CAPÍTULO 12

Áreas de figuras planas

Introdução

Frequentemente recorremos a objetos do nosso cotidiano para compreender conceitos geométricos. A visualização e a medição desses objetos são estratégias para a descoberta e compreensão de propriedades geométricas.

Em situações tais como calcular a quantidade de pisos necessária na reforma de uma cozinha, o custo para envernizar a superfície de uma porta, ou, ainda, o custo envolvido na confecção de um quadro, as quantidades envolvidas dependem do cálculo de áreas de superfícies planas. As imagens desta página são exemplos de aplicações desses cálculos.


WILLIAM SAAR/ALAMY/FOTOARENA

Fotografias em exposição.


GETTY IMAGES/VSTOCK RF

Colocação de pisos.


SERGIO PEDREIRA/PULSAR IMAGENS

Fachada colorida, Pelourinho, Bahia, 2013.

Neste capítulo, vamos revisar um conteúdo estudado no Ensino Fundamental: o cálculo de **áreas de superfícies planas delimitadas**.

De modo geral, **área** é a medida da extensão de uma superfície, expressa em uma unidade padrão preestabelecida (correspondente à área de um quadrado de lado unitário, isto é, de um quadrado cujo lado mede 1).

Mas como são definidos os padrões de medida?

É o Sistema Internacional de Unidades (SI) que estabelece as unidades básicas de medidas e as unidades derivadas, as quais podem ser expressas a partir das unidades de base. Particularmente, estaremos nos referindo à unidade básica de comprimento – o metro – e às unidades dela derivadas, conforme mostrado ao lado.

Unidade (SI)

Grandeza	Nome	Símbolo
comprimento	metro	m
superfície	metro quadrado	m^2
volume	metro cúbico	m^3

O Sistema Métrico Decimal, criado durante a Revolução Francesa, e o depósito de dois padrões de platina nos Arquivos da República, em Paris, em 22 de junho de 1799, representando o metro e o quilograma, podem ser considerados como a primeira etapa que levou ao atual Sistema Internacional de Unidades. No Brasil, o sistema métrico decimal foi oficialmente introduzido em 1862.

Atualmente, usa-se a seguinte definição de metro, adotada pela Convenção Geral de Pesos e Medidas, em 1983:

> Metro é o comprimento do trajeto percorrido pela luz, no vácuo, durante um intervalo de tempo de $\dfrac{1}{299\,792\,458}$ de segundo.

Vamos agora estabelecer algumas relações entre certas unidades de medida:

$1 \text{ m} = 10 \text{ dm} \Rightarrow$

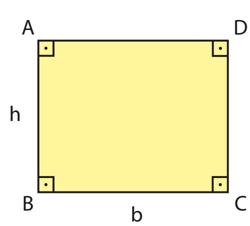
$$\Rightarrow \begin{cases} 1(\text{m}) \cdot 1(\text{m}) = (10 \text{ dm}) \cdot (10 \text{ dm}) \Rightarrow 1 \text{ m}^2 = 100 \text{ dm}^2 = 10^2 \text{ dm}^2 \\ 1(\text{m}) \cdot 1(\text{m}) \cdot 1(\text{m}) = (10 \text{ dm}) \cdot (10 \text{ dm}) \cdot (10 \text{ dm}) \Rightarrow 1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ dm}^3 = 10^3 \text{ dm}^3 \end{cases}$$

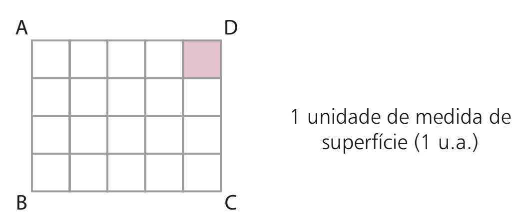
$1 \text{ m} = 100 \text{ cm} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1(\text{m}) \cdot 1(\text{m}) = (100 \text{ cm}) \cdot (100 \text{ cm}) \Rightarrow 1 \text{ m}^2 = 10000 \text{ cm}^2 = 10^4 \text{ cm}^2 \\ 1(\text{m}) \cdot 1(\text{m}) \cdot 1(\text{m}) = (100 \text{ cm}) \cdot (100 \text{ cm}) \cdot (100 \text{ cm}) \Rightarrow 1 \text{ m}^3 = 10^6 \text{ cm}^3 \end{cases}$$

Área do retângulo

A figura à esquerda representa o retângulo ABCD. Supondo que o lado $\overline{AB}$ mede 4 u.c. e o lado $\overline{BC}$ mede 5 u.c. – em que u.c. é a unidade de medida de comprimento –, podemos dividir o retângulo em 20 pequenos quadrados, cada um dos quais com 1 unidade de medida de superfície (ou, simplesmente, unidade de àrea; indica-se por u.a.), conforme figura à direita.





Assim, a área (**A**) do retângulo ABCD é: A = (5 u.c.) · (4 u.c.) = 20 u.a.

Se, num retângulo ABCD, chamamos:

- **A**: área da superfície limitada pelo retângulo ABCD ou, simplesmente, área do retângulo ABCD;
- **b**: medida da base $\overline{BC}$;
- **h**: medida da altura $\overline{AB}$;

temos:

$$A = b \cdot h$$

> A área de um retângulo é igual ao produto da medida da base pela medida da altura.

OBSERVAÇÃO

De modo geral e sem perda de generalidade, a expressão $A = b \cdot h$ também pode ser usada para calcular a área de retângulos nos quais as medidas dos lados são expressas por números reais positivos.

EXEMPLO 1

Vamos calcular a área de um retângulo cujas dimensões são: 13,4 cm e 0,25 m.

Como, para o cálculo da área, as dimensões devem estar em uma mesma unidade, então, lembrando que 1 m = 100 cm, temos:

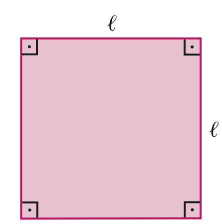
$$b = 13{,}4 \text{ cm e } h = 0{,}25 \cdot 100 \text{ cm} = 25 \text{ cm}$$

Assim, $A = b \cdot h \Rightarrow A = (13{,}4 \text{ cm}) \cdot (25 \text{ cm}) \Rightarrow A = 335 \text{ cm}^2$.

Ou, ainda, no caso de $b = 13{,}4 \cdot \dfrac{1}{100}$ m $= 0{,}134$ m e $h = 0{,}25$ m, temos:

$$A = (0{,}134 \text{ m}) \cdot (0{,}25 \text{ m}) \Rightarrow A = 0{,}0335 \text{ m}^2$$

Área do quadrado



Como todo quadrado é um retângulo cuja medida da base é igual à medida da altura, a fórmula da área do retângulo pode ser usada para obter-se a expressão da área de um quadrado.

Dessa forma, se ℓ é a medida do lado de um quadrado, então, se $b = \ell$ e $h = \ell$, temos:

$$A = b \cdot h \Rightarrow A = \ell \cdot \ell \Rightarrow \boxed{A = \ell^2}$$

A área de um quadrado é igual ao quadrado da medida de seu lado.

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

1 Um artesão pretende usar retalhos para fazer uma colcha de formato retangular com as seguintes dimensões: 2,40 m de comprimento por 1,80 m de largura. Se os retalhos forem recortados em pedaços quadrados, cada qual com 20 cm de lado, quantos pedaços serão necessários para compor tal colcha?

Solução:

- Determinemos a área $\mathbf{A_1}$ da superfície da colcha:
  $A_1 = b \cdot h = (2{,}40 \text{ m}) \cdot (1{,}80 \text{ m}) = 4{,}32 \text{ m}^2$
- Seja **n** o total de pedaços de retalho que deverão compor a colcha.
  Cada pedaço deverá ter a forma de um quadrado de 20 cm de lado, então a área $\mathbf{A_2}$ de sua superfície é dada por $A_2 = \ell^2 = (20 \text{ cm}) \cdot (20 \text{ cm}) = (0{,}2 \text{ m}) \cdot (0{,}2 \text{ m}) = 0{,}04 \text{ m}^2$.

Como as medidas de comprimento e largura da colcha são divisíveis pela medida do lado do retalho, a área da superfície dos **n** pedaços reunidos — que deverão revestir os 4,32 m² — será igual a $n \cdot A_2 = n \cdot 0{,}04 \text{ m}^2$.

Logo, como devemos ter $n \cdot A_2 = A_1$, então $n \cdot 0{,}04 = 4{,}32$, ou seja, $n = 108$ pedaços.

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

1 Determine a área de:

a) um retângulo cujas dimensões são 6,5 cm e 12 cm;

b) um quadrado cujo lado mede $5\sqrt{3}$ m;

c) um retângulo cuja base mede 16 dm e cuja diagonal mede 20 dm;

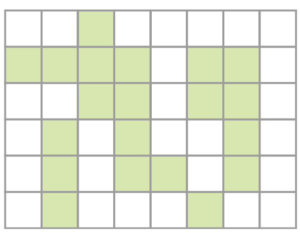
d) um quadrado que tem 24 m de perímetro;

e) um retângulo cuja diagonal forma um ângulo de 30° com o lado que tem 12 dm de comprimento;

f) um quadrado cuja diagonal mede $5\sqrt{2}$ mm.

