CAPÍTULO 10

Semelhança e triângulos retângulos

Semelhança

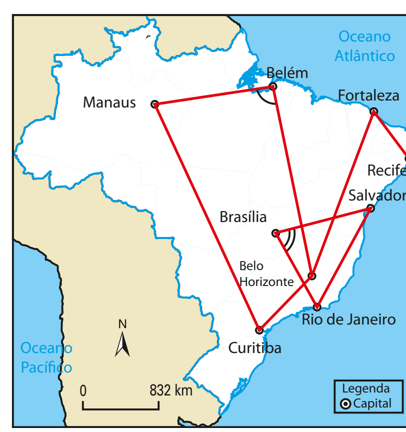
Cada uma das figuras apresenta, em escalas diferentes, um mapa contendo o nome de algumas capitais brasileiras.

figura A

Brasil: algumas capitais

figura B

Brasil: algumas capitais



Fonte: *Atlas geográfico escolar.* 6ª ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2012. p. 90.

Vamos relacionar elementos da figura **A** com seus correspondentes da figura **B** e apresentar alguns conceitos importantes.

- Medindo a distância entre duas cidades quaisquer na figura **A** e a correspondente distância na figura **B**, observamos que a primeira mede o dobro da segunda.
- Ao medir um ângulo qualquer em uma das figuras e seu correspondente na outra, obteremos a mesma medida.

Por exemplo, ao medir a distância entre Belo Horizonte e Fortaleza na figura **A**, obtemos $d_1 = 46$ mm. Na figura **B**, a distância que separa essas duas capitais é $d'_1 = 23$ mm.

Entre o Rio de Janeiro e Salvador, temos, em **A**, $d_2 = 30$ mm e, em **B**, $d'_2 = 15$ mm.

Generalizando, para essas duas figuras, temos: $d_i = 2d'_i$.

Isso nos garante que existe uma constante de proporcionalidade, **k**, entre as medidas dos comprimentos na figura **A** e seus correspondentes comprimentos na figura **B**; no caso, $k = \frac{d_i}{d'_i} = 2$. Essa constante chama-se **razão de semelhança**.

Vamos estudar agora a parte angular: tanto na figura **A** como na **B**, o ângulo assinalado com vértice em Belém mede 93°. Da mesma forma que, nas duas figuras, cada ângulo assinalado com vértice na capital federal tem 76°.

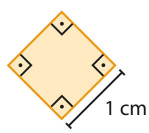
Os ângulos indicam a "forma" da figura, que se mantém quando a ampliamos ou reduzimos. O que se modifica nesses casos é apenas as medidas dos segmentos de reta.

Como essas duas condições (medidas lineares proporcionais e medidas angulares congruentes) são satisfeitas, dizemos que as duas figuras são **semelhantes**.

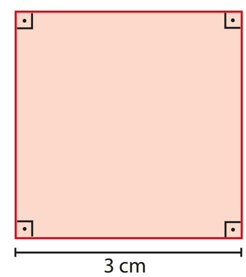
EXEMPLO 1

Dois quadrados quaisquer são semelhantes.

1



2



A razão de semelhança entre os quadrados 1 e 2 é:

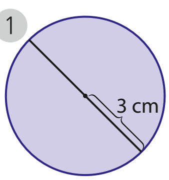
$$\frac{1\text{ cm}}{3\text{ cm}} = \frac{1}{3}$$

Poderíamos também ter calculado a razão de semelhança entre os quadrados 2 e 1, nessa ordem, obtendo $\frac{3\text{ cm}}{1\text{ cm}} = 3$, que é o inverso de $\frac{1}{3}$.

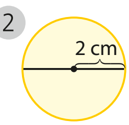
EXEMPLO 2

Dois círculos quaisquer são semelhantes.

1



2



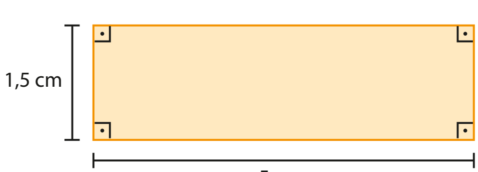
A razão de semelhança entre os círculos 1 e 2 pode ser determinada pela razão entre as medidas dos raios, que é $\frac{3\text{ cm}}{2\text{ cm}} = 1{,}5$.

Observe que a razão entre as medidas de seus diâmetros é, também, $\frac{6\text{ cm}}{4\text{ cm}} = \frac{3}{2} = 1{,}5$.

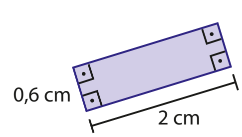
EXEMPLO 3

Dois retângulos serão semelhantes somente se a razão entre as medidas de seus lados maiores for igual à razão entre as medidas de seus lados menores.

1



2



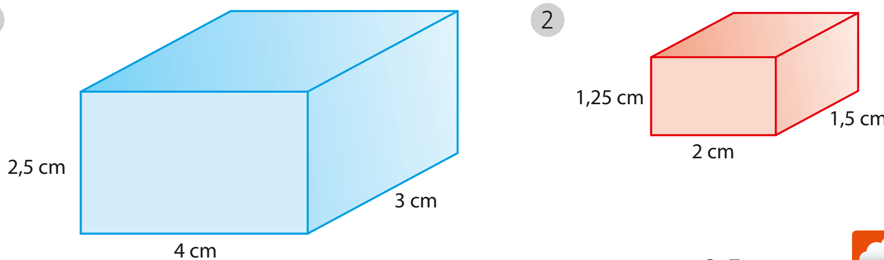
PENSE NISTO:

Dê um exemplo de dois retângulos que não são semelhantes.

A razão de semelhança entre os retângulos 1 e 2 é $\frac{5\text{ cm}}{2\text{ cm}} = \frac{1{,}5\text{ cm}}{0{,}6\text{ cm}} = 2{,}5$.

EXEMPLO 4

Dois blocos retangulares (paralelepípedos retângulos) serão semelhantes somente se as razões entre as três dimensões (tomadas, por exemplo, em ordem crescente) de um deles e as correspondentes dimensões do outro forem sempre iguais.



A razão de semelhança entre os paralelepípedos 1 e 2 é $\frac{2,5 \text{ cm}}{1,25 \text{ cm}} = \frac{3 \text{ cm}}{1,5 \text{ cm}} = \frac{4 \text{ cm}}{2 \text{ cm}} = 2$.

Logo, eles são semelhantes.

PENSE NISTO:

Dois cubos quaisquer são sempre semelhantes?

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

1 Indique quais das seguintes afirmações são verdadeiras e quais são falsas.

a) Dois retângulos quaisquer são semelhantes.

b) Dois círculos quaisquer são semelhantes.

c) Dois triângulos retângulos quaisquer são semelhantes.

d) Dois triângulos equiláteros quaisquer são semelhantes.

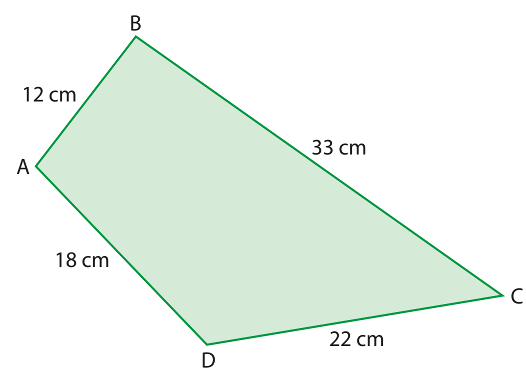
e) Dois trapézios retângulos quaisquer são semelhantes.

f) Dois losangos quaisquer são semelhantes.

2 Dois retângulos, $\mathbf{R}_1$ e $\mathbf{R}_2$, são semelhantes. As medidas dos lados de $\mathbf{R}_1$ são 6 cm e 10 cm. Sabendo que a razão de semelhança entre $\mathbf{R}_1$ e $\mathbf{R}_2$, nessa ordem, é $\frac{2}{3}$, determine as medidas dos lados de $\mathbf{R}_2$.

3 Dois triângulos retângulos distintos possuem um ângulo de 48° e lados com medidas proporcionais. É correto afirmar que eles são semelhantes? Explique.

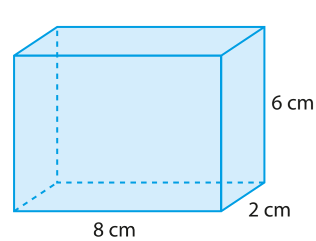
4 Quais são as medidas dos lados de um quadrilátero A'B'C'D' com perímetro de 17 cm, semelhante ao quadrilátero ABCD da figura?



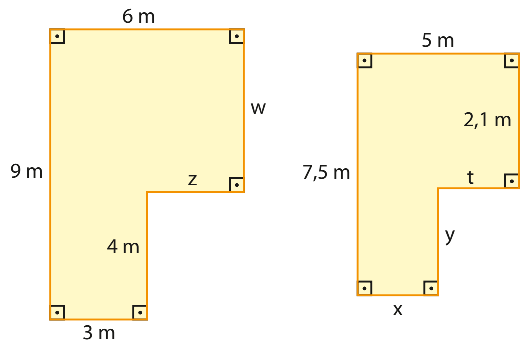
5 Dois triângulos isósceles distintos possuem um ângulo de 40°. É correto afirmar que eles são semelhantes? Explique.

