{1}{2}$.

**4** Quais são as raízes da equação $x^3 - 2x^2 + 2x = 0$?

**Solução:**

Às vezes, é possível fatorar o polinômio para encontrar suas raízes:

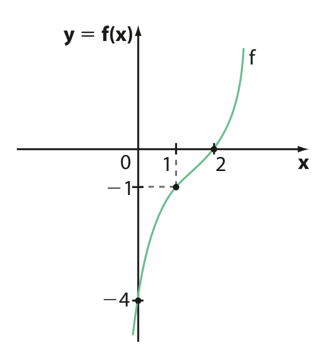
$$x^3 - 2x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x \cdot (x^2 - 2x + 2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x^2 - 2x + 2 = 0 \\ \Delta = 4 - 8 = -4 \\ x = \dfrac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i \end{cases}$$

Assim, as raízes da equação são 0, $1 + i$ e $1 - i$.

A construção dos gráficos e o estudo das variações das funções polinomiais de grau maior que 2 não fazem parte dos objetivos desta coleção. Entretanto, a interpretação de um gráfico de uma função polinomial de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ pode trazer informações importantes em relação ao polinômio. Acompanhe o exemplo 3:

**EXEMPLO 3**

Observe, ao lado, parte do gráfico da função **f**, crescente em $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, com **a**, **b** e **c** reais.




O gráfico de **f** intersecta o eixo **x** uma única vez, no ponto (2, 0). Isso significa que $x = 2$ é a única raiz real do polinômio. (Note que, por hipótese, **f** é crescente para todo $x \in \mathbb{R}$.)

A interseção do gráfico de **f** com o eixo **y** em $(0, -4)$ fornece o valor do coeficiente independente **c** do polinômio, pois, se $x = 0$, $f(0) = -4$, isto é, $0^3 + a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = -4 \Rightarrow c = -4$.

Além disso, temos:

- $f(1) = -1 \Rightarrow 1^3 + a \cdot 1^2 + b \cdot 1 - 4 = -1 \Rightarrow a + b = 2$
- $f(2) = 0$ (2 é raiz) $\Rightarrow 2^3 + a \cdot 2^2 + b \cdot 2 - 4 = 0 \Rightarrow 4a + 2b = -4$

Resolvendo o sistema, temos:

$$a = -4 \text{ e } b = 6$$

Desse modo, a lei que define **f** é $f(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 4$.

Para obter as demais raízes, dividimos o polinômio $x^3 - 4x^2 + 6x - 4$ por $x - 2$:

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -4 & 6 & -4 \\ \hline & 1 & -2 & 2 & \multicolumn{1}{|c}{0} \end{array}$$

Daí:

$$x^2 - 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1 - i \text{ ou } x = 1 + i$$

## EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

**1** Encontre as raízes de cada polinômio abaixo e, em seguida, escreva-o em sua forma fatorada:

**a)** $x^2 - 6x + 25$

**b)** $2x^2 - 5x + 2$

**c)** $2x^3 - 4x$

**2** Represente o polinômio $x^3 - 4x^2 - 11x + 30$ em fatores do 1º grau, sabendo que suas raízes são 5, $-3$ e 2.

**3** Sabendo que $2 + i$, $2 - i$ e $-3$ são as raízes da equação $x^3 - x^2 - 7x + 15 = 0$, fatore o polinômio dado em outros dois polinômios com coeficientes reais, um com grau 2 e outro com grau 1.

**4** Escreva uma equação do 2º grau cujas raízes sejam:

**a)** $1 - 2i$ e $1 + 2i$

**b)** $-3$ e 5

**c)** 0 e $-\dfrac{1}{2}$

**5** Escreva uma equação do 3º grau cujas raízes sejam:

**a)** $3 - i$, $3 + i$ e $-2$

**b)** 0, 2 e $-5$

**6** Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $x^3 + 3x^2 - 46x + 72 = 0$, sabendo que 2 é uma de suas raízes.

**7** Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $2x^3 + 5x^2 - 2x - 15 = 0$, sabendo que $\dfrac{3}{2}$ é uma de suas raízes.

**8** Seja a equação $x^3 + 2x^2 + mx - 6 = 0$, em que **m** é uma constante real. Sabendo que $-3$ é raiz dessa equação, determine:

**a)** o valor de **m**;

**b)** as demais raízes da equação.

**9** O polinômio $p = 4x^4 - 4x^3 - 23x^2 - x - 6$ é divisível por $x^2 - x - 6$. Qual é o número de raízes complexas não reais que **p** possui?

**10** O polinômio $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tem coeficiente dominante igual a 1 e suas raízes são 7, $-5$ e $-3$. Qual é o valor de $a + b + c + d$?

**11** Resolva, em $\mathbb{C}$, as equações, usando fatoração:

**a)** $x^3 + 2x^2 - 24x = 0$

**b)** $x^6 - 2x^5 - 3x^4 = 0$

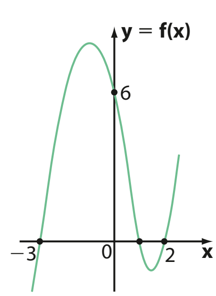
**c)** $2x^3 - x^2 + 4x - 2 = 0$

**d)** $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$

**12** Uma das raízes da equação $x^4 - x^3 - 3x^2 + 3x = 0$ é igual a 1. Quais são as outras três raízes dessa equação?

**13** Os números reais $-1$ e 1 são raízes da equação $x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 6x - 10 = 0$. Quais são as outras duas raízes?

**14** Ao lado, está representada parte do gráfico da função polinomial **f**, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax^3 + bx + c$, com **a**, **b** e **c** coeficientes reais.

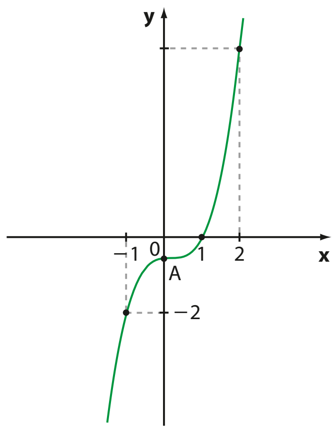



**a)** Qual é o número de raízes não reais de **f**?

**b)** Obtenha os valores de **a**, **b** e **c**.

**c)** Resolva a equação $f(x) = 0$.

**15** Parte do gráfico da função polinomial f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^3 + px + q$, em que **p** e **q** são coeficientes reais, é mostrada abaixo:




Determine:

**a)** os valores de **p** e **q**;

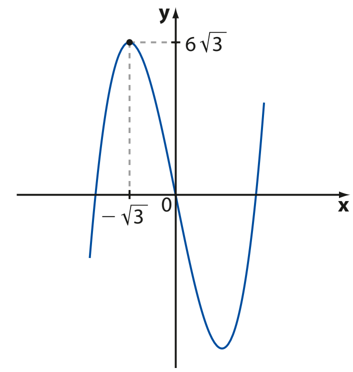
**b)** f(2);

**c)** a ordenada do ponto **A**;

**d)** as raízes da equação $f(x) = 0$.

**16** A figura a seguir mostra parte do gráfico da função polinomial f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = x^3 + px^2 + qx + r$$




Sabendo que **f** possui 2 raízes reais opostas, determine:

**a)** o número de raízes reais de **f**;

**b)** as raízes da equação $f(x) = 0$;

**c)** os valores de **p**, **q** e **r**.

**17** Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação:

$$x^4 - 8x^3 + 27x^2 - 70x + 50 = 0$$

sabendo que duas de suas raízes são $1 + 3i$ e $1 - 3i$.

**18** Sejam os polinômios:

$p(x) = x^2 - 2x - 2$ e $q(x) = [p(x)]^2 + 4 \cdot p(x) - 5$

**a)** Fatore o polinômio $y^2 + 4y - 5$.

**b)** Determine o grau de q(x).

**c)** Determine todas as raízes da equação $q(x) = 0$.

# Multiplicidade de uma raiz

Ao resolver a equação do 2º grau $x^2 - 12x + 36 = 0$, encontramos duas raízes iguais a 6.