2 Um mapa de certa região foi construído na escala 1 : 20 000, isto é, cada centímetro no mapa corresponde a 20 000 cm = 200 m de medida real. Determine, em metros quadrados, a área real de uma chácara que, nesse mapa, é representada por um quadrado cujo lado mede 0,3 cm.

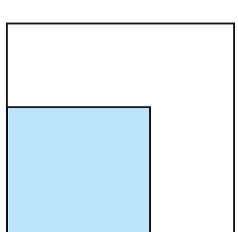
3 A figura apresenta uma malha quadriculada em que a medida do lado de cada quadradinho é 2,5 u.c. (unidades de medida de comprimento). Determine a área da região colorida.



4 Um jardim tem a forma de um retângulo cujas dimensões estão entre si na razão $\frac{3}{4}$. Se esse jardim tem 28 m de perímetro, determine sua área.

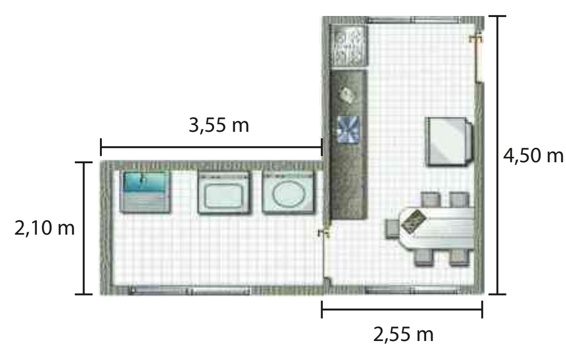
5 Um azulejo tem a forma de um quadrado cuja diagonal mede $15\sqrt{2}$ cm. Se as paredes de um salão de formato retangular, cujas dimensões são (54 m) × (4,5 m), deverão ser totalmente revestidas por tais azulejos, então, supondo que nenhum deles se quebre no ato da colocação, quantos azulejos serão usados?

6 Na figura, a região colorida representa uma piscina de formato quadrado, construída no quintal de uma casa. Pretende-se reduzir de 2 m as dimensões da superfície dessa piscina, de modo que ela passe a ocupar 36% da área do quintal. Se o quintal tem a forma de um quadrado cuja área é 225 m², determine quantos metros quadrados aumentará a superfície do quintal não ocupada pela piscina.

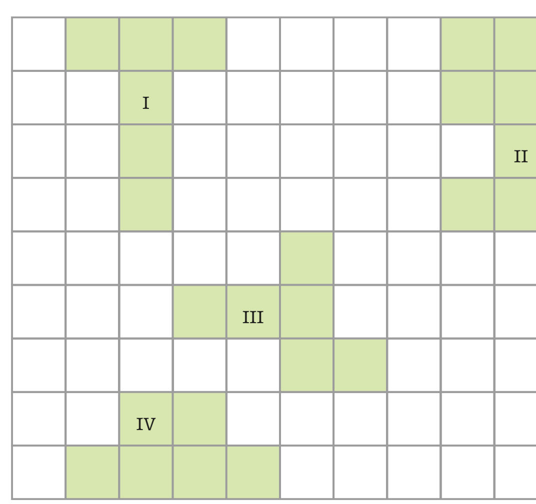


7 Sobre uma mesa plana de formato retangular, um arquiteto montou a maquete de um projeto de construção de um edifício. Sabendo que a superfície dessa mesa tem 52 dm de perímetro e área igual a 144 dm², determine suas dimensões.

8 A figura abaixo mostra a planta baixa da cozinha e da área de serviço de um apartamento. Considerando desprezível a espessura das paredes, determine a área total da superfície das dependências mostradas.



9 Na malha quadriculada apresentada abaixo, as regiões sombreadas – I, II, III e IV – representam as superfícies de quatro sítios planos onde, respectivamente, os irmãos – Artur, Lucas, Edson e Luiza – pretendem construir suas casas.



Sabendo que a área total da malha é 36 000 m², responda:

a) Quais sítios têm perímetros iguais?

b) Qual dos irmãos pretende construir no sítio que tem a superfície de maior área? Qual é a área dessa superfície?

10 Afrânio dispõe de um terreno plano e de formato retangular. Pretendendo vendê-lo, dividiu-o em 4 lotes retangulares cujas medidas das superfícies, em metros quadrados, são indicadas na figura seguinte:

750	300
600	X

Se o metro quadrado de cada lote for vendido por R$ 86,00, determine o preço de venda do lote cuja superfície tem X m² de área.

11 Para a apresentação de um espetáculo ao ar livre, foi destinada aos espectadores uma área retangular medindo 180 m de comprimento por 60 m de largura. Supondo que uma única pessoa ocupe uma área média de 2 500 cm², qual é o número máximo de pessoas que poderão assistir ao espetáculo na área reservada?

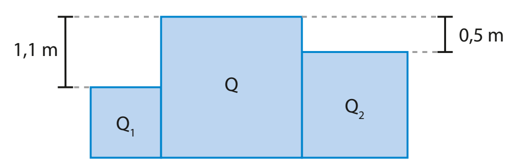
12 O piso retangular de uma sala, com 9,60 m de comprimento por 4,50 m de largura, deve ser revestido com ladrilhos quadrados. Admitindo-se que não haverá perda de material e que será utilizado o menor número de ladrilhos inteiros, pergunta-se:

a) Quantos ladrilhos deverão ser colocados?

b) Qual a área da superfície de cada ladrilho?

13 Paulo e Carlos possuem tabletes de chocolate de formas quadrada e retangular, respectivamente. O tablete de Paulo tem 12 cm de perímetro e o de Carlos tem a medida da base igual ao triplo da medida da altura e perímetro igual a 12 cm. Sabendo que os tabletes possuem a mesma espessura e que Paulo propôs a troca com Carlos, verifique se é vantagem para Carlos aceitar a troca.

14 Três mesas, cujos tampos têm a forma de um quadrado, foram justapostas lado a lado, conforme é mostrado na figura abaixo.



Sabendo que as áreas das superfícies dos tampos dessas mesas somam 7,06 m², determine a área de **Q** (superfície do tampo da maior mesa).

Área do paralelogramo

Determinemos a área do paralelogramo ABCD, representado na figura 1, em que **b** e **h** são as medidas da base e da altura, respectivamente.

Observe que, projetando-se os vértices **A** e **D** sobre a reta $\overleftrightarrow{BC}$, obtêm-se os pontos **P** e **Q**, respectivamente, ficando assim determinado o retângulo APQD, como é mostrado na figura 2.

Note que os triângulos APB e DQC são congruentes e, portanto, têm áreas iguais.

Assim, a área do paralelogramo ABCD é igual à área do retângulo APQD, ou seja:

$$A = b \cdot h$$

A área de um paralelogramo é igual ao produto da medida da base pela medida da altura.

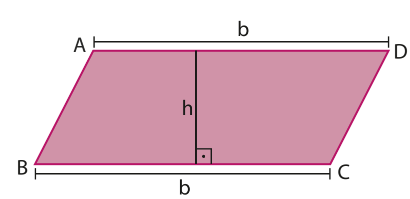


figura 1

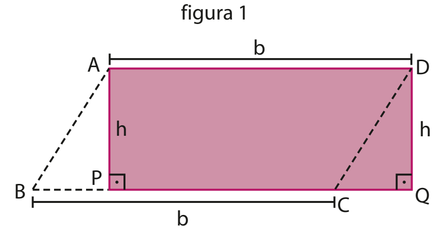


figura 2

PENSE NISTO:

Se **Q** é o conjunto de todos os quadrados, **P** é o conjunto de todos os paralelogramos e **R** é o conjunto de todos os retângulos, é correto afirmar que Q ⊂ R ⊂ P?

EXEMPLO 2

Vamos determinar a área do paralelogramo ABCD, representado na figura, considerando que a unidade das medidas seja o centímetro.

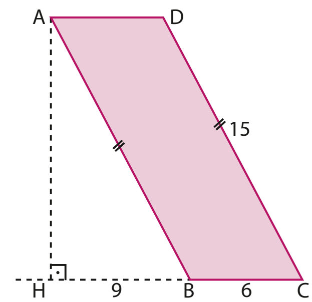
Note que a altura do paralelogramo é a perpendicular $\overline{AH}$ à reta suporte do lado $\overline{BC}$, traçada pelo vértice **A**.

Como o triângulo AHB é retângulo, então, pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$AH^2 + HB^2 = AB^2 \Rightarrow AH^2 = 15^2 - 9^2 = 144 \Rightarrow AH = 12 \text{ cm}$$

Logo, a área de ABCD é:

$$A = BC \cdot AH = (6 \text{ cm}) \cdot (12 \text{ cm}) = 72 \text{ cm}^2$$

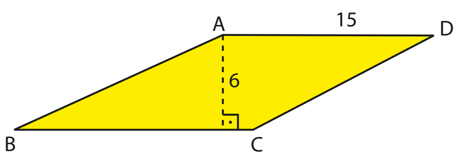


EXERCÍCIOS

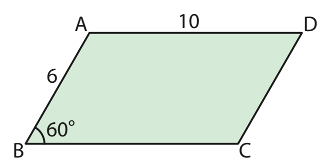
FAÇA NO CADERNO

15 Em cada caso, determine a área do paralelogramo ABCD, considerando que a unidade das medidas indicadas é o centímetro.