6 No bloco retangular a seguir, o comprimento mede 8 cm, a largura 2 cm e a altura 6 cm.

A razão de semelhança entre esse bloco e um outro nessa ordem é $\frac{1}{3}$. Quais são as dimensões do outro bloco?



7 As duas figuras abaixo são semelhantes.



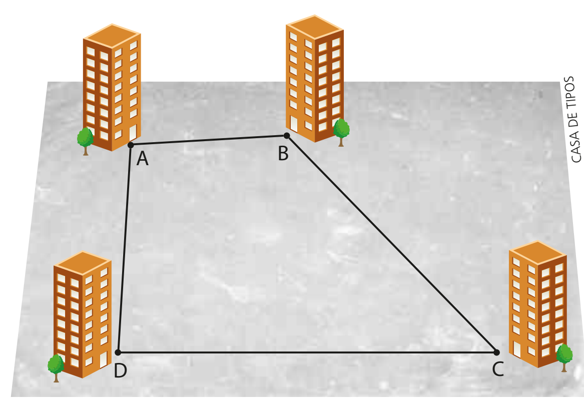
Obtenha os valores de **x**, **y**, **z**, **w** e **t**.

8 Um prospecto de propaganda imobiliária traz as posições das torres **A**, **B**, **C** e **D** de apartamentos, que serão construídos em um grande terreno plano.

Um cliente, interessado em conhecer essas distâncias, mediu com uma régua os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{AD}$, obtendo, respectivamente, 2 cm, 4 cm, 5 cm e 2,7 cm.

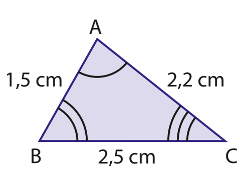
Em seguida, ele verificou, no prospecto, que a escala utilizada era de 1 : 2 000.

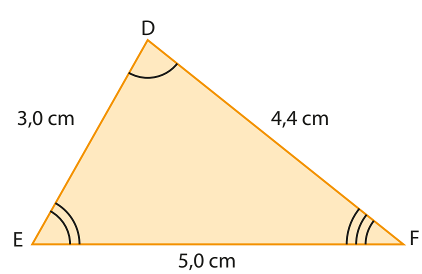
Que valores ele obteve para as distâncias reais entre as torres **A** e **B**, **B** e **C**, **C** e **D**, e **A** e **D**?



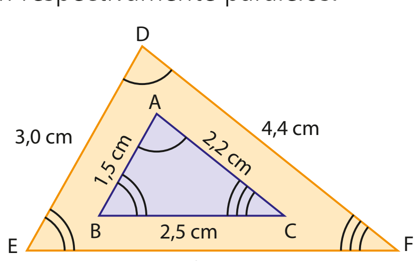
Semelhança de triângulos

Observe os triângulos ABC e DEF, construídos de modo a terem a mesma forma.





É possível colocar o triângulo menor (ABC) dentro do maior (DEF), de maneira que seus lados fiquem respectivamente paralelos.



OBSERVAÇÃO

Usaremos em toda a coleção a notação AB para representar a medida de um segmento $\overline{AB}$ (segmento de extremidades **A** e **B**).

Observe que:

$$\hat{A} \equiv \hat{D} \qquad \hat{B} \equiv \hat{E} \qquad \hat{C} \equiv \hat{F}$$

Se calcularmos as razões entre os lados correspondentes, teremos:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{1{,}5\text{ cm}}{3{,}0\text{ cm}} = \frac{1}{2} \qquad \frac{AC}{DF} = \frac{2{,}2\text{ cm}}{4{,}4\text{ cm}} = \frac{1}{2} \qquad \frac{BC}{EF} = \frac{2{,}5\text{ cm}}{5{,}0\text{ cm}} = \frac{1}{2}$$

Logo, as razões são todas iguais, ou seja, os lados correspondentes (homólogos) são proporcionais.

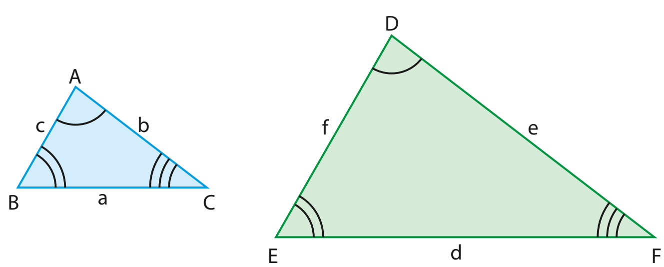
$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$$

Daí, podemos estabelecer a seguinte definição:

Dois triângulos são semelhantes se seus ângulos correspondentes são congruentes e os lados homólogos são proporcionais.

Em símbolos matemáticos, podemos escrever:

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A} \equiv \hat{D} \\ \hat{B} \equiv \hat{E} \\ \hat{C} \equiv \hat{F} \end{cases} \text{ e } \frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$$



Símbolos
$\sim$: semelhante
$\equiv$: congruente

Razão de semelhança

Se dois triângulos são semelhantes, a razão entre as medidas dos lados correspondentes é chamada **razão de semelhança**. Nos triângulos ABC e DEF, que estão logo acima:

$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} = k$, em que **k** é a razão de semelhança.

O conceito de triângulos semelhantes fixou as seguintes condições para um triângulo ABC ser semelhante a outro A'B'C':

$$\underbrace{\hat{A} \equiv \hat{A}',\ \hat{B} \equiv \hat{B}',\ \hat{C} \equiv \hat{C}'}_{\text{três congruências de ângulos}} \quad \text{e} \quad \underbrace{\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}}_{\text{proporcionalidade dos três lados}}$$

PENSE NISTO:

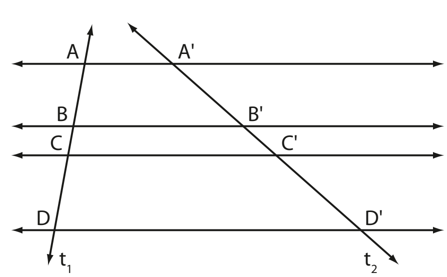
O que ocorre quando a razão de semelhança de dois triângulos é igual a 1?

Mas podemos reduzir essas exigências a uma quantidade menor. Os casos de semelhança (ou critérios de semelhança), que estudaremos a seguir, mostram quais são as condições mínimas para dois triângulos serem semelhantes.

Para demonstrar a validade dos critérios de semelhança, precisamos rever o teorema de Tales e o teorema fundamental da semelhança.

Ao observar, na figura ao lado, um feixe de retas paralelas com duas transversais $\mathbf{t_1}$ e $\mathbf{t_2}$, podemos dizer que:

- são **correspondentes** os pontos: **A** e **A'**, **B** e **B'**, **C** e **C'**, **D** e **D'**;
- são **correspondentes** os segmentos: $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$, $\overline{CD}$ e $\overline{C'D'}$, $\overline{AC}$ e $\overline{A'C'}$ etc.



Teorema de Tales

Se duas retas são transversais a um feixe de retas paralelas, então a razão entre as medidas de dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre as medidas dos segmentos correspondentes da outra.

Considerando a figura na página anterior, a tese é: $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{A'B'}{C'D'}$.

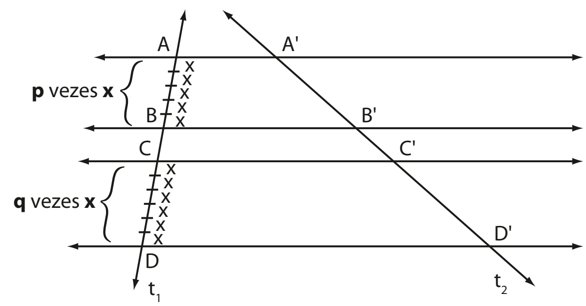
Vamos fazer a demonstração supondo que $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são segmentos comensuráveis, isto é, existe um segmento de medida **x** que é submúltiplo de $\overline{AB}$ e de $\overline{CD}$, ou seja, existem números inteiros **p** e **q** de modo que $AB = p \cdot x$ e $CD = q \cdot x$, como mostra a figura (neste caso, temos $p = 5$ e $q = 6$).