O polinômio $x^2 - 12x + 36$ pode ser fatorado em $(x - 6) \cdot (x - 6) = (x - 6)^2$. Assim, dizemos que $x = 6$ é raiz dupla ou raiz de multiplicidade 2 da equação.

Suponha que $(x + 4)^3 \cdot (x - 1)^2 \cdot (x + 5)$ seja a forma fatorada de um polinômio **p**. Para resolver a equação $p(x) = 0$, fazemos:

$$(x + 4) \cdot (x + 4) \cdot (x + 4) \cdot (x - 1) \cdot (x - 1) \cdot (x + 5) = 0$$

Daí, temos:

$x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$ (três vezes). Assim, $-4$ é raiz tripla (ou de multiplicidade 3).
ou
$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ (duas vezes). Assim, 1 é raiz dupla (ou de multiplicidade 2).
ou
$x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5$ (uma vez). Assim, $-5$ é raiz simples (ou de multiplicidade 1).

Assim, observando que p(x) tem grau 6, as seis raízes da equação $p(x) = 0$ são $-4, -4, -4, 1, 1, -5$ e seu conjunto solução é: $S = \{-4, 1, -5\}$.

## Definição

O número complexo **r** é uma raiz de multiplicidade **m** ($m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 1$) da equação $p(x) = 0$ se a forma fatorada de $p(x)$ é:

$$p(x) = \underbrace{(x - r) \cdot (x - r) \cdot \ldots \cdot (x - r)}_{\mathbf{m}\text{ fatores}} \cdot q(x)$$

isto é:

$$\boxed{p(x) = (x - r)^m \cdot q(x), \text{ com } q(r) \neq 0}$$

**OBSERVAÇÕES**

Se $p(x) = (x - r)^m \cdot q(x)$, com $q(r) \neq 0$, temos:

- $p(x)$ é divisível por $(x - r)^m$.
- A condição $q(r) \neq 0$ significa que **r** não é raiz de $q(x)$; desse modo, $p(x)$ não é divisível por $(x - r)^{m+1}$.
- Se $m = 1$, dizemos que **r** é raiz simples (ou de multiplicidade 1); se $m = 2$, **r** é chamada raiz dupla (ou de multiplicidade 2); se $m = 3$, **r** é raiz tripla (ou de multiplicidade 3), e assim por diante.

## EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

**5** Escreva uma equação polinomial cujas raízes sejam 2, −3 e 4, com multiplicidades 2, 1 e 1, respectivamente.

**Solução:**

A forma fatorada do polinômio é: $a_n \cdot (x - 2)^2 \cdot (x + 3) \cdot (x - 4)$, em que $a_n \in \mathbb{C}$ e $a_n \neq 0$, isto é:

$$a_n \cdot (x^2 - 4x + 4) \cdot (x^2 - x - 12) = a_n \cdot (x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 44x - 48)$$

Escolhendo $a_n = 1$, por exemplo, segue a equação:

$$x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 44x - 48 = 0$$

**6** Resolva a equação $x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 12x + 45 = 0$, sabendo que −3 é raiz dupla dessa equação.

**Solução:**

Chamando de $p(x)$ o polinômio dado e de $\mathbf{r}_3$ e $\mathbf{r}_4$ as raízes desconhecidas, temos:

$$p(x) = (x + 3) \cdot (x + 3) \cdot \underbrace{(x - r_3) \cdot (x - r_4)}_{q(x)} \Rightarrow p(x) = (x + 3)^2 \cdot q(x)$$

Assim, $p(x)$ é divisível por $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$.

Efetuando a divisão de $p(x)$ por $x^2 + 6x + 9$ pelo método da chave, encontramos $q(x)$:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
\cancel{x^4} & + 4x^3 & + 2x^2 & + 12x & + 45 & x^2 + 6x + 9 \\
\cancel{-x^4} & - 6x^3 & - 9x^2 & & & \underbrace{x^2 - 2x + 5}_{q(x)} \\
\hline
 & \cancel{-2x^3} & - 7x^2 & + 12x & + 45 & \\
 & \cancel{+2x^3} & + 12x^2 & + 18x & & \\
\hline
 & & \cancel{5x^2} & + \cancel{30x} & + \cancel{45} & \\
 & - & \cancel{5x^2} & - \cancel{30x} & - \cancel{45} & \\
\hline
 & & & & 0 &
\end{array}$$

Resolvendo a equação $q(x) = 0$, encontramos as outras raízes. Temos:

$$x^2 - 2x + 5 = 0 \Rightarrow x = 1 - 2i \text{ ou } x = 1 + 2i$$

## EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

**19** Seja a equação: $x^3 \cdot (x + 2)^4 \cdot (x - 1)^2 \cdot (x + 6) = 0$, determine:

**a)** as raízes e suas respectivas multiplicidades;

**b)** seu grau;

**c)** seu conjunto solução.

**20** As raízes de uma equação polinomial são 4, 2 e 0, com multiplicidades 2, 1 e 1, respectivamente.

**a)** Qual é o grau do polinômio?

**b)** Escreva uma equação polinomial que satisfaça tais condições.

**21** Em cada caso, escreva uma equação algébrica que satisfaça as condições:

**a)** $-3$ é raiz dupla e 5 é raiz simples.

**b)** 2, $3i$ e $-3i$ são raízes com multiplicidade 2, 1 e 1, respectivamente.

**22** Resolva a equação $x^4 - 3x^3 - 13x^2 + 51x - 36 = 0$, sabendo que 3 é raiz dupla.

**23** Seja a equação $4x^3 - 19x^2 + 28x + m = 0$. Determine:

**a)** **m**, sabendo que 2 é raiz dupla dessa equação;

**b)** a outra raiz.

**24** Resolva a equação $x^5 - 2x^4 - 7x^3 - 4x^2 = 0$, sabendo que $-1$ é raiz dupla.

**25** Qual é a multiplicidade da raiz 4 na equação:

$$x^4 - 10x^3 + 24x^2 + 32x - 128 = 0?$$

Qual é a outra raiz?

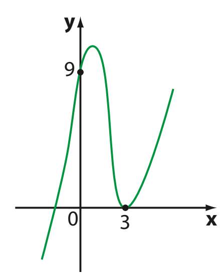
**26** A equação $x^3 - 75x + 250 = 0$ apresenta **m** (com $m \in \mathbb{R}$) como raiz dupla e $-2m$ como raiz simples. Determine o seu conjunto solução.

**27** O polinômio $4x^4 + 12x^3 + x^2 - 12x + 4$ é divisível por $x^2 + 4x + 4$. Quais são as raízes desse polinômio e as respectivas multiplicidades?

**28** Parte do gráfico da função $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

com **a**, **b** e **c** coeficientes reais, está representada a seguir:




Sabendo que $p(x)$ é divisível por $(x - 3)^2$, determine:

**a)** os valores de **a**, **b** e **c**;

**b)** as raízes da equação $p(x) = 0$, com as respectivas multiplicidades.

# Relações de Girard (relações entre coeficientes e raízes)

Algumas relações entre os coeficientes de uma equação polinomial e suas raízes, conhecidas como **relações de Girard** (Albert Girard, matemático francês, 1590-1633), constituem uma ferramenta importante no estudo das raízes de um polinômio quando conhecemos alguma informação sobre tais raízes.

Vamos obter essas relações para as equações do 2º, 3º e 4º graus e, a partir daí, generalizar para uma equação de grau **n**.

## Equação do 2º grau

Sejam $r_1$ e $r_2$ as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$. Pelo teorema da decomposição, sabemos que:

$$ax^2 + bx + c = a \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2)$$

Dividindo os dois membros por **a** (com $a \neq 0$), temos:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = (x^2 - xr_2 - xr_1 + r_1 \cdot r_2)$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 \cdot r_2$$

Da igualdade de polinômios, segue que:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = -\dfrac{b}{a} \\ r_1 \cdot r_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

**PENSE NISTO:**

Usando as relações de Girard, escreva uma equação algébrica (de grau 2) cujas raízes sejam 4 e $-7$.