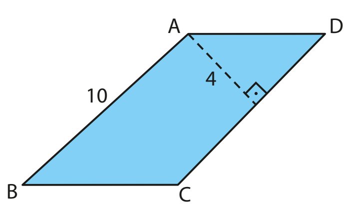
a)



c)

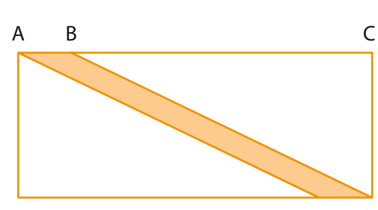


b)



16 A superfície plana de um jardim, no formato de um paralelogramo cujos lados medem 8 m e 12 m e formam entre si um ângulo de 60°, deve ser coberta de grama. Qual é a área desse jardim?

17 A figura abaixo apresenta o esquema de um projeto para a construção de um jardim, em um terreno plano de formato retangular (ACDF), cuja superfície tem 504 m².

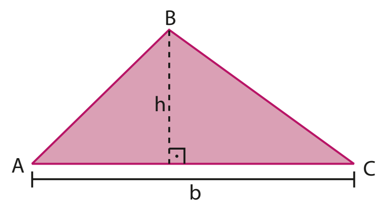


Nesse esquema, a região destacada (ABDE) é um paralelogramo que representa uma passagem para pedestres que dividirá o jardim em dois canteiros triangulares (AFE e DCB).

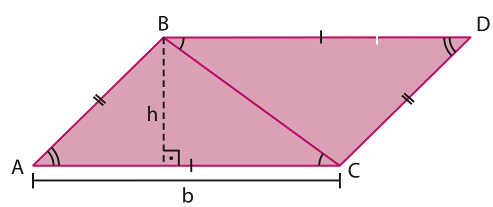
Se $AE = 30$ m e $AF = \frac{3}{4} \cdot FE$, qual será a área da passagem para pedestres?

Área do triângulo

Seja o triângulo ABC, cuja base $\overline{AC}$ mede **b** e a altura relativa a essa base mede **h**, representado na figura abaixo.



Note que as respectivas retas paralelas aos lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, traçadas pelos vértices **B** e **C**, intersectam-se no ponto **D**, determinando assim o paralelogramo ABCD, cujas medidas da base e da altura são **b** e **h**, conforme mostrado na figura abaixo.



Como AB = DC, med($B\hat{A}C$) = med($B\hat{D}C$) e AC = DB, os triângulos ABC e DCB são congruentes e, portanto, suas áreas são iguais.

Logo, a área do triângulo ABC é igual à metade da área do paralelogramo ABCD, ou seja:

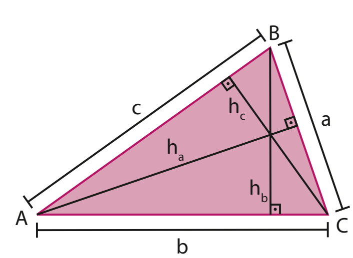
$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

A área de um triângulo é igual à metade do produto da medida da base pela medida da altura.

OBSERVAÇÃO

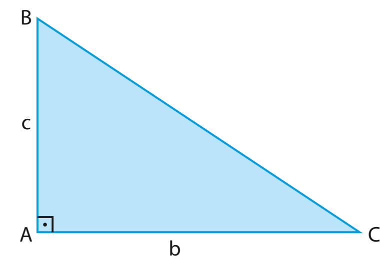
De modo geral, se $\mathbf{h_a}$, $\mathbf{h_b}$ e $\mathbf{h_c}$ são as respectivas medidas das alturas relativas aos lados de medidas **a**, **b** e **c**, temos:

$$A = \frac{a \cdot h_a}{2} \quad \text{ou} \quad A = \frac{b \cdot h_b}{2} \quad \text{ou} \quad A = \frac{c \cdot h_c}{2}$$



Casos particulares

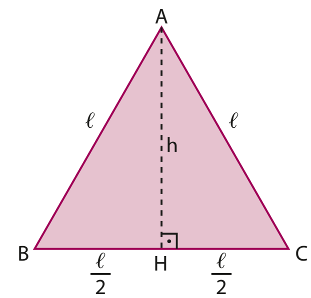
Área do triângulo retângulo



Observe na figura que, no triângulo ABC, o cateto $\overline{AB}$ é a altura relativa ao cateto $\overline{AC}$. Assim, se AB = c e AC = b, a área **A** do triângulo é dada por:

$$A = \frac{b \cdot c}{2}$$

Área do triângulo equilátero



Se $\boldsymbol{\ell}$ é a medida do lado do triângulo equilátero ABC, representado na figura, temos:

$\overline{AH}$ é altura e mediana relativas ao lado $\overline{BC} \Rightarrow$

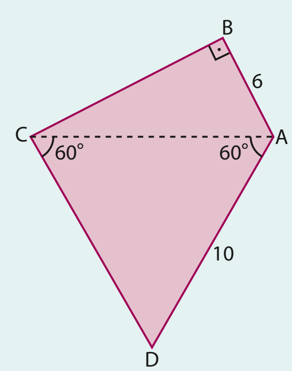
$$\Rightarrow \begin{cases} \overline{AH} \perp \overline{BC} \\ \textbf{H} \text{ é o ponto médio de } \overline{BC} \Rightarrow HC = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{\ell}{2} \end{cases}$$

Aplicando-se o teorema de Pitágoras no $\triangle AHC$, temos:

$$\ell^2 = h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = \ell^2 - \frac{\ell^2}{4} = \frac{3\ell^2}{4} \Rightarrow h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

Logo, $A = \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{1}{2} \cdot \ell \cdot \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$ $\boxed{A = \dfrac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4}}$

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**



2 Determine a área do quadrilátero ABCD representado na figura, sabendo que: AB = 6 cm; AD = 10 cm; a diagonal $\overline{AC}$ determina com os lados $\overline{AD}$ e $\overline{CD}$ ângulos de 60°; e o lado $\overline{BC}$ é perpendicular ao lado $\overline{AB}$.

Solução:

A área **A** do quadrilátero ABCD é tal que $A = A_1 + A_2$, em que $\mathbf{A_1}$ e $\mathbf{A_2}$ são as áreas dos triângulos ACD e ABC, respectivamente.

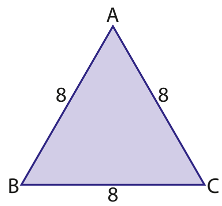
- Cálculo de $\mathbf{A_1}$:
  Como med($A\hat{C}D$) = med($D\hat{A}C$) = 60°, então med($A\hat{D}C$) = 60°, ou seja, o $\triangle ACD$ é equilátero e sua área é dada por:
  $$A_1 = \frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_1 = \frac{10^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_1 = 25\sqrt{3}$$
  Logo, a área do triângulo ACD é $25\sqrt{3}$ cm².
- Cálculo de $\mathbf{A_2}$:
  Como o $\triangle ABC$ é retângulo em **B**, então, pelo teorema de Pitágoras, temos:
  $$AC^2 = BC^2 + AB^2 \Rightarrow 10^2 = BC^2 + 6^2 \Rightarrow BC = 8$$
  Assim, $A_2 = \dfrac{1}{2}(BC) \cdot (AB) \Rightarrow A_2 = \dfrac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 \Rightarrow A_2 = 24$
  Então, a área do triângulo ABC é 24 cm².
  Logo, a área do quadrilátero ABCD é $A = A_1 + A_2 = \left(25\sqrt{3} + 24\right)$ cm².

EXERCÍCIOS

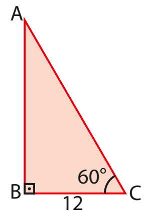
FAÇA NO CADERNO

18 Determine a área de cada um dos triângulos representados nas figuras seguintes, nas quais a unidade das medidas indicadas é o metro.

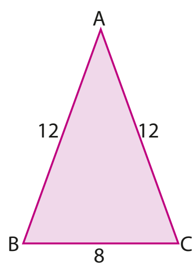
a)



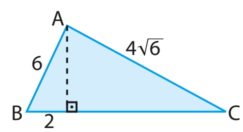
d)



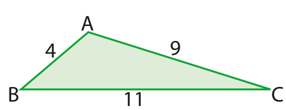
b)



e)



c)



19 Calcule a área do triângulo em cada um dos seguintes casos:

a) A medida de um lado é 12 cm, e a altura relativa a esse lado mede 8 cm.

b) As medidas dos lados são 8 m, 10 m e 14 m.

c) O triângulo é equilátero, e os lados medem 6 dm.

d) O triângulo é isósceles, os lados congruentes medem 12 m, e o outro lado mede 6 m.