Temos:

$$AB = p \cdot x$$
$$CD = q \cdot x$$

Estabelecendo a razão

$$\frac{AB}{CD} = \frac{p \cdot x}{q \cdot x} \Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{p}{q} \quad (1)$$



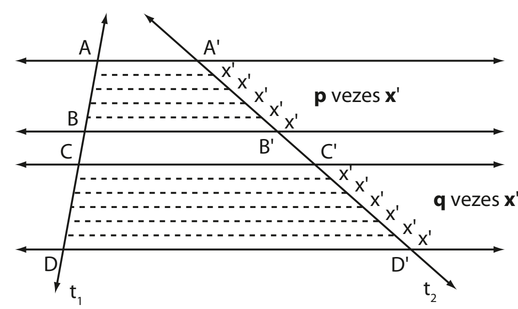
Conduzindo retas do feixe (paralelas a $\overline{AA'}$) pelos pontos de divisão de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ (veja linhas tracejadas na figura), observamos que:

- O segmento $\overline{A'B'}$ fica dividido em **p** segmentos congruentes, cada um com medida **x'**:

$$A'B' = p \cdot x'$$

- O segmento $\overline{C'D'}$ fica dividido em **q** segmentos congruentes, cada um com medida **x'**:

$$C'D' = q \cdot x'$$



Estabelecemos a razão $\dfrac{A'B'}{C'D'} = \dfrac{p \cdot x'}{q \cdot x'} \Rightarrow \dfrac{A'B'}{C'D'} = \dfrac{p}{q}$ (2)

Comparando (1) e (2), temos: $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{A'B'}{C'D'}$.

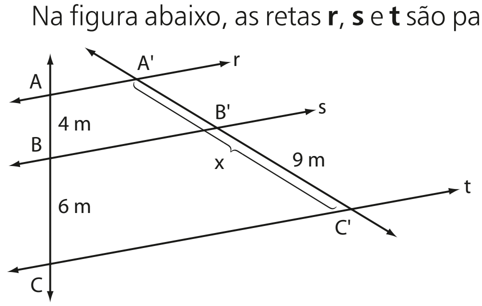
Pode-se mostrar que o teorema de Tales também é válido no caso em que $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são incomensuráveis, isto é, quando não existe submúltiplo comum de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.

PENSE NISTO:

Um estudante utilizou a proporção $\dfrac{10}{6} = \dfrac{x}{9}$ para solucionar o problema do exemplo 5. Comente essa estratégia.

EXEMPLO 5

Na figura abaixo, as retas **r**, **s** e **t** são paralelas. Vamos calcular o valor de **x**.



Observe que o segmento $\overline{A'B'}$ mede, em metros, $x - 9$.

Aplicando o teorema de Tales, segue que:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} \Rightarrow \frac{4}{6} = \frac{x-9}{9} \Rightarrow 6x = 90 \Rightarrow x = 15$$

Logo, $x = 15$ m.

Teorema fundamental da semelhança

Toda reta paralela a um lado de um triângulo, que intersecta os outros dois lados em pontos distintos, determina um novo triângulo semelhante ao primeiro.

Vamos comprovar a validade deste teorema.

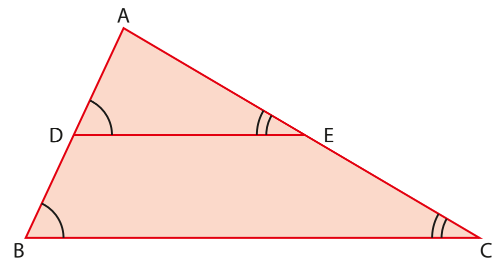
Hipótese: $\overline{DE} \mathbin{/\!/} \overline{BC}$ ($D \in \overline{AB}$ e $E \in \overline{AC}$)

Tese: $\triangle ADE \sim \triangle ABC$

Demonstração:

Considerando os triângulos ADE e ABC e o paralelismo de $\overline{DE}$ e $\overline{BC}$, temos:

$$\hat{D} \equiv \hat{B} \quad \text{e} \quad \hat{E} \equiv \hat{C}$$

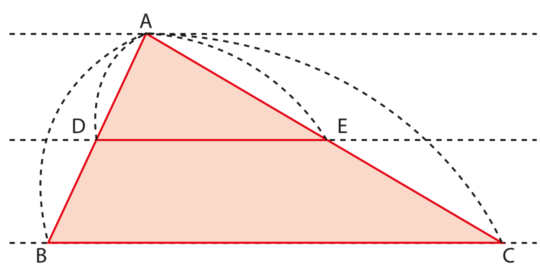


Então, os triângulos ADE e ABC têm os ângulos ordenadamente congruentes:

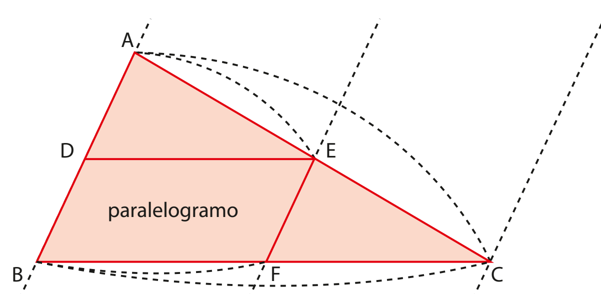
$$\hat{D} \equiv \hat{B},\ \hat{E} \equiv \hat{C} \text{ e } \hat{A} \text{ é comum} \quad (1)$$

Sendo $\overline{DE} \mathbin{/\!/} \overline{BC}$ e aplicando o teorema de Tales nas transversais $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, temos:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \quad (2)$$



Pelo ponto **E**, vamos conduzir $\overline{EF}$, paralela a $\overline{AB}$.



Sendo $\overline{EF} \mathbin{/\!/} \overline{AB}$ e aplicando o teorema de Tales, temos: $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{BF}{BC}$.

Mas $\overline{BF} \equiv \overline{DE}$, pois BDEF é um paralelogramo; vamos então substituir BF por DE na proporção anterior:

$$\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \quad (3)$$

Comparando (2) e (3), resulta:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \quad (4)$$

Concluímos, assim, que os triângulos ADE e ABC têm ângulos congruentes (veja 1) e lados proporcionais (veja 4). Logo, eles são semelhantes:

$$\triangle ADE \sim \triangle ABC$$

Daí concluímos a validade do **teorema fundamental da semelhança**.

EXEMPLO 6

Na figura ao lado, $\overline{DE}$ é paralelo a $\overline{AB}$. Vamos calcular a medida dos segmentos $\overline{CB}$ e $\overline{CE}$.

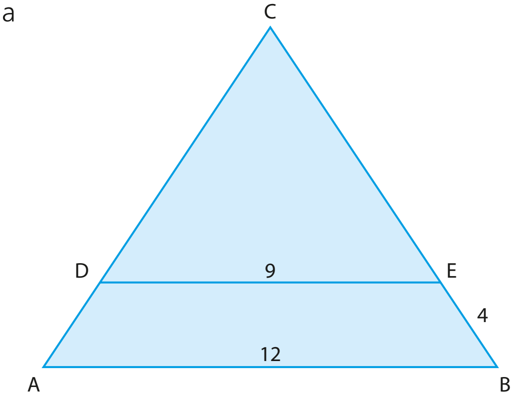
Sendo $\overline{DE} \mathbin{//} \overline{AB}$, temos: $\triangle CDE \sim \triangle CAB$.

Daí, segue que:

$$\frac{CD}{CA} = \frac{CE}{CB} = \frac{DE}{AB} = \frac{9}{12} \Rightarrow \frac{CE}{CB} = \frac{9}{12} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{CE}{CE + 4} = \frac{9}{12} \Rightarrow CE = 12$$

$$CB = CE + 4 = 12 + 4 = 16$$

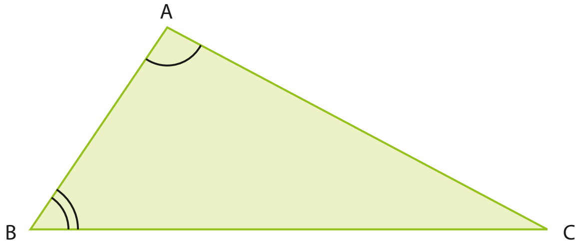


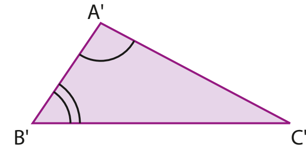
Critérios de semelhança

AA (ângulo — ângulo)

Observe os triângulos ABC e A'B'C', com dois ângulos respectivamente congruentes:

$$\hat{A} \equiv \hat{A}' \qquad \text{e} \qquad \hat{B} \equiv \hat{B}'$$





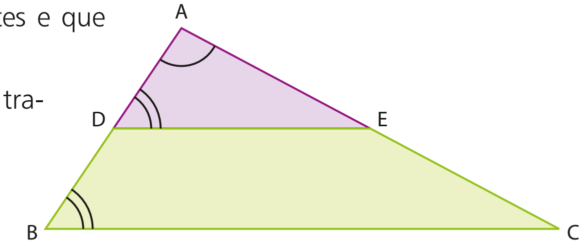
Se $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, então $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ e, daí, $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Vamos supor que os triângulos não sejam congruentes e que $AB > A'B'$.

Tomemos **D** em $\overline{AB}$, de modo que $\overline{AD} \equiv \overline{A'B'}$, e por **D** tracemos $\overline{DE} \mathbin{//} \overline{BC}$.