**EXEMPLO 4**

Para obter a soma e o produto das raízes da equação $5x^2 - x - 3 = 0$, não é necessário resolvê-la. Se $\mathbf{r_1}$ e $\mathbf{r_2}$ são as suas raízes, usando as relações de Girard, temos:

Soma: $r_1 + r_2 = \dfrac{-b}{a} = -\dfrac{(-1)}{5} = \dfrac{1}{5}$

Produto: $r_1 \cdot r_2 = \dfrac{c}{a} = -\dfrac{3}{5}$

(Observe que $a = 5$, $b = -1$ e $c = -3$.)

## Equação do 3º grau

Sejam $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$ e $\mathbf{r_3}$ as raízes da equação $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, com $a \neq 0$. Temos:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot (x - r_3)$$

Dividindo os dois membros por **a** (com $a \neq 0$), temos:

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot (x - r_3)$$

Efetuando as multiplicações e agrupando os termos semelhantes, temos que:

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = (x^2 - xr_2 - xr_1 + r_1r_2) \cdot (x - r_3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = x^3 - (r_1 + r_2 + r_3)x^2 + (r_1r_2 + r_2r_3 + r_1r_3)x - r_1 \cdot r_2 \cdot r_3$$

Da igualdade dos polinômios, segue que:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 = -\dfrac{b}{a} \\ r_1 \cdot r_2 + r_2 \cdot r_3 + r_1 \cdot r_3 = \dfrac{c}{a} \\ r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = -\dfrac{d}{a} \end{cases}$$

**EXEMPLO 5**

Vamos escrever as três relações de Girard para a equação $2x^3 - 4x^2 + x + 3 = 0$, considerando **r**, **s** e **t** suas raízes.

Observe que os termos desse polinômio estão ordenados do maior ao menor expoente de **x** e, desse modo, seus coeficientes são identificados por: $a = 2$, $b = -4$, $c = 1$ e $d = 3$.

Temos:

$$\begin{cases} r + s + t = -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{(-4)}{2} = 2 \\ r \cdot s + r \cdot t + s \cdot t = \dfrac{c}{a} = \dfrac{1}{2} \\ r \cdot s \cdot t = -\dfrac{d}{a} = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

## Equação do 4º grau

Sejam $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$, $\mathbf{r_3}$ e $\mathbf{r_4}$ as raízes da equação $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ (com $a \neq 0$).

A decomposição desse polinômio em fatores do 1º grau é:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = a \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot (x - r_3) \cdot (x - r_4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = a \cdot [(x^2 - x(r_1 + r_2) + r_1r_2) \cdot (x^2 - x(r_3 + r_4) + r_3r_4)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = a \cdot [x^4 - x^3(r_1 + r_2 + r_3 + r_4) +$$

$$+ x^2 \cdot (r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4) - x \cdot (r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + r_1r_3r_4 + r_2r_3r_4) + r_1r_2r_3r_4]$$

Dividindo os dois membros por **a** (com $a \neq 0$), temos:

$$x^4 + \frac{b}{a}x^3 + \frac{c}{a}x^2 + \frac{d}{a}x + \frac{e}{a} = x^4 - x^3 \cdot (r_1 + r_2 + r_3 + r_4) +$$

$$+ x^2 \cdot (r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4) - x \cdot (r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + r_1r_3r_4 + r_2r_3r_4) + r_1r_2r_3r_4$$

Da igualdade dos polinômios, segue que:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = -\dfrac{b}{a} \\ r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4 = \dfrac{c}{a} \\ r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + r_1r_3r_4 + r_2r_3r_4 = -\dfrac{d}{a} \\ r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot r_4 = \dfrac{e}{a} \end{cases}$$

**EXEMPLO 6**

Sendo **r**, **s**, **t** e **u** as raízes da equação $x^4 + 4x^3 + 5x^2 - x + 2 = 0$, vamos escrever as quatro relações de Girard.

Os coeficientes de p(x) ordenados do maior ao menor expoente de **x** serão representados por $a = 1$, $b = 4$, $c = 5$, $d = -1$ e $e = 2$. Assim, temos:

$$\begin{cases} r + s + t + u = -\dfrac{b}{a} = \dfrac{-4}{1} = -4 \\ r \cdot s + r \cdot t + r \cdot u + s \cdot t + s \cdot u + t \cdot u = \dfrac{c}{a} = \dfrac{5}{1} = 5 \\ r \cdot s \cdot t + r \cdot s \cdot u + r \cdot t \cdot u + s \cdot t \cdot u = -\dfrac{d}{a} = -\dfrac{(-1)}{1} = 1 \\ r \cdot s \cdot t \cdot u = \dfrac{e}{a} = \dfrac{2}{1} = 2 \end{cases}$$

## Equação de grau n

Seja a equação $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = 0$, com $a_n \neq 0$, e $\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2}, ..., \mathbf{r_n}$ suas raízes. Por meio de raciocínio análogo aos anteriores, temos que:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + ... + r_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \text{ (soma das } \mathbf{n} \text{ raízes)} \\ r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + ... + r_n \cdot r_{n-1} = \dfrac{a_{n-2}}{a_n} \text{ (soma dos produtos das raízes tomadas duas a duas)} \\ r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 + r_1 \cdot r_2 \cdot r_4 + ... + r_{n-2} \cdot r_{n-1} \cdot r_n = -\dfrac{a_{n-3}}{a_n} \text{ (soma dos produtos das raízes tomadas três a três)} \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ r_1 \cdot r_2 \cdot ... \cdot r_n = (-1)^n \cdot \dfrac{a_0}{a_n} \text{ (produto das } \mathbf{n} \text{ raízes)} \end{cases}$$

## EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

**7** Sejam **r** e **s** as raízes da equação $2x^2 + 6x + 7 = 0$. Sem resolvê-la, obtenha o valor de:

**a)** $\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{s}$

**b)** $r^2 + s^2$

**Solução:**

**a)** Como $\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{s} = \dfrac{s + r}{r \cdot s}$, podemos usar as relações de Girard:

$$\begin{cases} s + r = -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{6}{2} = -3 \\ r \cdot s = \dfrac{c}{a} = \dfrac{7}{2} \end{cases}$$

Assim, o resultado pedido é:

$$\dfrac{-3}{\dfrac{7}{2}} = -\dfrac{6}{7}$$

**b)** Como $(r + s)^2 = r^2 + 2rs + s^2$, temos que:

$$\underbrace{(r + s)^2}_{\text{soma}} - 2\underbrace{rs}_{\text{produto}} = r^2 + s^2$$

Daí:

$$r^2 + s^2 = (-3)^2 - 2 \cdot \dfrac{7}{2} = 9 - 7 = 2$$

**8** Resolva a equação $x^3 - 8x^2 + 19x - 12 = 0$, sabendo que uma das raízes é igual à soma das outras duas.

**Solução:**

Sejam $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$ e $\mathbf{r_3}$ as raízes procuradas. Escrevendo as relações de Girard, temos:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 = 8 & 1 \\ r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_3 = 19 & 2 \\ r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = 12 & 3 \end{cases}$$

Do enunciado, temos que:

$$r_1 = r_2 + r_3 \quad 4$$

Substituindo 4 em 1:

$$r_1 + \underbrace{r_2 + r_3}_{r_1} = 8 \Rightarrow 2r_1 = 8 \Rightarrow r_1 = 4$$

O polinômio dado é, então, divisível por $x - 4$:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 1 | −8 | 19 | −12 |
| | 1 | −4 | 3 | 0 |

As demais raízes seguem de:

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = 3$$

$S = \{1, 3, 4\}$

**9** Resolva a equação $4x^3 - 13x^2 - 13x + 4 = 0$, sabendo que duas de suas raízes são números inversos (ou recíprocos).