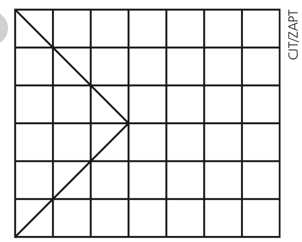
e) O triângulo é retângulo, e os catetos medem 3,6 cm e 4,8 cm.

f) O triângulo é retângulo, com um dos catetos e a hipotenusa medindo 12 dm e 18 dm, respectivamente.

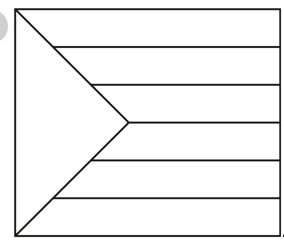
g) Dois lados, que medem 14 m e 18 m, determinam entre si um ângulo que mede 30°.

20 Sabe-se que para desenhar uma bandeira, inicialmente, Valentina dividiu uma folha de papel em quadradinhos congruentes e, depois, para poder pintá-la, apagou parte do quadriculado para que ela ficasse da forma como é mostrado na segunda figura.

1

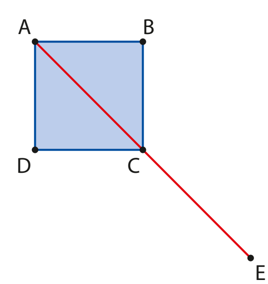


2



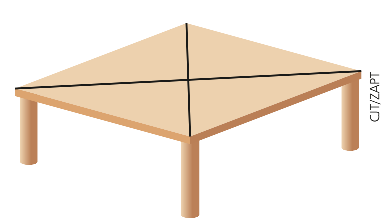
Se as dimensões da folha eram (0,24 m) × (0,28 m), determine a área da superfície triangular da bandeira, em centímetros quadrados.

21 Sobre a figura ao lado sabe-se que ABCD é um quadrado, AB = 6 cm e **C** é ponto médio do segmento $\overline{AE}$.



Determine a área do triângulo BCE, em centímetros quadrados.

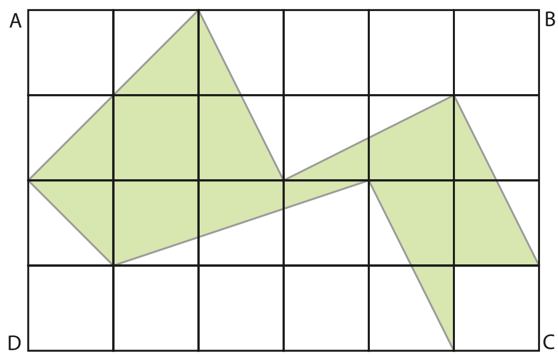
22 A superfície do tampo da mesa mostrada na figura é um quadrado, composto de quatro triângulos isósceles congruentes cujos lados congruentes medem $\frac{3\sqrt{2}}{5}$ m.



Determine a área da superfície do tampo dessa mesa.

23 Determine a área de um triângulo retângulo tal que a soma das medidas dos catetos é igual a 28 cm e a soma dos quadrados das medidas dos três lados é igual a 800 cm².

24 Na figura abaixo, o retângulo ABCD foi dividido em quadrados de 2 cm de lado.

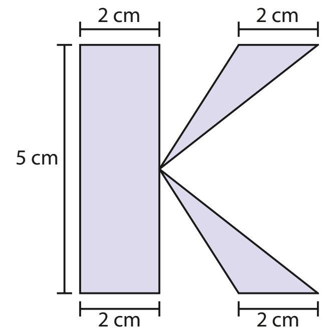


Qual é a área da região sombreada, em centímetros quadrados?

25 Em um terreno, com a forma de um triângulo retângulo cujos catetos medem 32 m e 27 m, pretende-se construir um edifício de base retangular, de lados paralelos aos catetos. Quais devem ser as dimensões da base desse edifício de modo a haver maior aproveitamento do terreno?

26 Um triângulo equilátero ABC tem 8 cm de lado. Se a medida de cada lado desse triângulo for acrescida de seus 25%, que porcentagem de acréscimo sofrerá a área de ABC?

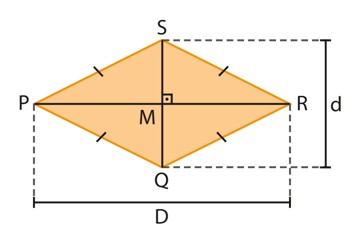
27 Kátia levou 20 peças de seu enxoval a uma costureira, para que ela confeccionasse e aplicasse, em cada peça, o monograma mostrado na figura abaixo.



CIT/ZAPT

Considerando que para fazer esse monograma a costureira cobra pelo tecido usado, ao custo de R$ 120,00 o metro quadrado, e pela sua mão de obra, R$ 7,50 por monograma confeccionado e aplicado, determine a quantia que Kátia deverá desembolsar pelo serviço contratado.

Área do losango



Considerando que o losango é um paralelogramo cujas medidas dos lados são iguais e as diagonais são perpendiculares entre si, observe na figura que ele pode ser decomposto em quatro triângulos retângulos congruentes e sua área é a soma das áreas desses triângulos.

Assim sendo, no losango PQRS, se **D** é a medida da diagonal maior e **d** é a medida da diagonal menor, a área **A** de sua superfície é tal que:

$$A = 4 \cdot A_{QMR} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{D}{2} \cdot \frac{d}{2} \Rightarrow \boxed{A = \frac{D \cdot d}{2}}$$

A área de um losango é igual à metade do produto das medidas das diagonais.

EXEMPLO 3

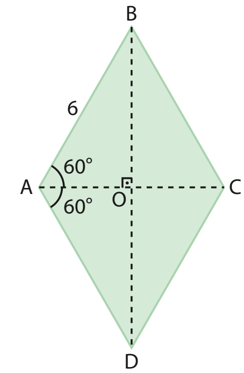
Vamos determinar a área do losango cujo lado mede 6 dm e um dos ângulos internos mede 120°.

Se **d** e **D** são as respectivas medidas das diagonais menor e maior do losango representado na figura da página seguinte, temos:

$$AO = \frac{d}{2} \text{ e } BO = \frac{D}{2}\text{, ou seja, } d = 2 \cdot AO \text{ e } D = 2 \cdot BO$$

Como o triângulo AOB é retângulo em **O**, temos:

$$\begin{cases} \cos 60^\circ = \dfrac{AO}{AB} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{AO}{6} \Rightarrow AO = 3 \\ \operatorname{sen} 60^\circ = \dfrac{BO}{AB} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{BO}{6} \Rightarrow BO = 3\sqrt{3} \end{cases}$$



Assim:

$d = 2 \cdot AO = 2 \cdot 3 = 6$ e $D = 2 \cdot BO = 2 \cdot 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

A diagonal menor mede 6 dm e a diagonal maior mede $6\sqrt{3}$ dm.

Logo, a área do losango ABCD é: $A = \dfrac{D \cdot d}{2} = \dfrac{(6\sqrt{3}\text{ dm}) \cdot (6\text{ dm})}{2} \Rightarrow A = 18\sqrt{3}\text{ dm}^2$

OBSERVAÇÃO

Acompanhe outra opção de resolução do exemplo 3:
Observe na figura que o $\triangle ABC$ é um triângulo equilátero de lado 6 dm. Assim, temos:

$$A_{ABC} = \frac{AC^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_{ABC} = \frac{(6\text{ dm})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_{ABC} = 9\sqrt{3}\text{ dm}^2$$

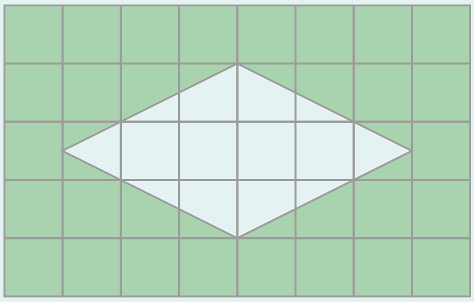
Como a área do losango é $A = 2 \cdot A_{ABC}$, então $A = 18\sqrt{3}\text{ dm}^2$.

PENSE NISTO:

Existem losangos que são retângulos?

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

3 Francineide usou uma folha de papel quadriculado para desenhar a bandeira do Brasil. Desconhecendo as reais dimensões da bandeira brasileira, ela iniciou o seu desenho construindo o losango central para, então, pintar de verde a sua parte externa, como é mostrado na figura abaixo.



CIT/ZAPT

PENSE NISTO:

Você conhece as normas para a confecção da Bandeira Nacional? Pesquise sobre os critérios relacionados a dimensão, cores e posicionamento das figuras geométricas, das letras e das estrelas.

Se as dimensões da folha são 10 cm × 16 cm, determine:

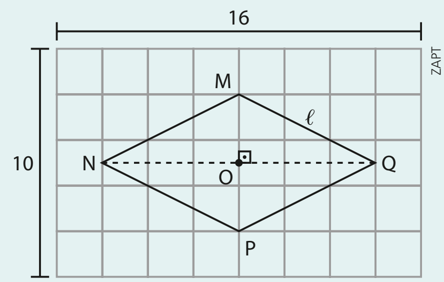
a) a medida do lado do losango;

b) a área da região pintada de verde.