Pelo caso de congruência ALA, os triângulos ADE e A'B'C' são congruentes:

$$\triangle ADE \equiv \triangle A'B'C'$$



Pelo teorema fundamental da semelhança os triângulos ADE e ABC são semelhantes:

$$\triangle ADE \sim \triangle ABC$$

Então, os triângulos A'B'C' e ABC também são semelhantes:

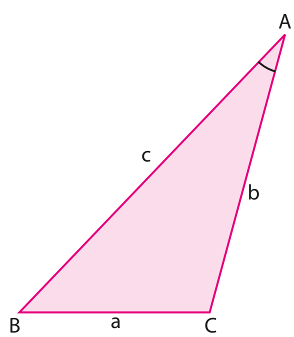
$$\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$$

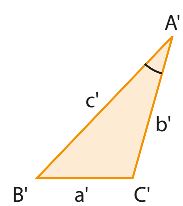
> Se dois triângulos possuem dois ângulos respectivamente congruentes, então os triângulos são **semelhantes**.

LAL (lado — ângulo — lado)

> Se dois triângulos têm dois lados correspondentes proporcionais e os ângulos compreendidos são congruentes, então os triângulos são semelhantes.

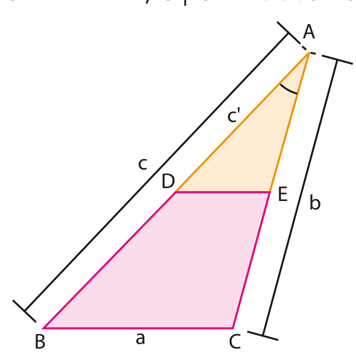
Observe a demonstração considerando os dois triângulos, ABC e A'B'C', tais que:





$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{c}{c'} = \dfrac{b}{b'} \\ \hat{A} \equiv \hat{A}' \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

Vamos supor que os triângulos ABE e A'B'C' não sejam congruentes e que AB > A'B'.
Tomemos **D** em $\overline{AB}$, de modo que $\overline{AD} \equiv \overline{A'B'}$, e por **D** tracemos $\overline{DE}$ // $\overline{BC}$.



Note que, pelo teorema fundamental da semelhança:

$$\triangle ABC \sim \triangle ADE$$

Agora, precisamos mostrar que $\triangle ADE \equiv \triangle A'B'C'$.
Como os triângulos ABC e ADE são semelhantes, temos:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow \frac{c'}{c} = \frac{AE}{b}$$

Pela hipótese $\left(\dfrac{c'}{c} = \dfrac{b'}{b}\right)$, temos que AE = b', e portanto $\overline{AE} \equiv \overline{A'C'}$.

Logo, pelo caso de congruência LAL:

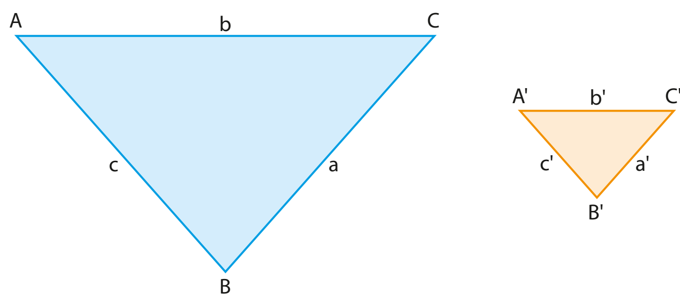
$$\triangle ADE \equiv \triangle A'B'C'$$

Como $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ e $\triangle ADE \equiv \triangle A'B'C'$, então $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

LLL (lado — lado — lado)

Se dois triângulos têm os lados correspondentes proporcionais, então os triângulos são semelhantes.

Considere os triângulos ABC e A'B'C' tais que:



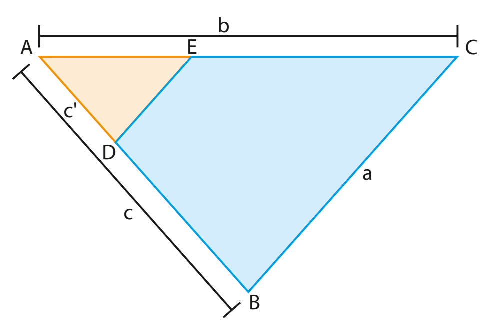
$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

Vamos supor que os triângulos ABC e A'B'C' não sejam congruentes e que AB > A'B'.
Tomemos **D** em $\overline{AB}$, de modo que $\overline{AD} \equiv \overline{A'B'}$, e por **D** tracemos $\overline{DE}$ // $\overline{BC}$.
Note que, pelo teorema fundamental da semelhança:

$$\triangle ABC \sim \triangle ADE$$

Agora, precisamos mostrar que $\triangle ADE \equiv \triangle A'B'C'$.

Já sabemos que $\overline{AD} \equiv \overline{A'B'}$. Como os triângulos ABC e ADE são semelhantes, temos:



$$\frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow \frac{DE}{a} = \frac{AE}{b} = \frac{c'}{c}$$

Pela hipótese $\left(\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}\right)$, temos:

- DE = a', e portanto $\overline{DE} \equiv \overline{B'C'}$.
- AE = b', e portanto $\overline{AE} \equiv \overline{A'C'}$.

Logo, pelo caso de congruência LLL:

$$\triangle ADE \equiv \triangle A'B'C'$$

Como $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ e $\triangle ADE \equiv \triangle A'B'C'$, então $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

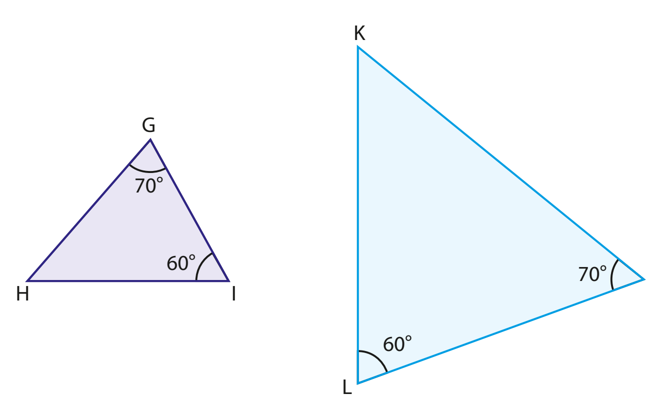
EXEMPLO 7

Observe os dois triângulos ilustrados.
Temos:

$$\hat{G} \equiv \hat{J} \text{ e } \hat{I} \equiv \hat{L}$$

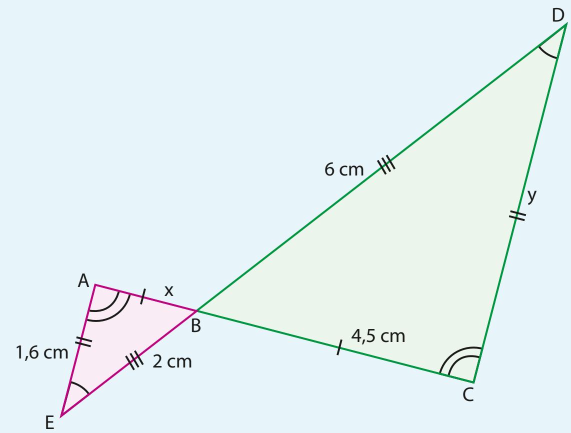
Então, pelo critério AA de semelhança, $\triangle GHI \sim \triangle JKL$ e, em consequência, seus lados homólogos são proporcionais:

$$\frac{GH}{JK} = \frac{GI}{JL} = \frac{HI}{KL}$$



EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

1 Sabe-se que $\overline{AE} \parallel \overline{CD}$. Quais são as medidas **x** de $\overline{AB}$ e **y** de $\overline{CD}$?



Solução:

Como $\overline{AE} \parallel \overline{CD}$, há dois pares de ângulos alternos internos congruentes:

$$B\hat{A}E \equiv B\hat{C}D \quad e \quad B\hat{E}A \equiv B\hat{D}C$$

Há também $A\hat{B}E \equiv C\hat{B}D$ (ângulos opostos pelo vértice). Assim, temos $\triangle ABE \sim \triangle CBD$.

Podemos escrever a proporcionalidade entre as medidas dos lados homólogos:

$$\frac{AB}{CB} = \frac{AE}{CD} = \frac{BE}{BD} \Rightarrow \frac{x}{4{,}5} = \frac{1{,}6}{y} = \frac{2}{6}$$

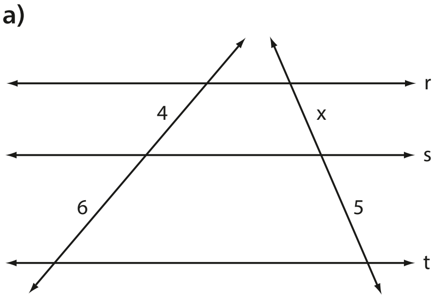
Temos, então, $x = \dfrac{2 \cdot 4{,}5}{6}$, isto é, $x = 1{,}5$ cm, além de $y = \dfrac{6 \cdot 1{,}6}{2}$, ou seja, $y = 4{,}8$ cm.