**Solução:**

As raízes que a equação possui podem ser representadas por:

$$r_1, \underbrace{\frac{1}{r_1}}_{r_2}, r_3 \qquad 1$$

Escrevemos as relações de Girard:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 = \dfrac{13}{4} & 2 \\ r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_3 = -\dfrac{13}{4} & 3 \\ r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = -1 & 4 \end{cases}$$

Usando 1, podemos escrever em 4:

$$r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = -1 \Rightarrow \cancel{r_1} \cdot \frac{1}{\cancel{r_1}} \cdot r_3 = -1 \Rightarrow r_3 = -1$$

Assim, o polinômio dado é divisível por $x + 1$:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $-1$ | 4 | $-13$ | $-13$ | 4 |
| | 4 | $-17$ | 4 | 0 |

As outras raízes seguem de:

$$4x^2 - 17x + 4 = 0 \Rightarrow x = 4 \text{ ou } x = \frac{1}{4}$$

**10** Qual é a soma e o produto das raízes da equação $x^5 + 2 = 0$?

**Solução:**

Os coeficientes de $\mathbf{x^5}$, $\mathbf{x^4}$, $\mathbf{x^3}$, $\mathbf{x^2}$, $\mathbf{x}$ e o coeficiente independente são, respectivamente, iguais a 1, 0, 0, 0, 0 e 2, e os representaremos por: $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 0$, $e = 0$ e $f = 2$.

Assim:

A soma das raízes é: $-\dfrac{b}{a} = -\dfrac{0}{1} = 0$

O produto das raízes é: $-\dfrac{f}{a} = -\dfrac{2}{1} = -2$

## EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

**29** Sejam $\mathbf{r_1}$ e $\mathbf{r_2}$ as raízes da equação $x^2 - 3x + 6 = 0$. Determine:

**a)** $r_1 + r_2$

**b)** $r_1 \cdot r_2$

**c)** $\dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2}$

**d)** $r_1^2 + r_2^2$

**e)** $(4r_1 + 1) \cdot (4r_2 + 1)$

**f)** $(-7r_1 - 7r_2)^2$

**30** A equação $-3x^2 + 2x + m = 0$, em que **m** é uma constante real, admite duas raízes reais cuja diferença é $-\dfrac{1}{3}$.

**a)** Obtenha as raízes da equação.

**b)** Determine o valor de **m**.

**31** A soma e o produto das raízes da equação quadrática $4x^2 + ax + b = 0$ $(a, b \in \mathbb{R})$ são $\dfrac{1}{2}$ e $\dfrac{5}{4}$, respectivamente. Determine:

**a)** os valores de **a** e **b**;

**b)** as raízes da equação.

**32** A equação $x^2 + px + 54 = 0$, em que **p** é um coeficiente real, admite duas raízes, $\mathbf{r_1}$ e $\mathbf{r_2}$, tais que $2r_1 = 3r_2$. Qual é o valor de **p**?

**33** Dada a equação $-x^3 - 2x^2 + 6x - 5 = 0$, com raízes $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$ e $\mathbf{r_3}$, calcule:

**a)** $r_1 + r_2 + r_3$

**b)** $r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_3$

**c)** $r_1 \cdot r_2 \cdot r_3$

**d)** $\dfrac{1}{r_1 \cdot r_2} + \dfrac{1}{r_1 \cdot r_3} + \dfrac{1}{r_2 \cdot r_3}$

**e)** $\dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2} + \dfrac{1}{r_3}$

**34** Resolva a equação $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$, sabendo que suas raízes são números inteiros e consecutivos.

**35** Resolva a equação $2x^3 - 13x^2 + 22x - 8 = 0$, sabendo que suas raízes são positivas e uma delas é igual ao produto das outras duas.

**36** Os números complexos $3 - 4i$ e $3 + 4i$ são raízes da equação $x^2 + px + q = 0$. Determine os valores reais de **p** e **q**.

**37** A equação $x^3 - 3x^2 + mx + 12 = 0$ (**m** é um coeficiente real) tem duas raízes opostas.

**a)** Determine o valor de **m**.

**b)** Determine seu conjunto solução.

**c)** Escreva uma equação algébrica do 3º grau cujas raízes sejam $r_1 + 3$, $r_2 + 3$ e $r_3 + 3$, sendo $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$ e $\mathbf{r_3}$ as raízes encontradas no item *a*.

**38** As raízes da equação $x^3 + 21x^2 + mx - 729 = 0$, em que $m \in \mathbb{R}$, são, respectivamente, um certo número real, o quadrado desse número e o cubo desse primeiro número.

**a)** Qual é o valor de **m**?

**b)** Quais são as raízes dessa equação?

**39** Determine o valor da soma (**S**) e do produto (**P**) das raízes de cada equação:

**a)** $(x - 2) \cdot (x + 3) \cdot (x - 1) = 0$

**b)** $x^4 - 3x^3 + 2x - 1 = 0$

**c)** $x^6 - 4x + 2 = 0$

**d)** $x^4 + x - 3 = 0$

**40** Resolva a equação $x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = 0$, sabendo que uma raiz é igual à diferença das outras duas.

**41** A equação $x^3 - 30x^2 + mx + n = 0$ (**m** e **n** coeficientes reais) admite como raízes três números inteiros pares e consecutivos.

**a)** Quais são as três raízes dessa equação?

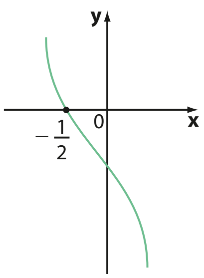
**b)** Obtenha os valores de **m** e **n**.

**42** Sabendo que 1 é a raiz tripla da equação $x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = 0$, resolva-a.

**43** A seguir está representada parte do gráfico da função **f**, decrescente em $\mathbb{R}$, dada por:

$f(x) = -2x^3 + px^2 - 44x + q$, em que **p** e **q** são coeficientes reais.

Sabendo que o produto de todas as raízes do polinômio é $-\dfrac{25}{2}$, determine:




**a)** o valor de **p**;

**b)** o conjunto solução da equação $f(x) = 0$.

**44** Resolva a equação $x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9 = 0$, sabendo que ela admite duas raízes reais, cada qual com multiplicidade igual a 2.

# Raízes complexas

Quando resolvemos a equação $x^2 - 2x + 5 = 0$, encontramos as raízes $x = 1 + 2i$ e $x = 1 - 2i$. Observe que as duas raízes são números **complexos conjugados**.

Já a equação $x^2 + 4 = 0$ apresenta como raízes os números $-2i$ e $2i$, que também formam um **par de números complexos conjugados**.

Esse fato está ligado a uma propriedade importante, referente ao número de raízes complexas não reais de uma equação algébrica que apresenta todos os coeficientes reais.

## Teorema

Se um número complexo $z = a + bi$, com $b \neq 0$, é raiz de uma equação polinomial com coeficientes reais, então seu conjugado $\overline{z} = a - bi$ também é raiz dessa equação.

Para fazer a demonstração desse teorema, é preciso usar as propriedades do conjugado de um número complexo, apresentadas e demonstradas no capítulo 7.

Dados dois números complexos $\mathbf{z_1}$ e $\mathbf{z_2}$ e considerando $\overline{\mathbf{z_1}}$ e $\overline{\mathbf{z_2}}$ seus respectivos conjugados, valem as seguintes propriedades:

I. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

II. $z_1 = \overline{z_1} \Leftrightarrow z_1$ é um número real

III. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

IV. $\overline{z_1^n} = (\overline{z_1})^n$

**Demonstração:**

Seja a equação $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$, com $\mathbf{a_n}$, $\mathbf{a_{n-1}}$, ..., $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_0}$ coeficientes reais.

Da hipótese, **z** é raiz da equação, isto é, $p(z) = 0$.

$$a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1 \cdot z + a_0 = 0 \Rightarrow \overline{a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0} = \overline{0}$$

Usando a generalização da propriedade I, podemos escrever:

$$\overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1} z^{n-1}} + \dots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} = \overline{0}$$

De II e III, segue que:

$$a_n \overline{z^n} + a_{n-1} \overline{z^{n-1}} + \dots + a_1 \overline{z} + a_0 = 0$$

E usando IV:

$$a_n (\overline{z})^n + a_{n-1} (\overline{z})^{n-1} + \dots + a_1 \overline{z} + a_0 = 0$$

isto é, $p(\overline{z}) = 0$, o que mostra que $\overline{\mathbf{z}}$ é raiz de $p(x) = 0$.