Solução:

a) Como as dimensões da folha são 10 cm × 16 cm, então a medida do lado de cada um dos 40 quadradinhos é 2 cm. Assim, D = 12 cm e d = 6 cm são as respectivas medidas da diagonal maior e menor do losango.

Considerando o triângulo retângulo MOQ, se ℓ é a medida do lado do losango, temos:



$$\ell^2 = \left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \left(\frac{12}{2}\right)^2 + \left(\frac{6}{2}\right)^2 = 36 + 9 = 45 \Rightarrow \ell = 3\sqrt{5}$$

Logo, o lado do losango mede $3\sqrt{5}$ cm.

b) Se **A** é a área da região pintada de verde, $\mathbf{A_1}$, a área da folha de papel, e $\mathbf{A_2}$, a área do losango, temos:

$A_1 = (10 \text{ cm}) \cdot (16 \text{ cm}) = 160 \text{ cm}^2$

$A_2 = \dfrac{D \cdot d}{2} = \dfrac{(12 \text{ cm}) \cdot (6 \text{ cm})}{2} = 36 \text{ cm}^2$

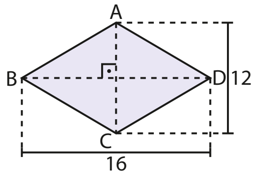
Como $A = A_1 - A_2$, então $A = (160 - 36) \text{ cm}^2 = 124 \text{ cm}^2$.

EXERCÍCIOS

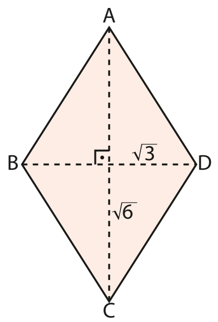
FAÇA NO CADERNO

28 Em cada caso, determine a área do losango ABCD, considerando que a unidade das medidas indicadas é o decímetro.

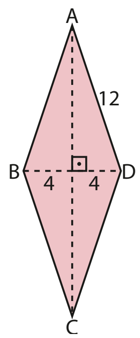
a)



b)



c)



29 Determine a área do losango sob as seguintes condições:

a) A medida do lado é 8 cm, e uma das diagonais mede 12 cm.

b) O perímetro é 40 dm e a diagonal maior mede 16 dm.

c) O perímetro é 60 cm, e dois lados formam entre si um ângulo de 120°.

d) As diagonais estão entre si na razão $\frac{3}{4}$, e o perímetro é 50 m.

30 Em um mapa, feito em uma escala de 1 : 9 000 000, certo município aparece representado por um losango cujo lado mede 1,25 cm. Sabendo que as medidas das diagonais estão entre si assim como 3 está para 4, determine a área real desse município, em quilômetros quadrados.

Área do trapézio

Considere o trapézio MNPQ da figura 1, no qual as bases $\overline{MQ}$ e $\overline{NP}$ medem **b** e **B**, respectivamente.

Observe, na figura 2, que esse trapézio pode ser decomposto em dois triângulos $\mathbf{T_1}$ e $\mathbf{T_2}$, de mesma altura e tais que a soma de suas áreas é igual à área **A** do trapézio MNPQ.

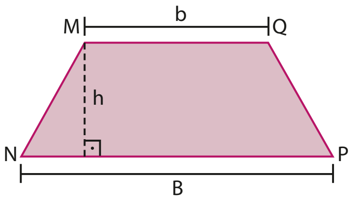


figura 1

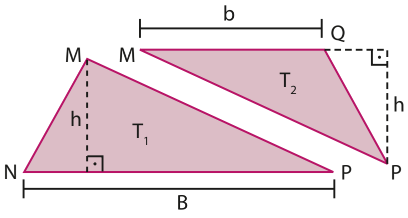


figura 2

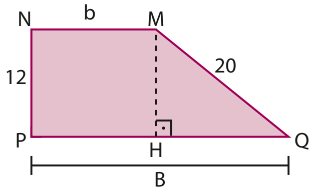
Assim, temos: $A = \dfrac{B \cdot h}{2} + \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{Bh + bh}{2}$, ou seja:

$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

A área de um trapézio é igual à metade do produto da soma das medidas das bases pela medida da altura.

EXEMPLO 4

Vamos determinar a área de um trapézio retângulo que tem 68 cm de perímetro e cujos lados não paralelos medem 12 cm e 20 cm.



Seja o trapézio MNPQ, no qual **b** é a medida da base menor e MH = NP = 12 cm a medida da altura, conforme é mostrado na figura. Temos:

$$\triangle MHQ \text{ é retângulo} \Rightarrow QH^2 = MQ^2 - MH^2 \Rightarrow QH^2 = 20^2 - 12^2 = 256 \Rightarrow QH = 16$$

Assim, a medida **B** da base maior é tal que B = 16 + b. (1)

Como o perímetro é 68 cm, temos:

$$MN + NP + PQ + QM = 68 \Rightarrow b + 12 + (16 + b) + 20 = 68 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = 10 \text{ e, de (1), } B = 26$$

Considerando que a área do trapézio é dada por $A = \dfrac{(B + b) \cdot h}{2}$, então:

$$A = \frac{(26 + 10) \cdot 12}{2} \Rightarrow A = 216$$

Logo, a área do trapézio MNPQ é 216 cm^2.

UM POUCO DE **HISTÓRIA**

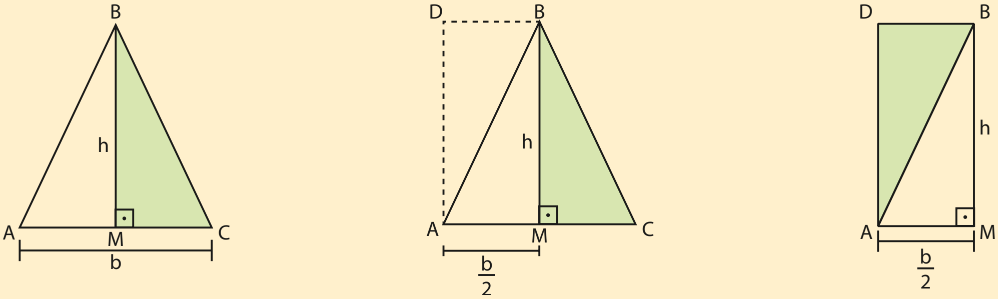
Como obter a área de um triângulo isósceles a partir de um retângulo?

Henry Rhind. Detalhe da pintura de Alexander S. Mackay, 1874.

Um dos mais antigos documentos com registros sobre o estudo da Matemática é um rolo de papiro de origem egípcia, com cerca de 0,30 m de altura por 5 m de comprimento, que atualmente encontra-se no British Museum, em Londres. Em 1858, esse papiro foi comprado por um antiquário escocês chamado Henry Rhind e, por isso, é conhecido como Papiro de Rhind ou, menos frequentemente, como Papiro de Ahmes, em homenagem ao escriba que o copiou, por volta de 1650 a.C.

Entre os problemas de Geometria que lá se encontram, há um, o de número 51, que consiste em se obter a expressão da área de um triângulo isósceles a partir da área de um retângulo.

Ahmes descreve esse método sugerindo que todo triângulo isósceles pode ser dividido em dois triângulos retângulos congruentes, um dos quais pode ser deslocado para, junto com o outro, compor um retângulo, como mostram as figuras abaixo:



Assim, temos:

- $\triangle ABC$ isósceles e h = medida da altura relativa ao lado $\overline{AC} \Rightarrow$ **M** é ponto médio de $\overline{AC} \Rightarrow$ $\Rightarrow AM = \frac{b}{2}$;
- AMB e CMB são triângulos retângulos congruentes;
- AMBD é um retângulo cujas dimensões são:

$$AM = \frac{b}{2} \text{ e } BM = h$$

Logo: $A_{AMBD} = \frac{b}{2} \cdot h = \frac{b \cdot h}{2} = A_{ABC}$

PENSE NISTO:

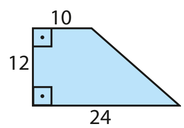
Inspirando-se na solução apresentada para o problema 51, como você resolveria o problema 52, do Papiro de Rhind, em que a expressão da área de um trapézio isósceles é obtida a partir da área de um retângulo?

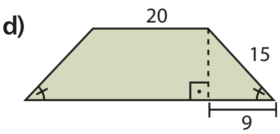
Fonte de pesquisa: BOYER, Carl B. *História da Matemática*. 3ª ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2010.

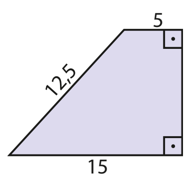
EXERCÍCIOS

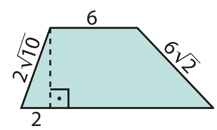
FAÇA NO CADERNO

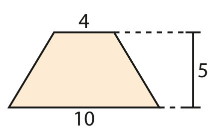
31 Determine a área de cada um dos trapézios seguintes, nos quais a unidade das medidas de comprimento indicada é o metro.