EXERCÍCIOS

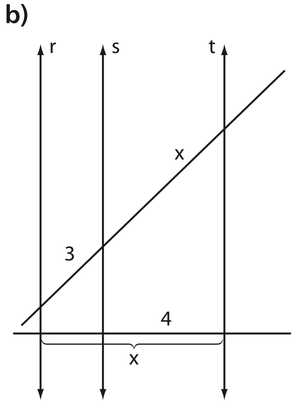
FAÇA NO CADERNO

9 Em cada caso, as retas **r**, **s** e **t** são paralelas. Determine os valores de **x** e **y**:

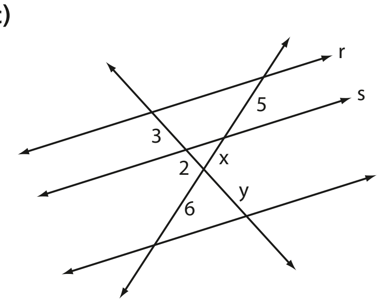
a)



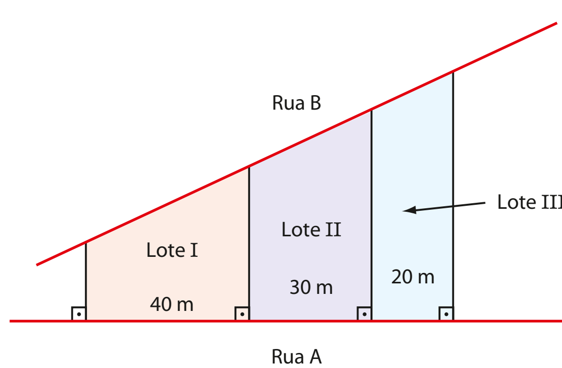
b)



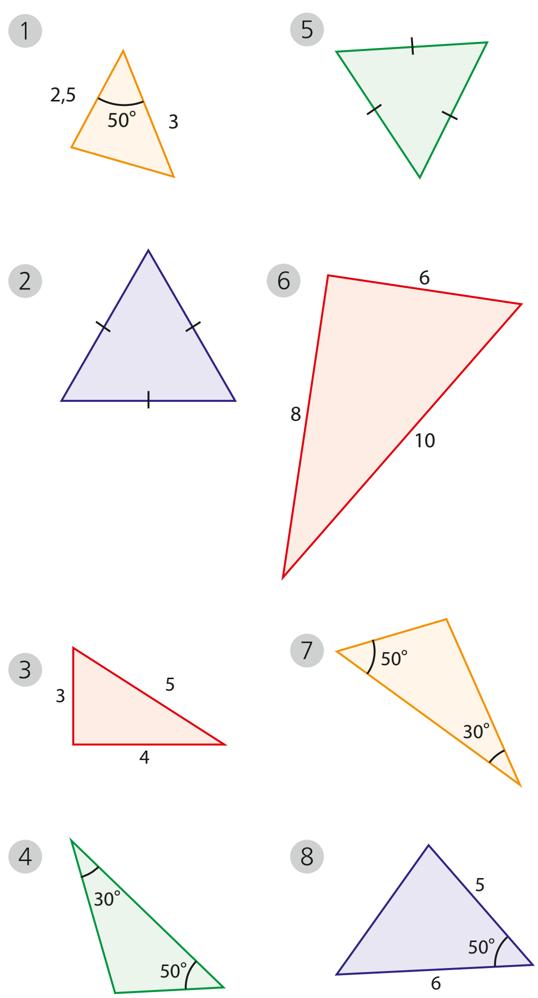
c)



10 Três terrenos têm frentes para a rua **A** e para a rua **B**, como mostra a figura. As divisas laterais são perpendiculares à rua **A**. Qual é a medida da frente para a rua **B** de cada lote, sabendo que a frente total para essa rua mede 180 m?

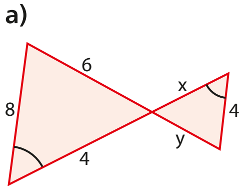


11 São dados oito triângulos. Indique os pares de triângulos semelhantes e o critério de semelhança correspondente:

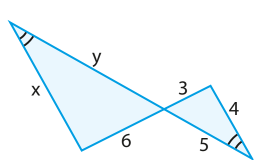


12 Determine **x** e **y** nas figuras, nas quais os ângulos assinalados com a mesma marcação são congruentes.

a)



b)

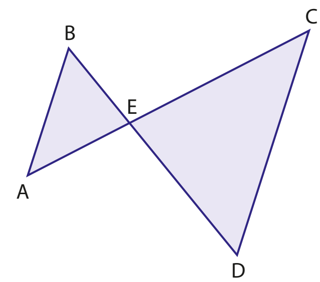


13 Numa certa hora do dia, um prédio de 48 m de altura projeta no solo uma sombra de 10 m de comprimento.

a) Qual é o comprimento da sombra projetada por um prédio de 18 m de altura, situado na mesma rua, supondo-a plana e horizontal?

b) Em outra hora do dia, a sombra do prédio menor diminuiu 50 cm em relação à situação anterior. Em quanto diminuirá a sombra do prédio maior?

14 Determine DE, sendo $\overline{AB}$ // $\overline{CD}$, BE = 4 cm, EC = 8 cm e AC = 11 cm.



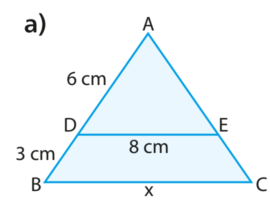
15 Uma rampa de inclinação constante tem 90 m de extensão e seu ponto mais alto se encontra a 8 m do solo.

a) Saindo do solo, uma pessoa se desloca sobre a rampa, atingindo um ponto que se encontra a 2 m de altura em relação ao solo. Quantos metros ainda faltam para a pessoa chegar ao ponto mais alto?

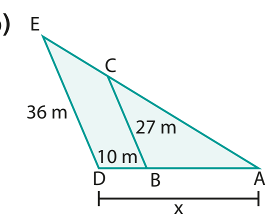
b) Saindo do ponto mais alto da rampa, uma pessoa desce 20 m da rampa, chegando a um ponto **S**. A que altura **S** está em relação ao solo?

16 Sendo $\overline{DE}$ // $\overline{BC}$, determine **x** nos casos:

a)

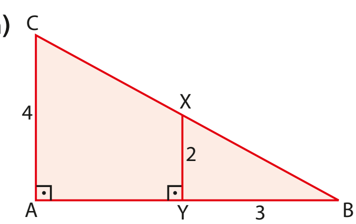


b)

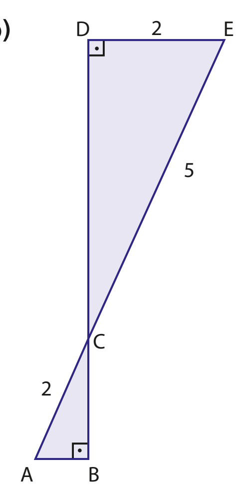


17 Determine a medida de $\overline{AB}$ em cada caso:

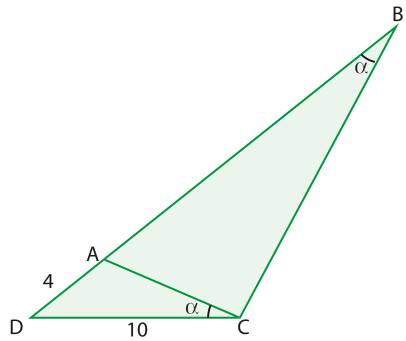
a)



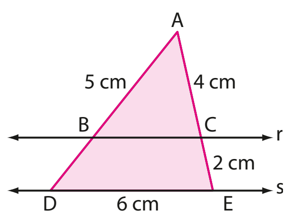
b)



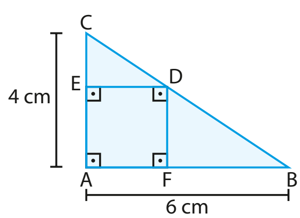
c)



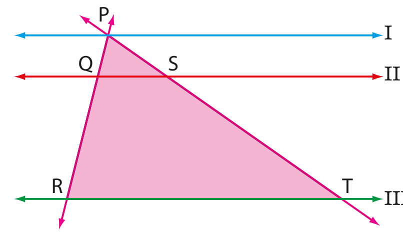
18 Determine a razão entre os perímetros dos triângulos ABC e ADE, nesta ordem, sabendo que r // s.



19 Determine a medida do lado do quadrado AEDF da figura:

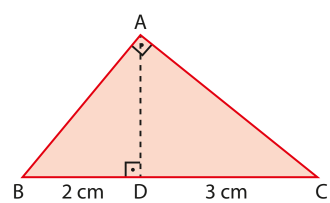


20 A figura representa três ruas paralelas (I, II e III) de um condomínio. A partir do ponto **P**, deseja-se puxar uma extensa rede de fios elétricos, conforme indicado pelos segmentos $\overline{PR}$, $\overline{PT}$, $\overline{QS}$ e $\overline{RT}$.