**OBSERVAÇÕES**

- Se o número complexo $z = a + bi$, com $b \neq 0$, é raiz com multiplicidade **m** de uma equação polinomial, então seu conjugado $\overline{z} = a - bi$, com $b \neq 0$, também é raiz com multiplicidade **m** dessa equação.
- Esse teorema nos garante que, em uma equação de coeficientes reais, as raízes complexas não reais sempre ocorrem aos pares ($\mathbf{z}$ e $\overline{\mathbf{z}}$). Assim, uma equação do 2º grau, com coeficientes reais, por exemplo, pode apresentar duas raízes reais ou um par de raízes complexas conjugadas. Ela não pode apresentar uma raiz real e uma raiz complexa (não real).

**PENSE NISTO:**

Por que uma equação polinomial de grau ímpar, com coeficientes reais, apresenta ao menos uma raiz real?

## EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

**11** A equação $x^2 + mx + n = 0$, com **m** e **n** coeficientes reais, admite $5 - 2i$ como raiz. Qual é a outra raiz que essa equação possui? Quais são os valores de **m** e **n**?

**Solução:**

Como a equação apresenta coeficientes reais, se $5 - 2i$ é raiz, então seu conjugado $5 + 2i$ também é raiz da equação.

Usando as relações de Girard, é possível determinar **m** e **n**.

A soma das raízes é $(5 - 2i) + (5 + 2i) = 10$; então, $10 = -\frac{m}{1} \Rightarrow m = -10$.

O produto das raízes é $(5 - 2i) \cdot (5 + 2i) = 5^2 - (2i)^2 = 25 + 4 = 29$; daí, $29 = \frac{n}{1} \Rightarrow n = 29$.

**12** Quantas raízes reais tem o polinômio $p(x) = x^4 - 8x^3 + 15x^2 + 80x - 250$, se uma de suas raízes é $4 + 3i$?

**Solução:**

Como a equação $p(x) = 0$ tem coeficientes reais, podemos afirmar que $4 - 3i$ também é raiz e $p(x)$ é divisível por:

$$(x - 4 - 3i) \cdot (x - 4 + 3i) = (x - 4)^2 - (3i)^2 = x^2 - 8x + 16 + 9 = x^2 - 8x + 25$$

Façamos a divisão:

$$\begin{array}{r|l}
\cancel{x^4} - \cancel{8x^3} + 15x^2 + 80x - 250 & x^2 - 8x + 25 \\ \cline{2-2}
-\cancel{x^4} + \cancel{8x^3} - 25x^2 \phantom{+ 80x - 250} & x^2 - 10 \\ \cline{1-1}
-\cancel{10x^2} + \cancel{80x} - \cancel{250} & \\
+\cancel{10x^2} - \cancel{80x} + \cancel{250} & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

As demais raízes de $p(x)$ são obtidas a partir de: $x^2 - 10 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{10} \in \mathbb{R}$.

Logo, $p(x)$ tem exatamente duas raízes reais.

## EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

**45** Qual é o menor grau que pode ter uma equação com coeficientes reais que admite:

**a)** 2, $-3$ e $4 + i$ como raízes simples?

**b)** $-2$ e $2 + i$ como raízes simples? Escreva uma equação que satisfaz essa condição.

**c)** **i** como raiz dupla? Escreva uma equação que satisfaz essa condição.

**46** Resolva a equação $x^3 - 9x^2 + 52x - 102 = 0$, sabendo que $3 + 5i$ é uma de suas raízes.

**47** A equação $2x^2 - (a + 10)x + b = 0$, com **a** e **b** reais, apresenta como raiz o número $3 - i$. Quais são os valores de **a** e **b**?

**48** Verifique se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

**a)** Uma equação algébrica de grau 4, com coeficientes reais, pode ter 4 raízes reais.

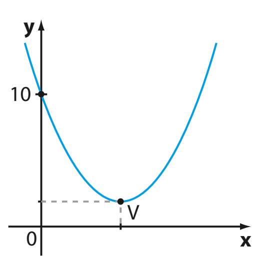
**b)** Uma equação algébrica de grau 3, com coeficientes reais, pode ter 3 raízes complexas não reais.

**c)** Na equação do 2º grau $ix^2 + 2x - i = 0$, o número complexo **i** é raiz. Logo, seu conjugado $-i$ também é raiz.

**d)** Existe uma equação algébrica de grau 4, com coeficientes reais, cujas raízes são **i**, $-i$, $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$.

**e)** Uma equação algébrica de grau 4, com coeficientes reais, pode ter uma única raiz real.

**49** Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função representada pela parábola ao lado e definida pela lei $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $\{a, b, c\} \subset \mathbb{R}$.




Sabendo que, em $\mathbb{C}$, uma das raízes da equação $f(x) = 0$ é o número $4 + 2i$, determine:

**a)** os valores de **a**, **b** e **c**;

**b)** as coordenadas de **V**.

**50** Resolva a equação $9x^4 - 18x^3 + 46x^2 - 2x + 5 = 0$, sabendo que uma de suas raízes é $1 - 2i$.

**51** O número complexo $-3i$ é raiz da equação:

$$x^4 - 2x^3 + x^2 + ax - 72 = 0$$

em que **a** é um coeficiente real.

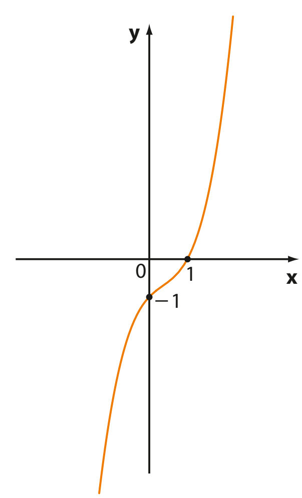
**a)** Qual é o valor de **a**?

**b)** Qual é o conjunto solução dessa equação?

**52** A equação $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$, em que **p**, **q**, **r** e **s** são coeficientes reais, admite a unidade imaginária **i** como raiz simples e 2 como raiz dupla. Quais são os valores de **p**, **q**, **r** e **s**?

**53** A equação $x^3 + mx^2 + 2x + n = 0$, em que **m** e **n** são números reais, admite $1 + i$ como raiz. Quais os valores de **m** e **n**?

**54** Parte do gráfico da função polinomial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, crescente em todo o seu domínio e definida por $f(x) = x^3 + mx^2 + nx + p$, em que **m**, **n** e **p** são coeficientes reais, é mostrada a seguir:




Sabendo que uma das raízes de **f** é $-i$, obtenha o valor de $f(2)$.

## Teorema das raízes racionais

O teorema seguinte nos ajudará a pesquisar possíveis raízes racionais de uma equação algébrica com coeficientes inteiros.

Seja a equação polinomial de coeficientes inteiros $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$, com $a_n \neq 0$. Se o número racional $\frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$, com **p** e **q** primos entre si, é raiz dessa equação, então **p** é divisor de $\mathbf{a_0}$ e **q** é divisor de $\mathbf{a_n}$.

**Demonstração:**

Como $\frac{p}{q}$ é raiz da equação, temos:

$$a_n \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1} \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot \frac{p}{q} + a_0 = 0$$

Multiplicando ambos os membros por $q^n$, temos:

$$a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} \cdot q + \ldots + a_1 \cdot p \cdot q^{n-1} + a_0 \cdot q^n = 0 \quad (1)$$

Isolando $a_n p^n$ e colocando **q** em evidência em (1), segue que:

$$a_n p^n = -q(\underbrace{a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1 pq^{n-2} + a_0 q^{n-1}}_{\alpha}) \quad (2)$$

Agora, isolando $a_0 q^n$ e colocando **p** em evidência, a partir de (1) temos:

$$a_0 q^n = -p(\underbrace{a_n p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + \ldots + a_1 q^{n-1}}_{\beta}) \quad (3)$$

Como todos os coeficientes $\mathbf{a_0}$, $\mathbf{a_1}$, ..., $\mathbf{a_n}$, **p** e **q** são inteiros, segue que $\alpha$ e $\beta$ são inteiros. Em (2) e (3) temos:

$$\begin{cases} a_n p^n = -q \cdot \alpha \Rightarrow \dfrac{a_n p^n}{q} = -\alpha \in \mathbb{Z} \quad (4) \\ \text{e} \\ a_0 q^n = -p \cdot \beta \Rightarrow \dfrac{a_0 q^n}{p} = -\beta \in \mathbb{Z} \quad (5) \end{cases}$$

As igualdades acima obtidas mostram que:

- (4) $a_n p^n$ é divisível por **q**. Como $p^n$ e **q** são primos entre si, $\mathbf{a_n}$ é divisível por **q**, isto é, **q** é divisor de $\mathbf{a_n}$.
- (5) $a_0 q^n$ é divisível por **p**. Como $q^n$ e **p** são primos entre si, $\mathbf{a_0}$ é divisível por **p**, isto é, **p** é divisor de $\mathbf{a_0}$.