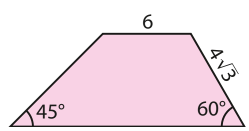
a)


d)


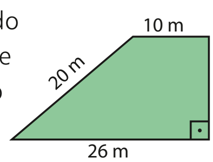
b)


e)


c)


f)


32 Sabe-se que os lotes de um condomínio fechado são vendidos ao preço de R$ 350,00 o metro quadrado. Nessas condições, por quanto deverá ser vendido o lote representado na figura ao lado, sabendo que tem a forma de um trapézio retângulo com as dimensões indicadas?



33 Para a realização de um espetáculo ao ar livre, foi montado um palco cuja superfície tem a forma de um trapézio isósceles de 78 m de perímetro, com bases que medem 15 m e 33 m. Qual é a área da superfície desse palco?

VISIONS OF AMERICA, LLC/ALAMY/FOTOARENA

34 Considere um trapézio cuja altura mede 4 dm e no qual a medida da base maior excede a medida da base menor em 3 dm. Se a área desse trapézio é igual a 24 dm^2, determine as medidas de suas bases.

35 O jardim da casa de Teobaldo tem a forma de um trapézio isósceles em que a base menor mede 12 m, um dos ângulos internos mede 120° e a medida da altura é 6 m. Nessas condições, determine o perímetro e a área de tal jardim.

Área de um polígono regular

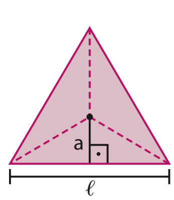
Considerando um polígono regular de **n** lados, vamos indicar por:

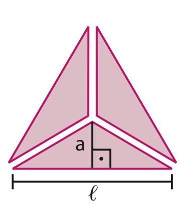
- **ℓ**: medida do lado;
- **a**: medida do apótema (segmento perpendicular a um lado do polígono cujas extremidades são o centro do polígono e o ponto médio desse lado);
- 2p: perímetro.

Assim, por exemplo:

- n = 3 ⇒ o polígono é um **triângulo equilátero**.

Esse polígono é constituído de três triângulos congruentes, nos quais a altura mede **a**.

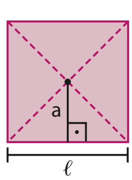


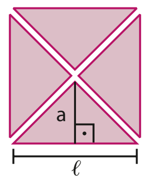


Temos: $\begin{cases} A = 3 \cdot \dfrac{\ell \cdot a}{2} \\ 2p = 3\ell \end{cases}$

Logo, $A = (3\ell) \cdot \dfrac{a}{2} = (2p) \cdot \dfrac{a}{2} \Rightarrow A = p \cdot a$

• $n = 4 \Rightarrow$ o polígono é um **quadrado**.
Esse polígono é constituído de quatro triângulos congruentes, nos quais a altura mede **a**.

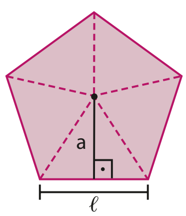


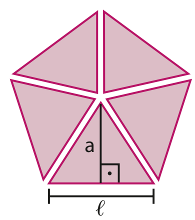


Temos: $\begin{cases} A = 4 \cdot \dfrac{\ell \cdot a}{2} \\ 2p = 4\ell \end{cases}$

Logo, $A = (4\ell) \cdot \dfrac{a}{2} = (2p) \cdot \dfrac{a}{2} \Rightarrow A = p \cdot a$

• $n = 5 \Rightarrow$ o polígono é um **pentágono regular**.
Esse polígono é constituído de cinco triângulos congruentes, nos quais a altura mede **a**.

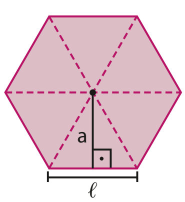


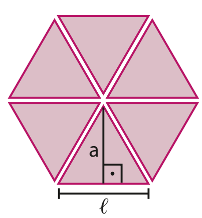


Temos: $\begin{cases} A = 5 \cdot \dfrac{\ell \cdot a}{2} \\ 2p = 5\ell \end{cases}$

Logo, $A = (5\ell) \cdot \dfrac{a}{2} = (2p) \cdot \dfrac{a}{2} \Rightarrow A = p \cdot a$

• $n = 6 \Rightarrow$ o polígono é um **hexágono regular**.
Esse polígono é constituído de seis triângulos congruentes, nos quais a altura mede **a**.





Temos: $\begin{cases} A = 6 \cdot \dfrac{\ell \cdot a}{2} \\ 2p = 6\ell \end{cases}$

Logo, $A = (6\ell) \cdot \dfrac{a}{2} = (2p) \cdot \dfrac{a}{2} \Rightarrow A = p \cdot a$

Note que a área do hexágono regular é igual à soma das áreas de 6 triângulos equiláteros congruentes. Assim, podemos expressá-la também em função da medida do lado do hexágono, ou seja:

$$A = 6 \cdot \frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

De modo geral, como um polígono regular de **n** lados é constituído de **n** triângulos congruentes, nos quais a altura mede **a**:

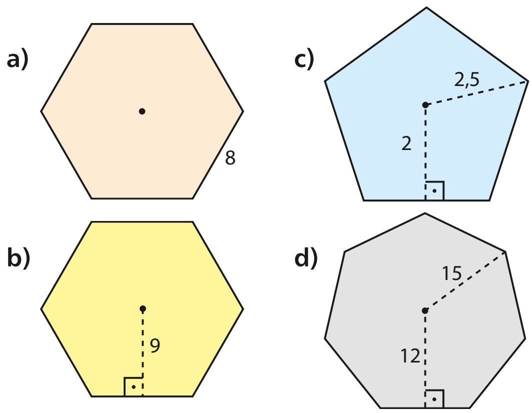
$$\begin{cases} A = n \cdot \dfrac{\ell \cdot a}{2} \\ 2p = n \cdot \ell \end{cases} \Rightarrow A = (n\ell) \cdot \frac{a}{2} = (2p) \cdot \frac{a}{2} \Rightarrow \boxed{A = p \cdot a}$$

A área de um polígono regular é igual ao produto do semiperímetro pela medida do apótema.

EXERCÍCIOS

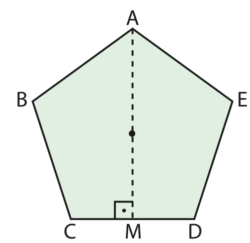
FAÇA NO CADERNO

36 Determine a área dos polígonos regulares seguintes, nos quais a unidade das medidas indicadas é o centímetro.

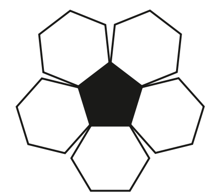


37 O tampo de uma mesa tem a forma de um hexágono regular cujo lado mede 0,8 m. Determine a área da superfície desse tampo.

38 Na figura, ABCDE é um pentágono regular em que AM = 6 cm e AB = 4 cm. Determine a área desse pentágono.



39 Suponha que uma superfície seja formada de pentágonos regulares e hexágonos regulares. Considerando que o apótema de cada um dos hexágonos mede 3 cm, determine:



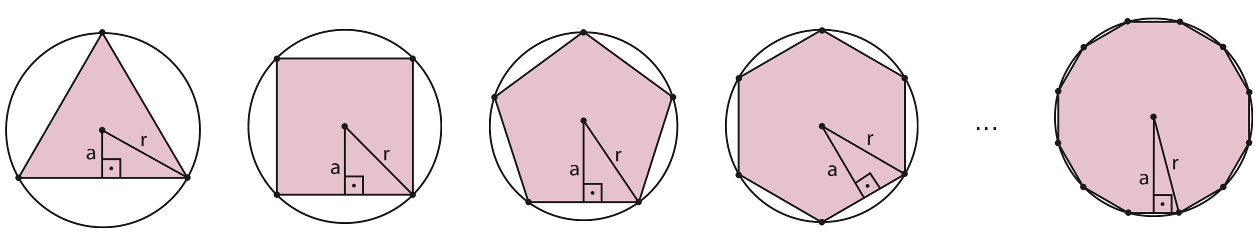
a) a área de cada hexágono;

b) o perímetro de cada pentágono.

Área do círculo e suas partes

Área do círculo

Considere a seguinte sucessão de polígonos regulares inscritos em círculos de raio de medida **r**.



Observe nessa sucessão que, se o número de lados do polígono aumenta, o comprimento do apótema também aumenta, ao passo que o comprimento do lado diminui. Dessa forma, quanto maior for o número de lados de um polígono, mais:

- o seu perímetro (2p) se aproxima da medida do comprimento da circunferência do círculo ($2\pi r$);
- a medida do seu apótema (**a**) se aproxima da medida do raio do círculo (**r**).

Quando o número de lados de um polígono é arbitrariamente grande:

$$\begin{cases} 2p = 2\pi r \Rightarrow p = \pi r \\ a = r \end{cases}$$

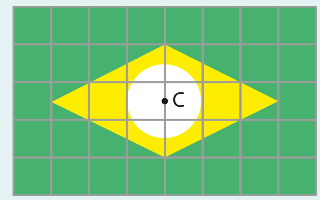
Como a área de um polígono regular é dada por $A = p \cdot a$, então, nesse caso, temos: $A = (\pi r) \cdot r = \pi r^2$, que é a expressão da área do círculo de raio de medida **r**. Assim: $\boxed{A = \pi r^2}$.