Sabe-se que a quantidade de fio (em metros) usada para ligar os pontos **Q** e **R** é o dobro da quantidade necessária para ligar os pontos **P** e **Q**. Determine quantos metros de fio serão usados para ligar **Q** e **S**, se de **R** a **T** foram usados 84 m.

21 Na figura abaixo, $\overline{AD}$ é perpendicular a $\overline{BC}$.



a) Explique por que os triângulos ABD e CAD são semelhantes.

b) Qual é a medida de $\overline{AD}$?

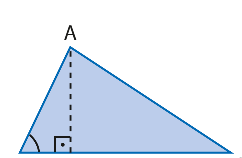
Consequências da semelhança de triângulos

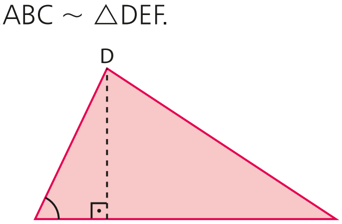
Primeira consequência

Utilizando os critérios de semelhança, podemos provar que, se a razão de semelhança entre dois triângulos é **k**, então:

- a razão entre duas alturas homólogas é **k**;
- a razão entre duas medianas homólogas é **k**;
- a razão entre duas bissetrizes homólogas é **k**;
- **a razão entre as áreas é k^2**.

Vamos provar a última afirmação. Seja $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.





Temos:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} = k$$

Consideremos as alturas homólogas $\overline{AP}$ e $\overline{DQ}$. Os triângulos ABP e DEQ também são semelhantes (pelo critério AA), pois $\hat{B} \equiv \hat{E}$ e $\hat{P} \equiv \hat{Q}$.

Então:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AP}{DQ}, \text{ portanto } \frac{AP}{DQ} = k \text{ (razão de semelhança entre duas alturas homólogas)}$$

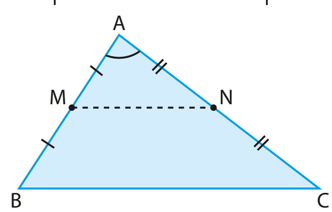
Daí, temos:

$$\left.\begin{array}{l} \text{área } \triangle ABC\text{: } S_1 = \dfrac{BC \cdot AP}{2} \\ \text{área } \triangle DEF\text{: } S_2 = \dfrac{EF \cdot DQ}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{BC \cdot AP}{EF \cdot DQ} = \frac{BC}{EF} \cdot \frac{AP}{DQ} = k \cdot k = k^2$$

Segunda consequência

Se um segmento une os pontos médios de dois lados de um triângulo, então ele é **paralelo ao terceiro lado** e é **metade do terceiro lado**. Veja a justificativa dessa propriedade.

Observe o triângulo ABC da figura em que **M** e **N** são os pontos médios de $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, respectivamente.



Observe os triângulos AMN e ABC. Eles têm o ângulo **Â** em comum e $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{1}{2}$.

De acordo com o critério LAL de semelhança, temos:

$$\triangle AMN \sim \triangle ABC$$

e, portanto, $\hat{M} \equiv \hat{B}$, $\hat{N} \equiv \hat{C}$ e $\frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$.

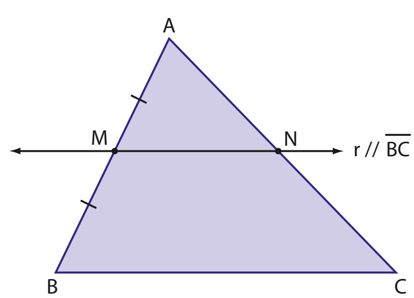
Assim, podemos concluir que $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ e $MN = \frac{BC}{2}$.

Terceira consequência

Se, pelo ponto médio de um lado de um triângulo, traçarmos uma reta paralela a outro lado, ela encontrará o terceiro lado em seu ponto médio.

Veja a justificativa dessa propriedade.

Observe a figura ao lado: tomamos um triângulo ABC e marcamos **M**, ponto médio do lado $\overline{AB}$. Em seguida, traçamos por **M** a reta **r**, paralela ao lado $\overline{BC}$.



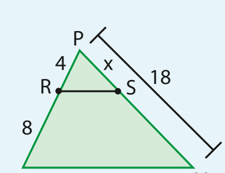
Pelo teorema fundamental da semelhança, temos $\triangle AMN \sim \triangle ABC$; portanto, $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$, ou seja, **N** é o ponto médio de $\overline{AC}$, e MN é a metade de BC.

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

2 Na figura ao lado, $\overline{RS}$ é paralelo a $\overline{TV}$:

a) Determine o valor de **x**.

b) Sendo $\mathbf{S_1}$ a área do triângulo PRS e $\mathbf{S_2}$ a área do triângulo PTV, encontre uma relação entre $\mathbf{S_1}$ e $\mathbf{S_2}$.



Solução:

Como $\overline{RS} \,//\, \overline{TV}$, os triângulos PRS e PTV são semelhantes.

a) Escrevendo a razão de semelhança entre os lados dos triângulos PRS e PTV, temos: $\frac{PR}{PT} = \frac{PS}{PV} \Rightarrow \frac{4}{4+8} = \frac{x}{18} \Rightarrow x = 6$

b) Como a razão de semelhança entre os lados dos triângulos PRS e PTV é $\frac{1}{3}$, nessa ordem, concluímos que a razão entre suas áreas é $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$, isto é, $\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{9}$.

PENSE NISTO:

Na figura do exercício resolvido, qual é a razão entre a área do trapézio RSVT e a área do triângulo PRS?

EXERCÍCIOS

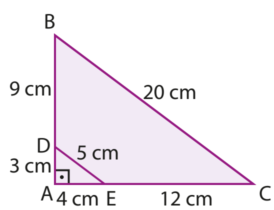
FAÇA NO CADERNO

22 As medidas dos lados de um triângulo ABC são 5,2 cm, 6,5 cm e 7,3 cm. Seja MNP o triângulo cujos vértices são os pontos médios dos lados de ABC.

a) Qual é o perímetro de MNP?

b) Prove que MNP é semelhante a ABC.

23 Na figura, $\overline{DE}$ é paralelo a $\overline{BC}$.



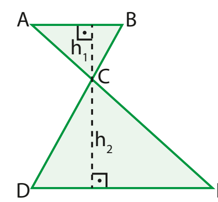
a) Qual é a razão de semelhança dos triângulos ADE e ABC, nessa ordem?

b) Qual é a razão entre os perímetros dos triângulos ADE e ABC, nessa ordem?

c) Qual é a razão entre as áreas dos triângulos ADE e ABC, nessa ordem?

d) Se a área do triângulo ADE é 6 cm², qual é a área do triângulo ABC?

24 Na figura, $\overline{AB}$ é paralelo a $\overline{DE}$. Sabendo que AB = 5 cm, h_1 = 3 cm e DE = 10 cm, determine:

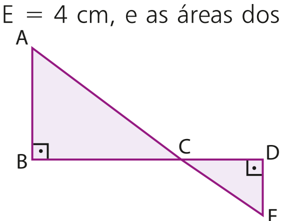


a) h_2;

b) as áreas dos triângulos ABC e CDE.

25 Dois triângulos equiláteros, T_1 e T_2, têm perímetros de 6 cm e 24 cm. Qual é a razão entre a área de T_2 e de T_1?

26 Na figura, $\overline{AB} \,//\, \overline{ED}$, DE = 4 cm, e as áreas dos triângulos ABC e EDC valem, respectivamente, 36 cm² e 4 cm². Quanto mede $\overline{AB}$?



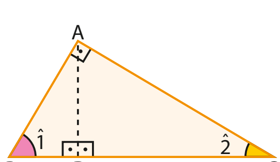
O triângulo retângulo

Todo triângulo retângulo, além do ângulo reto, possui dois ângulos (agudos) complementares.

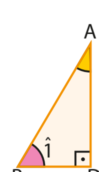
O maior dos três lados do triângulo é o oposto ao ângulo reto e chama-se **hipotenusa**; os outros dois lados são os **catetos**.

Semelhanças no triângulo retângulo

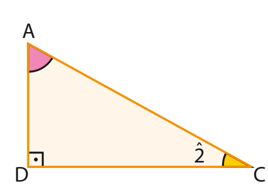
Traçando a altura $\overline{AD}$, relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo ABC, obtemos dois outros triângulos retângulos: DBA e DAC. Observe as figuras:



Os ângulos $\hat{1}$ e $\hat{2}$ são complementares, ou seja, a soma é 90°.



O ângulo $B\hat{A}D$ é complemento do ângulo $\hat{1}$. Então, $B\hat{A}D \equiv \hat{2}$.