**OBSERVAÇÃO**

O teorema das raízes racionais não garante a existência de raízes racionais em uma equação com coeficientes inteiros.
Caso existam raízes racionais, o teorema fornece todas as possibilidades ("candidatos") para tais raízes.

**EXEMPLO 7**

Suponhamos que se queira encontrar as três raízes da equação $3x^3 - 7x^2 + 8x - 2 = 0$.

Como não dispomos de qualquer informação sobre as raízes dessa equação e considerando que ela tem todos os coeficientes inteiros, vamos pesquisar possíveis raízes racionais.

Por meio do teorema, sabemos que, se a equação tiver alguma raiz racional, ela será da forma $\frac{p}{q}$, em que **p** é divisor de $-2$ e **q** é divisor de 3, isto é, $p \in \{-1, 1, -2, 2\}$ e $q \in \{-1, 1, -3, 3\}$.

Os "candidatos" a raízes racionais são, portanto:

$$+1, -1, +\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, +2, -2, +\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}$$

Seja **f** o polinômio dado, façamos as verificações:

- $f(1) = 2$
- $\boxed{f\left(\frac{1}{3}\right) = 0}$
- $f(2) = 10$
- $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{10}{9}$
- $f(-1) = -20$
- $f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{50}{9}$
- $f(-2) = -70$
- $f\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{34}{3}$

Verificamos que a única raiz racional dessa equação é $\frac{1}{3}$.

Para determinar as demais raízes, lembremos que o polinômio dado é divisível por $x - \frac{1}{3}$.

$$\begin{array}{c|cccc}
\frac{1}{3} & 3 & -7 & 8 & -2 \\
\hline
 & 3 & -6 & 6 & \multicolumn{1}{|c}{0}
\end{array}$$

Assim, as outras raízes seguem de $3x^2 - 6x + 6 = 0 \Rightarrow x = 1 - i$ ou $x = 1 + i$.

$$S = \left\{\frac{1}{3}, 1 - i, 1 + i\right\}$$

**PENSE NISTO:**

Poderíamos ter encerrado as verificações depois de encontrar a raiz $\frac{1}{3}$. Explique.

## EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

**13** Resolva o problema proposto na introdução deste capítulo, na página 217.

**Solução:**

Seja **x** a medida do lado do quadrado recortado; o valor de **x** deve satisfazer a equação:

$$2x^3 - 53x^2 + 330x - 525 = 0$$

Como essa equação tem todos os coeficientes inteiros, vamos pesquisar possíveis raízes racionais.

- Os divisores de 525 são: $\{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \pm 15, \pm 21, \pm 25, \pm 35, \pm 75, \pm 105, \pm 175, \pm 525\}$.
- Os divisores de 2 são: $\{\pm 1, \pm 2\}$.
- As possíveis raízes racionais são: $\left\{\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm 3, \pm\frac{3}{2}, \pm 5, \pm\frac{5}{2}, \pm 7, \pm\frac{7}{2}, \pm 15, \pm\frac{15}{2}, \pm 21, \pm\frac{21}{2}, \pm 25, \pm\frac{25}{2}, \pm 35, \pm\frac{35}{2}, \pm 75, \pm\frac{75}{2}, \pm 105, \pm\frac{105}{2}, \pm 175, \pm\frac{175}{2}, \pm 525, \pm\frac{525}{2}\right\}$.

Vamos testá-las até encontrar a primeira raiz; seja $f(x) = 2x^3 - 53x^2 + 330x - 525$. Temos:

- $f(1) = -246 \neq 0$
- $f(-1) = -910 \neq 0$
- $f\left(\frac{1}{2}\right) = -373 \neq 0$
- $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -703{,}5 \neq 0$
- $f(3) = 42 \neq 0$
- $f(-3) = -2\,046 \neq 0$
- $f\left(\frac{3}{2}\right) = -142{,}5 \neq 0$
- $f\left(-\frac{3}{2}\right) = -1\,146 \neq 0$
- $f(5) = 50 \neq 0$
- $f(-5) = -3\,750 \neq 0$
- $\boxed{f\left(\frac{5}{2}\right) = 0}$

Como $\frac{5}{2}$ é raiz, **f** é divisível por $x - \frac{5}{2}$:

$$\begin{array}{c|cccc}
\frac{5}{2} & 2 & -53 & 330 & -525 \\
\hline
 & 2 & -48 & 210 & \multicolumn{1}{|c}{0}
\end{array}$$

As demais raízes seguem de:

$$2x^2 - 48x + 210 = 0 \Rightarrow x^2 - 24x + 105 = 0 \Rightarrow x = \frac{24 \pm \sqrt{156}}{2} \begin{cases} x_1 \simeq 18{,}25 \\ x_2 \simeq 5{,}75 \end{cases}$$

Observe que $x_1 \simeq 18{,}25$ cm não pode ser aceito, pois a largura da cartolina é 20 cm e seu comprimento é 33 cm. Note que, se $x_2 \simeq 5{,}75$ cm, as dimensões aproximadas da caixa são: 5,75 cm, 8,5 cm e 21,5 cm.

Assim, seu volume aproximado é:

$$(5{,}75\ \text{cm}) \cdot (8{,}5\ \text{cm}) \cdot (21{,}5\ \text{cm}) \simeq 1\,050\ \text{cm}^3$$

O valor exato de 1 050 só é obtido se usarmos, no lugar da aproximação 5,75, o número irracional $\dfrac{24 - \sqrt{156}}{2}$.

Assim, as possíveis medidas do lado do quadrado recortado são:

$$\frac{5}{2} = 2{,}5\ \text{cm ou } \frac{24 - \sqrt{156}}{2} \simeq 5{,}75\ \text{cm}$$

**PENSE NISTO:**

Se uma equação algébrica com coeficientes inteiros e coeficiente dominante igual a 1 admite uma raiz racional, então essa raiz é necessariamente inteira. Explique.

## EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

**55** Pesquise as raízes racionais da equação:

$$2x^3 + x^2 - 25x + 12 = 0$$

**56** Resolva, em $\mathbb{C}$, as equações:

**a)** $x^3 - x^2 - x - 2 = 0$

**b)** $x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$

**57** A diferença entre o cubo de um número real e o seu quadrado é igual à soma do triplo do quadrado desse número com 25. Qual é esse número?

**58** Resolva em $\mathbb{C}$ a equação:

$$x^4 + x^3 + 2x^2 + 4x - 8 = 0$$

**59** Faça o que é pedido em cada item a seguir:

**a)** A equação $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 6x + 12 = 0$ só admite raízes reais. Sabendo disso, mostre que todas são irracionais.

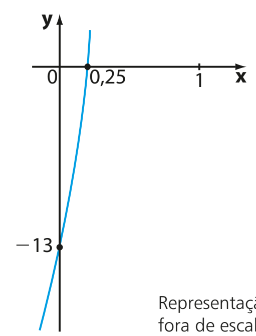
**b)** Resolva essa equação, sabendo que $x^2 - 3$ divide esse polinômio.

**60** Com relação à equação $x^3 - 5x^2 + 9x - 5 = 0$, determine:

**a)** o número de raízes inteiras que ela possui;

**b)** seu conjunto solução.

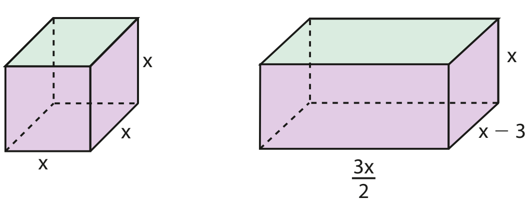
**61** Uma parte do gráfico da função definida por $y = 4x^3 - 25x^2 + 58x - 13$, crescente em $\mathbb{R}$, é mostrada a seguir.