A área de um círculo é igual ao produto do número real π pelo quadrado da medida do seu raio.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

4 Considere que Francineide, a garota citada no exercício resolvido 3, continuou aqui o desenho da bandeira do Brasil. Agora ela desenhou o círculo central da bandeira, tangente a dois segmentos na vertical do quadriculado, cujo centro **C** é o centro do retângulo, conforme é mostrado na figura.

Determine a área da superfície da bandeira pintada de amarelo por Francineide, lembrando que as dimensões da folha são 10 cm × 16 cm.



CIT/ZAPT

Solução:

A área (**A**) da superfície pintada de amarelo é igual à diferença entre a área do losango $\left(\mathbf{A}_L\right)$ e a área do círculo $\left(\mathbf{A}_C\right)$.

O cálculo de $\mathbf{A}_L$ encontra-se no exercício resolvido 3, ou seja, $A_L = 36$ cm².

A medida do raio do círculo é igual à medida do lado de um quadradinho, ou seja, r = 2 cm. Assim, a área do círculo, em cm², é:

$$A_C = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 2^2 = 4\pi$$

Logo:

$$A = A_L - A_C \Rightarrow A = 36 - 4\pi \Rightarrow A = 4(9 - \pi)$$

Portanto, a área da superfície da bandeira pintada de amarelo é $4(9 - \pi)$ cm².

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

40 Determine a área do círculo, sob as seguintes condições:

a) A medida do raio é 11 dm.

b) A medida do diâmetro é 24 m.

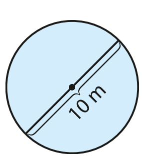
c) O círculo tem 32π cm de perímetro.

41 Qual é a área do círculo inscrito em um quadrado cujo lado mede 12 dm?

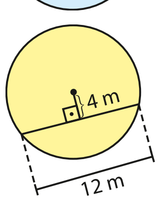
42 Determine a área do círculo cujo perímetro é igual ao perímetro do retângulo cujos lados medem 6π cm e 4π cm.

43 Calcule a área de cada círculo representado nas figuras seguintes:

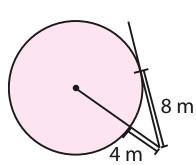
a)



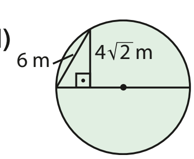
b)



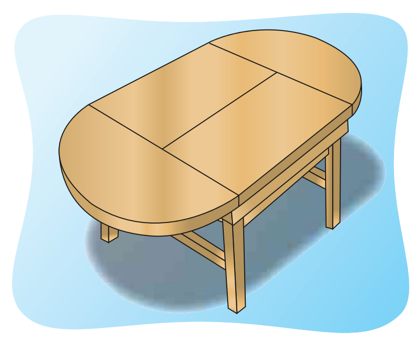
c)



d)



44 Sabe-se que o tampo da mesa mostrada na figura é composto de duas tábuas retangulares, cada qual com 0,35 m de largura, e dois semicírculos, cada um com 0,80 m de diâmetro.


CIT/ZAPT

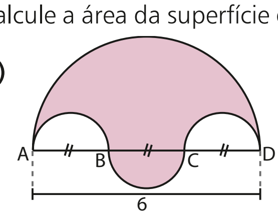
Elementos sem proporção entre si.

Nessas condições, qual é a área da superfície do tampo dessa mesa?

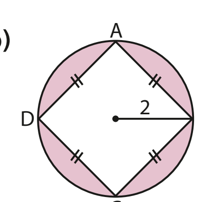
Use $\pi \simeq 3{,}14$.

45 Considere que nas figuras seguintes os segmentos assinalados são congruentes e a unidade das medidas está indicada em decímetros. Em cada caso, calcule a área da superfície da região sombreada:

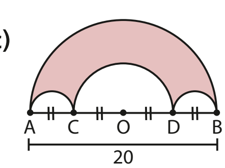
a)



b)

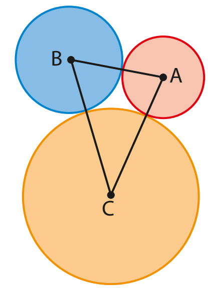


c)

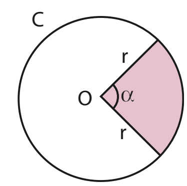


46 Certa noite, em que um *show* musical lotou uma praça circular de uma cidade, um jornal local noticiou que a ocupação média dos que foram "curtir" o som havia sido de 4 pessoas por metro quadrado. Nessas condições, sabendo que essa praça tem 49 m de raio e considerando $\pi \simeq \frac{22}{7}$, determine uma estimativa do número de pessoas presentes em tal *show*.

47 Na figura estão representados três círculos de centros nos pontos **A**, **B** e **C**, dois a dois tangentes exteriormente. Se AB = 16 cm, BC = 24 cm e AC = 22 cm, determine as áreas dos três círculos.



Área do setor circular

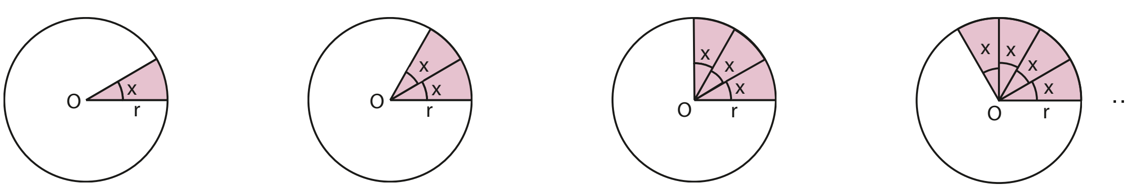


Na figura ao lado, temos:
C: círculo de centro **O** e raio de medida **r**;
α: medida do ângulo de vértice **O**.

Chama-se **setor circular** de centro **O**, raio de medida **r** e ângulo central de medida α, a região determinada pela interseção de **C** com a região limitada pelos lados do ângulo.

Assim, na figura, a região colorida representa o setor circular definido.

Dado um setor circular de centro **O**, com raio de medida **r** e ângulo central de medida **x**, vamos comparar sua área com as áreas de outros setores de mesmo raio, mas cujas medidas dos ângulos centrais são sucessivamente aumentadas para 2x, 3x, 4x, ...



Podemos observar que, se a medida do ângulo central dobra, a área do setor dobra; se a medida do ângulo central triplica, a área do setor triplica e, assim, sucessivamente. Dessa forma, concluímos que a área de um setor circular é diretamente proporcional à medida do ângulo central (ou ao comprimento do correspondente arco). Assim:

- quando a medida do ângulo central é dada em graus, a área do setor circular pode ser calculada pela seguinte regra de três:

$$\begin{array}{lccc} & \text{área (u.a.)} & & \text{ângulo central (graus)} \\ \text{setor:} & A & \text{———} & x \\ \text{círculo:} & \pi \cdot r^2 & \text{———} & 360 \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c}A\\A\end{array}}\right\} \Rightarrow \frac{A}{\pi \cdot r^2} = \frac{x}{360}$$

Portanto: $\boxed{A = \frac{x}{360} \cdot \pi \cdot r^2}$

- quando o comprimento do correspondente arco é ℓ, a área do setor circular pode ser calculada pela seguinte regra de três:

$$\begin{array}{lccc} & \text{área (u.a.)} & & \text{comprimento do arco (u.c.)} \\ \text{setor:} & A & \text{———} & \ell \\ \text{círculo:} & \pi \cdot r^2 & \text{———} & 2\pi r \end{array} \Bigg\} \Rightarrow \frac{A}{\pi \cdot r^2} = \frac{\ell}{2\pi r}$$

Portanto:

$$\boxed{A = \frac{\ell \cdot r}{2}}$$

OBSERVAÇÃO

Note que, nos dois casos, as expressões da área do setor foram obtidas por meio de regra de três. Para que não seja preciso decorar "novas fórmulas", o mesmo procedimento deve ser usado na resolução de problemas nos quais se necessita calcular áreas de setores circulares, conforme exemplificado a seguir.

EXEMPLO 5

Vamos calcular a área de um setor circular de ângulo central de medida 120° e cujo raio mede 10 cm. Para tal, estabelecemos a seguinte regra de três:

$$\begin{array}{lccc} & \text{área (cm}^2\text{)} & & \text{ângulo central (graus)} \\ \text{setor:} & A & \text{———} & 120 \\ \text{círculo:} & \pi \cdot 10^2 & \text{———} & 360 \end{array} \Bigg\} \Rightarrow \frac{A}{100\pi} = \frac{120}{360} \Rightarrow A = \frac{100\pi}{3}$$

Portanto, a área do setor circular é $\frac{100\pi}{3}$ cm².

PENSE NISTO:

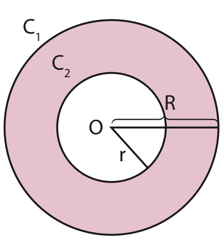
Como você pode calcular a área desse setor sem usar a regra de três?