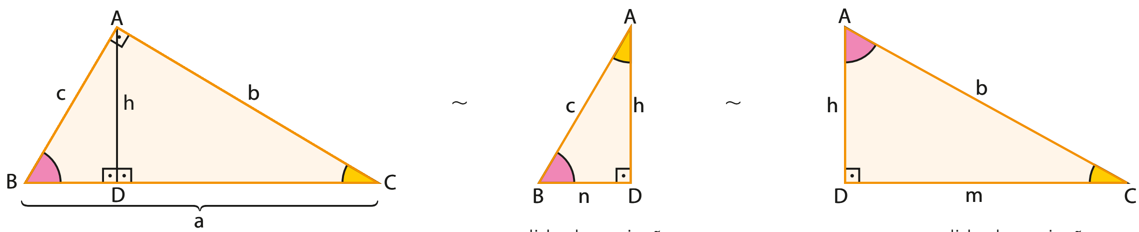


O ângulo $D\hat{A}C$ é complemento do ângulo $\hat{2}$. Então, $D\hat{A}C \equiv \hat{1}$.

Reunindo as conclusões, vemos que os triângulos ABC, DBA e DAC têm os ângulos respectivos congruentes e, portanto, são semelhantes: $\triangle ABC \sim \triangle DBA \sim \triangle DAC$

Relações métricas

Voltemos ao triângulo ABC, retângulo em $\hat{A}$, com a altura $\overline{AD}$. Os segmentos $\overline{BD}$ e $\overline{DC}$ também são chamados de **projeções** dos catetos sobre a hipotenusa.



n: medida da projeção de $\overline{AB}$ sobre $\overline{BC}$.

m: medida da projeção de $\overline{AC}$ sobre $\overline{BC}$.

Explorando a semelhança dos triângulos, temos que:

$$\triangle ABC \sim \triangle DBA \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{c}{n} \Rightarrow c^2 = a \cdot n \qquad (1)$$

$$\triangle ABC \sim \triangle DAC \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{m} \Rightarrow b^2 = a \cdot m \qquad (2)$$

$$\triangle DBA \sim \triangle DAC \Rightarrow \frac{h}{m} = \frac{n}{h} \Rightarrow h^2 = m \cdot n \qquad (3)$$

As relações 1, 2 e 3 são importantes **relações métricas no triângulo retângulo**. Em qualquer triângulo retângulo, temos, portanto:

- O quadrado da medida de um cateto é igual ao produto das medidas da hipotenusa e da projeção desse cateto sobre a hipotenusa, isto é:

$$\boxed{b^2 = a \cdot m} \quad \text{e} \quad \boxed{c^2 = a \cdot n}$$

- O quadrado da medida da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto das medidas dos segmentos que ela determina na hipotenusa:

$$\boxed{h^2 = m \cdot n}$$

Das relações 1, 2 e 3 decorrem outras, entre as quais vamos destacar duas:

Multiplicando membro a membro as relações 1 e 2 e depois usando a 3, temos:

$$\left.\begin{matrix} b^2 = a \cdot m \\ c^2 = a \cdot n \end{matrix}\right\} \Rightarrow b^2 \cdot c^2 = a^2 \cdot \underbrace{m \cdot n}_{3} \Rightarrow b^2 \cdot c^2 = a^2 \cdot h^2 \Rightarrow b \cdot c = a \cdot h$$

- Em qualquer triângulo retângulo, o produto das medidas dos catetos é igual ao produto das medidas da hipotenusa e da altura relativa a ela:

$$\boxed{b \cdot c = a \cdot h}$$

Somando membro a membro as relações 1 e 2 e observando que $m + n = a$, temos:

$$\left.\begin{matrix} b^2 = a \cdot m \\ c^2 = a \cdot n \end{matrix}\right\} \Rightarrow b^2 + c^2 = a \cdot m + a \cdot n \Rightarrow b^2 + c^2 = a \cdot \underbrace{(m + n)}_{a} \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2$$

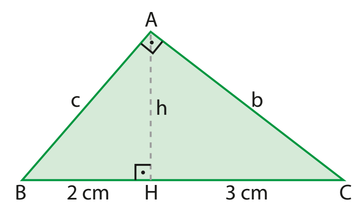
- Em qualquer triângulo retângulo, a soma dos quadrados das medidas dos catetos é igual ao quadrado da medida da hipotenusa.

$$b^2 + c^2 = a^2$$

Essa última relação é conhecida como **teorema de Pitágoras**.

EXEMPLO 8

Sejam 2 cm e 3 cm as medidas das projeções dos catetos de um triângulo retângulo sobre a hipotenusa (veja a figura). Vamos calcular as medidas dos catetos.



Podemos fazer:

$$3: h^2 = 2 \cdot 3 \Rightarrow h = \sqrt{6}$$

Como o triângulo ABH é retângulo, vale o teorema de Pitágoras:

$$c^2 = 2^2 + h^2 = 4 + 6 = 10 \Rightarrow c = \sqrt{10}$$

Logo, o cateto $\overline{BA}$ mede $\sqrt{10}$ cm.

No triângulo ACH, que é retângulo, temos:

$$b^2 = h^2 + 3^2 = 6 + 9 = 15 \Rightarrow b = \sqrt{15}$$

Logo, o cateto $\overline{AC}$ mede $\sqrt{15}$ cm.

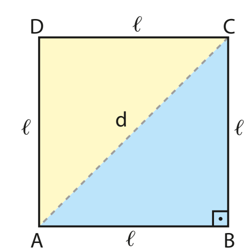
PENSE NISTO:

De que outro modo poderíamos ter calculado as medidas dos catetos de ABC?

Aplicações notáveis do teorema de Pitágoras

1ª) Diagonal do quadrado

Consideremos um quadrado ABCD cujo lado mede ℓ. Vamos encontrar a medida da diagonal **d** do quadrado em função de ℓ.



Basta aplicar o teorema de Pitágoras a qualquer um dos triângulos destacados:

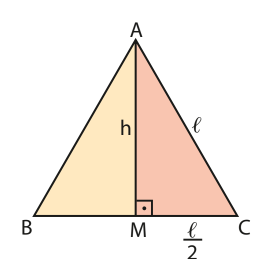
$$d^2 = \ell^2 + \ell^2 = 2\ell^2$$

$$d = \ell\sqrt{2}$$

Assim, por exemplo, se o lado de um quadrado mede 10 cm, sua diagonal medirá $10\sqrt{2}$ cm (aproximadamente 14,1 cm).

2ª) Altura do triângulo equilátero

Consideremos um triângulo equilátero ABC cujo lado mede ℓ. Vamos expressar a medida da altura **h** do triângulo em função de ℓ.



Basta aplicar o teorema de Pitágoras ao triângulo destacado:

$$h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \ell^2 \Rightarrow h^2 = \ell^2 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$$

$$h^2 = \ell^2 - \frac{\ell^2}{4} = \frac{3\ell^2}{4}$$

$$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

Assim, por exemplo, em um triângulo equilátero com lado de 6 cm, a altura relativa a qualquer um dos lados mede $\frac{6\sqrt{3}}{2}$ cm $= 3\sqrt{3}$ cm (aproximadamente 5,2 cm).

OBSERVAÇÃO

No triângulo equilátero, a altura relativa a um lado é também mediana e bissetriz.

UM POUCO DE **HISTÓRIA**

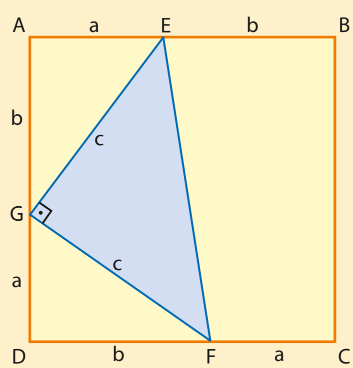
Pitágoras de Samos

Pitágoras nasceu na ilha grega de Samos, por volta de 565 a.C.

Sua obra, depois continuada pelos discípulos, foi de enorme importância para o desenvolvimento da Matemática. Várias foram as contribuições da escola pitagórica, responsável por avanços na área do raciocínio lógico-dedutivo. Pitágoras deu também grandes contribuições ao desenvolvimento da Aritmética.

O teorema que leva seu nome já teve centenas de demonstrações diferentes. Observe a demonstração a seguir.

Tomemos o quadrado ABCD abaixo representado, de lado a + b.



Podemos dividi-lo em dois trapézios congruentes pelo segmento $\overline{EF}$: o trapézio AEFD e o trapézio EBCF. A área **S** do trapézio AEFD pode ser calculada de duas maneiras:

Como metade da área do quadrado ABCD:

$$S = \frac{(a + b)(a + b)}{2}$$

Como a soma das áreas dos triângulos AEG, EGF e GFD:

$$S = \frac{ab}{2} + \frac{cc}{2} + \frac{ab}{2}$$

Então:

$$(a + b)(a + b) = ab + cc + ab$$

e daí resulta:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Essa demonstração se deve a James Abram Garfield (1831-1881), vigésimo presidente dos Estados Unidos.

HERITAGE IMAGES/DIOMEDIA/COLEÇÃO PARTICULAR

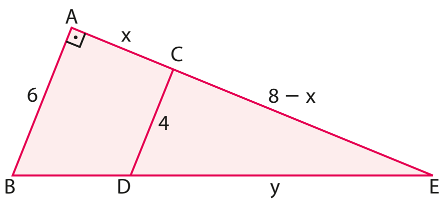
Pitágoras desenhando na areia o teorema que hoje leva o seu nome. Gravura de autor desconhecido, 1833.