Representação fora de escala.

Quais são as três raízes desse polinômio?

**62** Observe as figuras seguintes, em que estão indicadas as dimensões do cubo e do paralelepípedo:




Determine os valores de **x** para os quais o volume do cubo excede o do paralelepípedo em 32 unidades.

**63** O polinômio $x^3 - 1$ divide o polinômio:

$$p(x) = x^5 - 2x^4 - 8x^3 - x^2 + 2x + 8$$

Quais são as raízes da equação $p(x) = 0$?

## DESAFIO

A equação $x^4 - 3x^2 + px + q = 0$, com $\{p, q\} \subset \mathbb{R}$, tem duas raízes complexas não reais cuja soma é $-6$ e o produto, 25. As raízes reais desse polinômio são tais que uma é o dobro da outra.

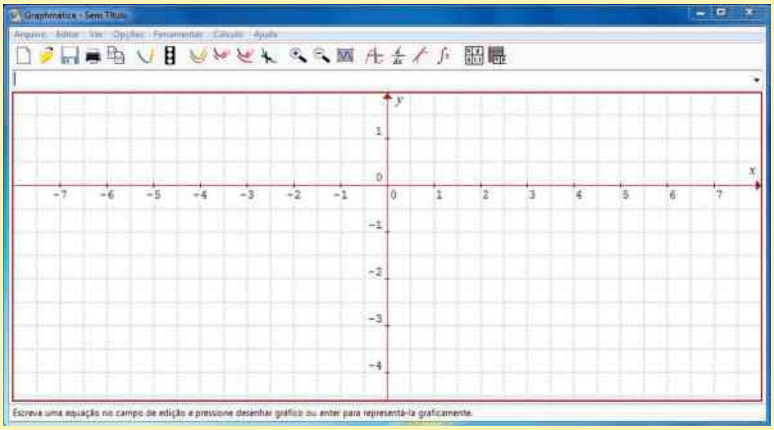
**a)** Obtenha as quatro raízes da equação.

**b)** Determine os valores de **p** e **q**.

## TROQUE IDEIAS

### Interpretando e construindo gráficos de funções polinomiais de grau maior que 2 com um *software* livre

Graphmática é um *software* livre de matemática que permite, entre várias possibilidades, a construção de gráficos de funções polinomiais. Veja abaixo a tela de "abertura" do programa.



2014 KSOFT, INC

Note que o plano cartesiano é apresentado com um fundo quadriculado, o que facilita a leitura e a localização de pontos. Acima do plano há um campo, em branco, no qual deve ser inserida, por meio de digitação, a lei da função. Na barra de ferramentas do Graphmática há a opção, por meio do campo "view", de se alterar a unidade de medida no plano utilizando os comandos "zoom in" e "zoom out".

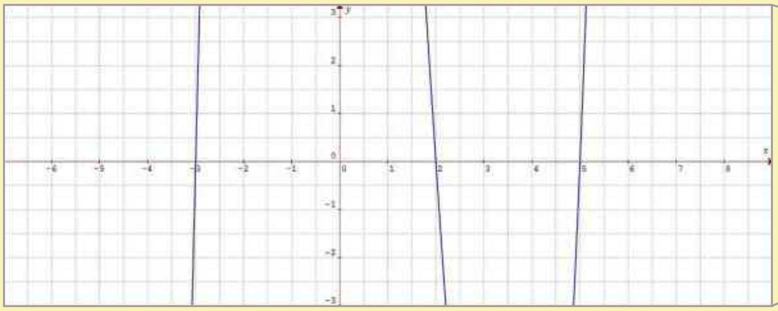
Para se digitar a lei de uma função em que apareçam potências, deve-se usar o símbolo ^. Por exemplo, para se inserir $2x^3$, deve-se digitar 2x^3. Observe que não é necessário digitar o sinal de multiplicação entre o coeficiente 2 e a parte literal $x^3$.

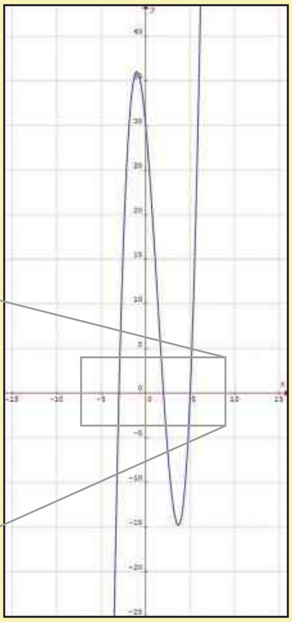
**a)** Observe o gráfico de $y = x^3 - 4x^2 - 11x + 30$, construído no Graphmática, e responda às questões.

i) Qual é o número de raízes reais desse polinômio?

ii) Quais são os pontos de interseção do gráfico com o eixo das abscissas? E com o eixo das ordenadas?

iii) Para que valores de **x** tem-se $f(x) = 30$?





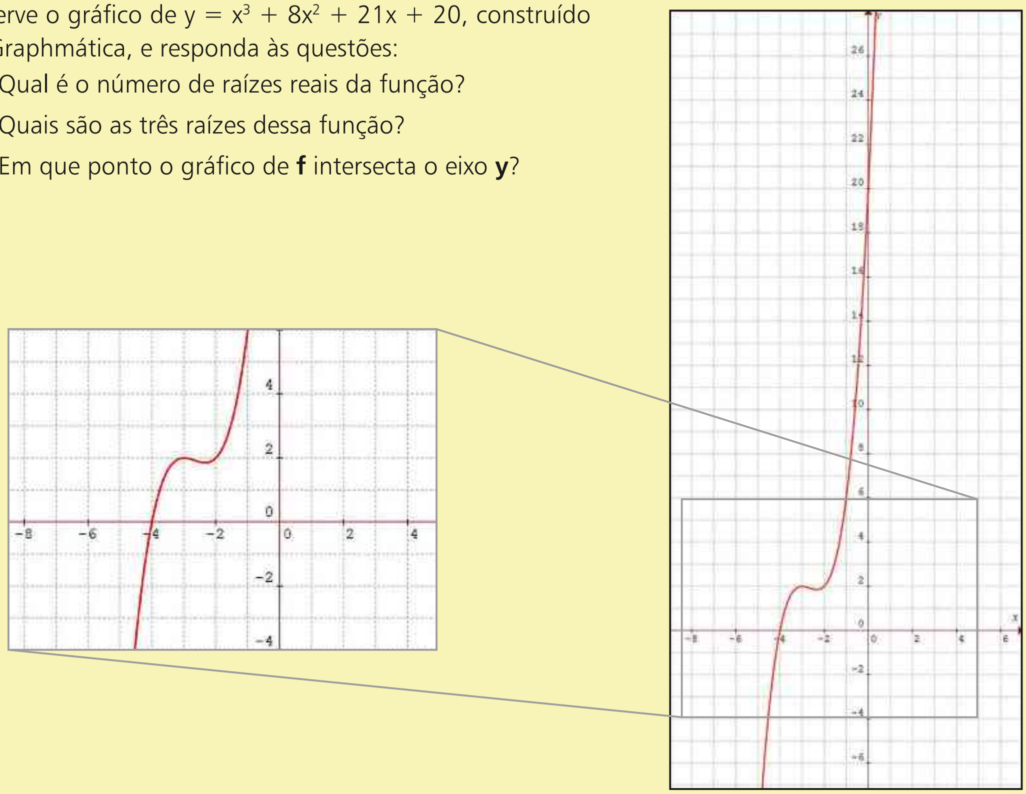
2014 KSOFT, INC

**b)** Observe o gráfico de $y = x^3 + 8x^2 + 21x + 20$, construído no Graphmática, e responda às questões:

i) Qual é o número de raízes reais da função?