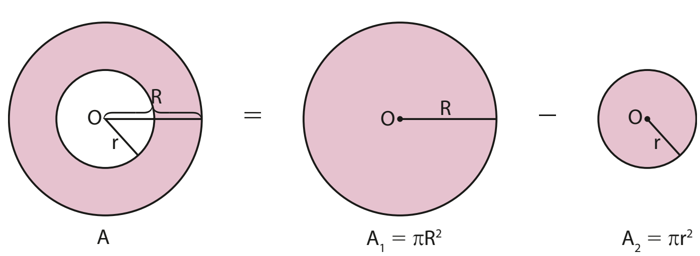
Área da coroa circular

Sejam **C_1** e **C_2** círculos concêntricos cujos respectivos raios medem **R** e **r**, com $R > r$.

Chama-se **coroa circular** a reunião do conjunto de pontos que pertencem à região limitada pelas circunferências de **C_1** e **C_2** com o conjunto dos pontos que pertencem a tais circunferências, como mostra a figura ao lado.

Observe que a área de uma coroa circular é igual à diferença entre as áreas dos círculos cujos raios medem **R** e **r**.



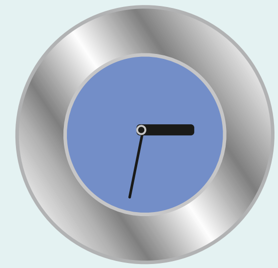


Logo: $A = A_1 - A_2 \Rightarrow \boxed{A = \pi R^2 - \pi r^2}$

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

5 Na cozinha da casa de Neuza há um relógio, no qual uma placa de metal plana, em forma de coroa circular, circunda o mostrador pintado de azul.

Determine a área da superfície da placa, sabendo que a circunferência maior da placa tem 32π cm de comprimento e o diâmetro do círculo interno mede 10 cm.



Elementos sem proporção entre si.

Solução:

Sabe-se que o comprimento da circunferência maior do relógio é 32π cm, ou seja:

$$2\pi R = 32\pi \text{ cm} \Rightarrow R = 16 \text{ cm}$$

Logo, a área do círculo maior é: $A_1 = \pi \cdot R^2 = \pi \cdot (16 \text{ cm})^2 \Rightarrow A_1 = 256\pi \text{ cm}^2$

O círculo interno tem 10 cm de diâmetro, ou seja: $D = 2r = 10 \text{ cm} \Rightarrow r = 5 \text{ cm}$

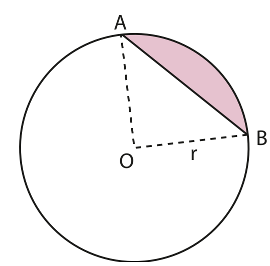
Logo, a área do círculo menor é: $A_2 = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (5 \text{ cm})^2 \Rightarrow A_2 = 25\pi \text{ cm}^2$

Portanto: $A = A_1 - A_2 = 256\pi - 25\pi \Rightarrow A = 231\pi$

Logo, a área da placa é 231π cm².

Área do segmento circular

Seja $\overset{\frown}{AB}$ um arco de circunferência, contido em um círculo cujo raio mede **r**, como é mostrado na figura.



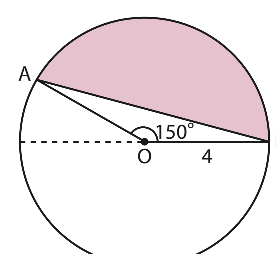
Chama-se **segmento circular** o conjunto de pontos que pertencem à parte do círculo limitada pelo arco $\overset{\frown}{AB}$ e pela corda de extremidades **A** e **B** (destacados ao lado).

Assim, a área do segmento circular ($\mathbf{A}_{seg}$) é igual à diferença entre a área do setor circular ($\mathbf{A}_{set}$) e a área do triângulo AOB ($\mathbf{A}_{\triangle AOB}$).

$$A_{seg} = A_{set} - A_{\triangle AOB}$$

EXEMPLO 6

Vamos calcular a área de um segmento circular de um círculo cujas medidas do raio e do ângulo central são 4 cm e 150°, respectivamente.



Como a área do segmento circular ($\mathbf{A}_{seg}$) é igual à diferença entre a área do setor circular e a área do triângulo AOB, temos:

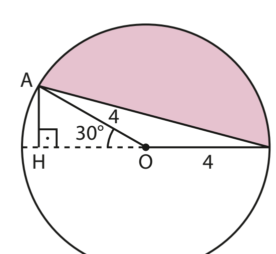
- área do setor circular, $\mathbf{A}_1$:

$$\begin{array}{lccc} & \text{área (cm}^2\text{)} & & \text{ângulo central} \\ \text{setor:} & A_1 & \text{———} & 150° \\ \text{círculo:} & \pi \cdot 4^2 & \text{———} & 360° \end{array} \Bigg\} \Rightarrow \frac{A_1}{16\pi \text{ cm}^2} = \frac{150}{360} \Rightarrow A_1 = \frac{20\pi}{3} \text{ cm}^2$$

- área do triângulo AOB, $\mathbf{A}_2$:

Temos: $AO = OB = 4$ cm e med($A\hat{O}B$) $= 150° \Rightarrow$ med($A\hat{O}H$) $= 30°$

$\triangle AHO$ retângulo $\Rightarrow \operatorname{sen} 30° = \dfrac{AH}{AO} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{AH}{4 \text{ cm}} \Rightarrow AH = 2$ cm



Assim: $A_2 = \dfrac{1}{2} \cdot OB \cdot AH = \dfrac{1}{2} \cdot (4 \text{ cm}) \cdot (2 \text{ cm}) \Rightarrow A_2 = 4 \text{ cm}^2$

Logo, $A_{seg} = A_1 - A_2 = \dfrac{20\pi}{3} - 4 \Rightarrow A_{seg} = \dfrac{4(5\pi - 3)}{3}$

Portanto, a área do segmento circular é $\dfrac{4(5\pi - 3)}{3}$ cm².

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

48 Em cada caso, calcule a área do setor circular de raio **r** e ângulo central de medida θ.

a) $r = 4$ m e $\theta = 30°$

b) $r = 9$ dm e $\theta = 120°$

c) $r = 12$ m e $\theta = 45°$

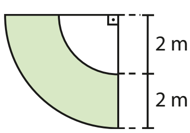
d) $r = 6$ cm e $\theta = 90°$

e) $r = 10$ cm e $\theta = 150°$

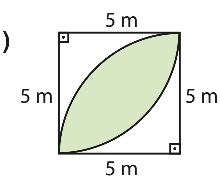
f) $r = 2$ km e $\theta = 300°$

49 Em cada caso, calcule a área da superfície colorida.

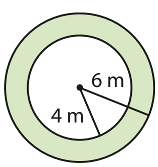
a)



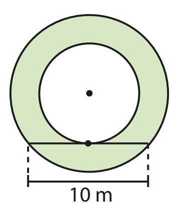
d)



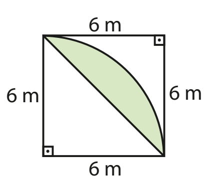
b)



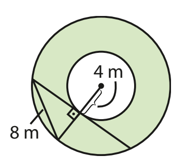
e)



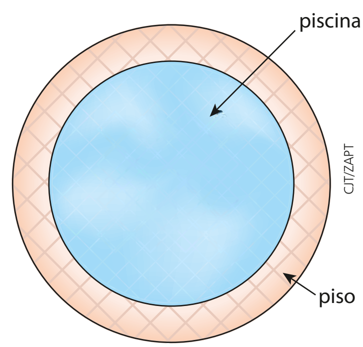
c)



f)



50 Na casa de Marina há uma piscina de formato circular, circundada por um piso, conforme mostrado na figura. Ela pretende trocar o revestimento do piso por outro, que custa R$16,00 o metro quadrado. Sabendo que a piscina tem 8 m de diâmetro e o piso tem 2,5 m de largura, determine a quantia mínima que Marina gastará na compra do novo revestimento para o piso. Use: $\pi \simeq \dfrac{22}{7}$.



Elementos sem proporção entre si.

51 Em cada caso, determine a área de um segmento circular em que a medida do raio é **r** e o ângulo central mede θ.

a) $r = 4$ cm e $\theta = 45°$

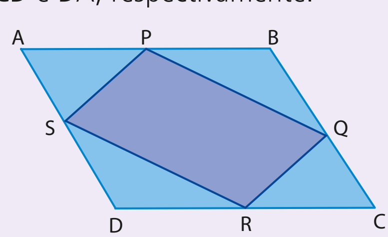
b) $r = 8$ dm e $\theta = 30°$

c) $r = 2$ m e $\theta = 90°$

d) $r = 12$ cm e $\theta = 120°$

DESAFIO

Relativamente ao quadrilátero ABCD, mostrado na figura abaixo, sabe-se que **P**, **Q**, **R** e **S** são pontos médios dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$, respectivamente.



Se a área de ABCD é igual a 48 cm², determine, em centímetros quadrados, a área do quadrilátero PQRS.