Fonte de pesquisa: ROSA, Euclides. Mania de Pitágoras. *RPM/Estágio OBMEP*, 2007. p. 34-39. Disponível em: <www.obmep.org.br/docs/rpm_pic2007.pdf>. Acesso em: 7 mar. 2016.

EXERCÍCIOS

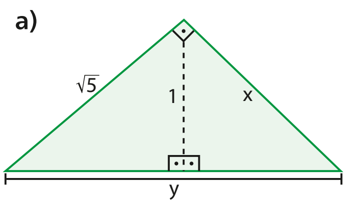
FAÇA NO CADERNO

27 Sabendo que $\overline{AB} // \overline{CD}$, determine **x** e **y**.

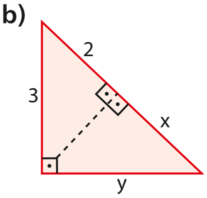


28 Determine **x** e **y** nas figuras:

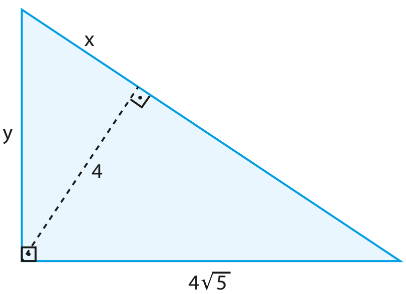
a)



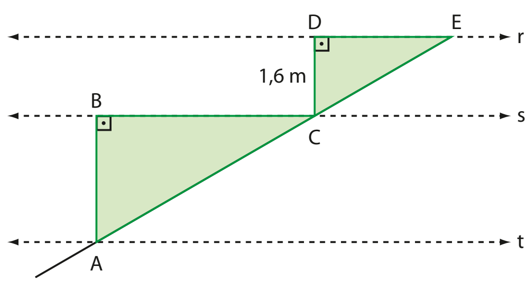
b)



c)

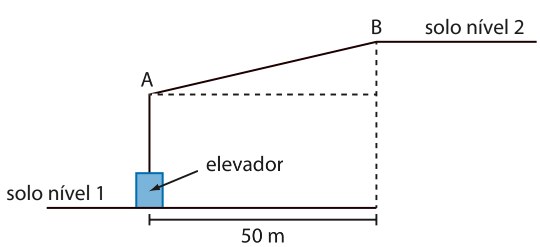


29 A parte final de uma escada está representada na figura seguinte:



Um imprevisto na fase de construção fez com que a extensão do penúltimo degrau fosse o dobro da extensão do último. Considerando as retas **r**, **s** e **t** paralelas e AE = 6 m, determine a extensão de cada um desses degraus.

30 Para vencer um desnível de 9 m entre dois pisos de um *shopping* foi construído um elevador e uma rampa suave para possibilitar o acesso de cadeirantes ou pessoas com mobilidade reduzida, como mostra a figura:

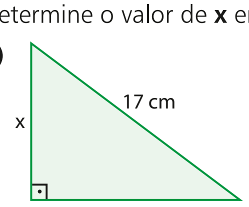


O elevador sobe verticalmente 5 m, chegando ao ponto **A**. De **A** inicia-se o percurso sobre a rampa de baixa inclinação até se chegar ao ponto **B**, no outro nível.

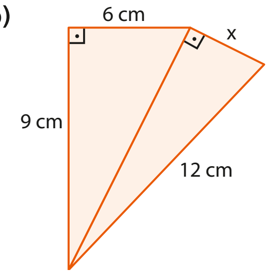
Use uma calculadora para determinar o comprimento aproximado da rampa (por excesso), com erro inferior a 0,01.

31 Determine o valor de **x** em cada caso:

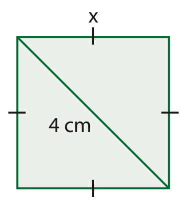
a)



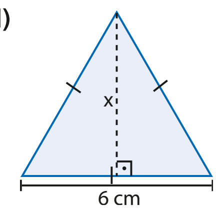
b)



c)



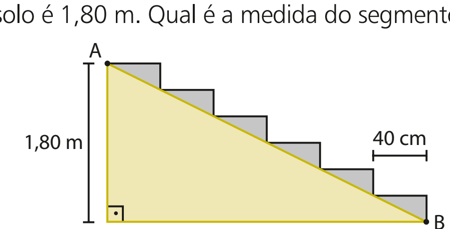
d)



32 Quanto medem os catetos e a altura relativa à hipotenusa de um triângulo, sabendo que essa altura determina, sobre a hipotenusa, segmentos de 3 cm e 5 cm?

33 Uma piscina com a forma de um paralelepípedo retângulo tem 40 m de comprimento, 20 m de largura e 2 m de profundidade. Que distância percorrerá alguém que nade na superfície, em linha reta, de um canto ao canto oposto dessa piscina? Use $\sqrt{5} \simeq 2{,}23$.

34 A figura mostra o perfil de uma escada, formada por seis degraus idênticos, cada um com 40 cm de largura. A distância do ponto mais alto da escada ao solo é 1,80 m. Qual é a medida do segmento $\overline{AB}$?



35 Saindo de um ponto **O**, um robô caminha, em linha reta e sucessivamente, 10 m na direção Sul, 3 m na direção Leste, 6 m na direção Norte e, de lá, retorna em linha reta ao ponto de partida. Quantos metros o robô percorreu ao todo?

36 Em certo trecho de um rio, as margens são paralelas. Ali, a distância entre dois povoados situados na mesma margem é de 3 000 m. Esses povoados distam igualmente de um farol, situado na outra margem do rio. Sabendo que a largura do rio é 2 km, determine a distância do farol a cada um dos povoados.

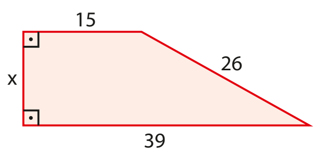
37 No portão retangular da casa de Horácio foi necessário colocar, diagonalmente, um reforço de madeira (ripa) com 3 m de comprimento. Sabendo que a altura do portão excede em 60 cm seu comprimento, determine as dimensões desse portão.

38 O perímetro de um quadrado é 36 cm. Qual é a medida da diagonal desse quadrado?

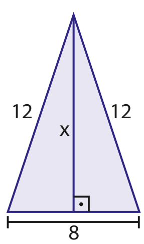
39 A altura de um triângulo equilátero mede $6\sqrt{3}$ m. Qual é o perímetro desse triângulo?

40 Calcule **x** em:

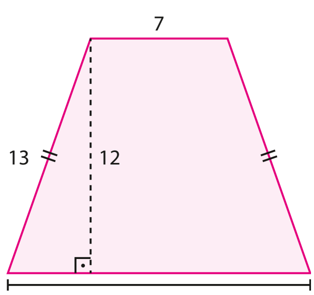
a)



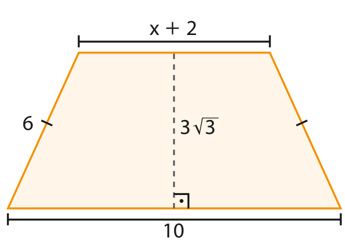
b)



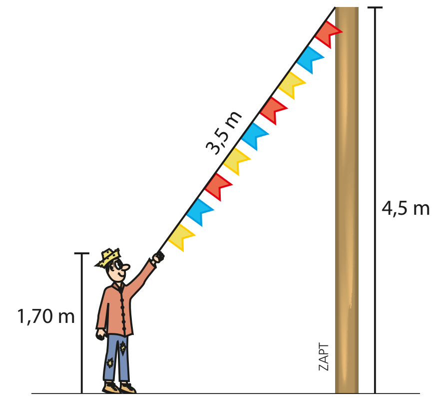
c)



d)



41 Para ajudar nas festas juninas de sua cidade, Paulo esticou completamente um fio de bandeirinhas, com 3,5 m de comprimento, até o topo de um poste com 4,5 m de altura. Sabendo que Paulo tem 1,70 m de altura, a que distância ele ficou do pé do poste?



42 Dois grupos de turistas partem simultaneamente da entrada do hotel em que estão hospedados. O primeiro grupo segue na direção leste, rumo a um monumento distante 800 m do ponto de partida. O segundo parte na direção norte, rumo a um museu situado a 1 000 m do ponto de partida.

RAFAEL NEDDERMEYER/FOTOARENA

Paraty, Rio de Janeiro, 2013.

a) Qual é, em linha reta, a distância, em metros, entre o monumento e o museu?

b) Supondo que os dois grupos caminham a uma velocidade constante de 2 km/h, qual é a distância, em metros, entre os dois grupos 15 minutos após a partida?

DESAFIO

Na figura, o quadrado DEFG está inscrito no triângulo ABC. Sendo BD = 8 cm e CE = 2 cm:

a) calcule o perímetro do quadrado.

b) determine a menor distância entre o ponto **A** e a reta $\overline{BC}$.