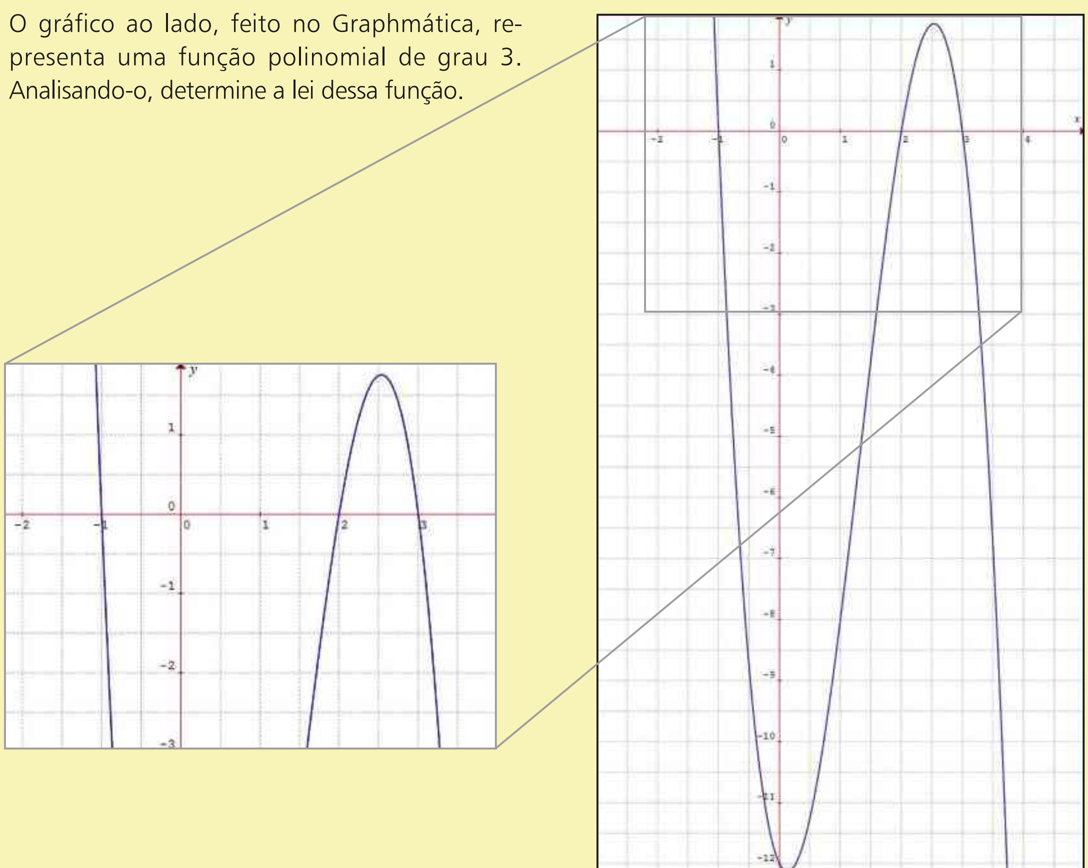
ii) Quais são as três raízes dessa função?

iii) Em que ponto o gráfico de **f** intersecta o eixo **y**?



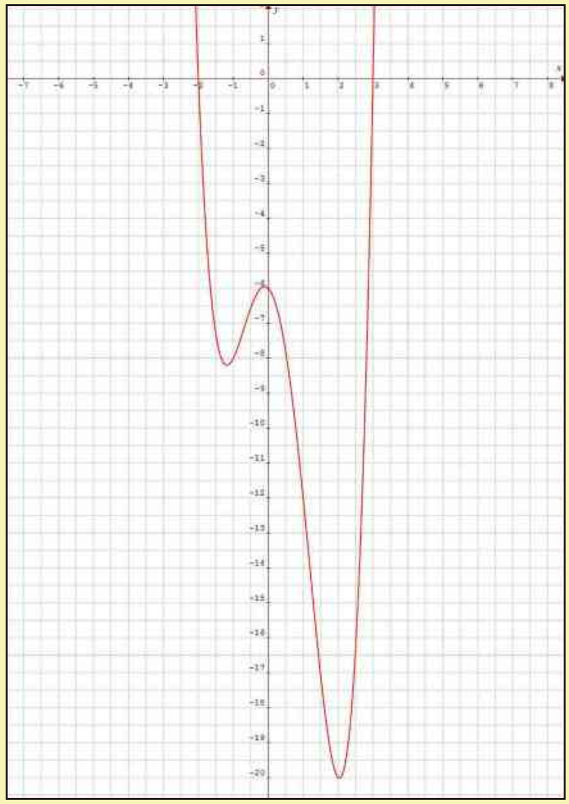
2014 KSOFT, INC

**c)** O gráfico ao lado, feito no Graphmática, representa uma função polinomial de grau 3. Analisando-o, determine a lei dessa função.



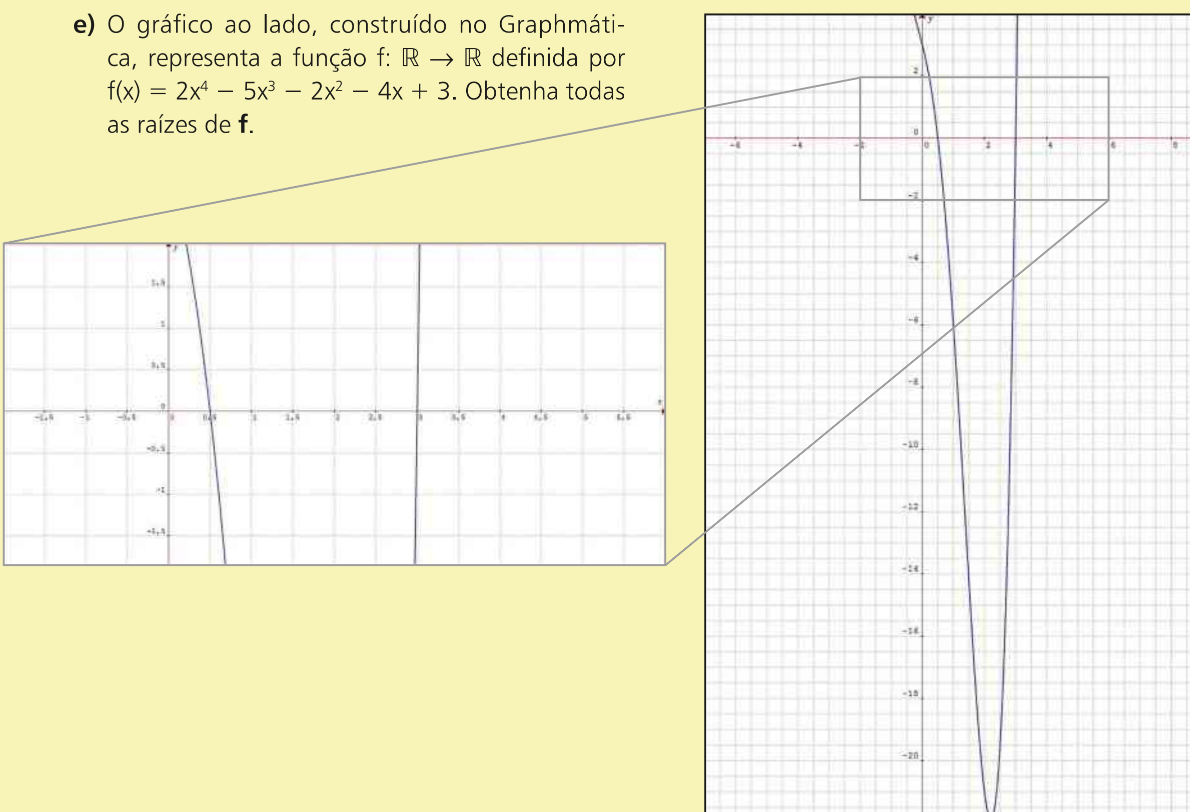
2014 KSOFT, INC

**d)** Observe o gráfico de $y = x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6$, construído no Graphmática. Analisando o gráfico, calcule todas as raízes da função.



2014 KSOFT, INC

**e)** O gráfico ao lado, construído no Graphmática, representa a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x^4 - 5x^3 - 2x^2 - 4x + 3$. Obtenha todas as raízes de **f**.



2014 KSOFT, INC