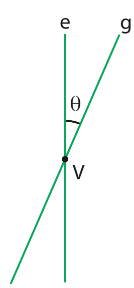
CAPÍTULO 4

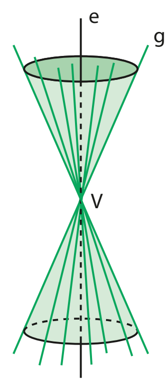
As cônicas

Introdução

Consideremos duas retas **e** e **g** concorrentes em **V** e não perpendiculares.

Com a reta **e** fixa, pelo ponto **V** façamos **g** girar 360° em torno de **e**, mantendo constante o ângulo de medida θ formado por elas. A reta **g** gera uma superfície denominada **superfície cônica de duas folhas**. A reta **g** é chamada **geratriz** dessa superfície.



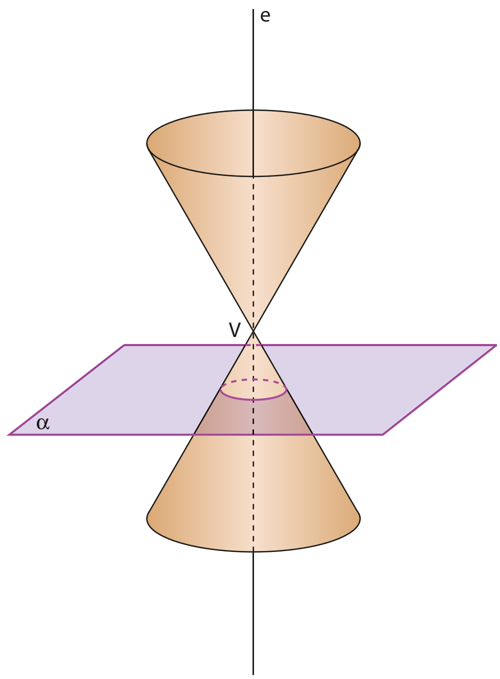


Apolônio de Perga, cerca de 200 a.C., iniciou o estudo das curvas obtidas quando se seciona uma superfície cônica por um plano α. Dependendo da posição desse plano α, diferentes seções podem ser obtidas.

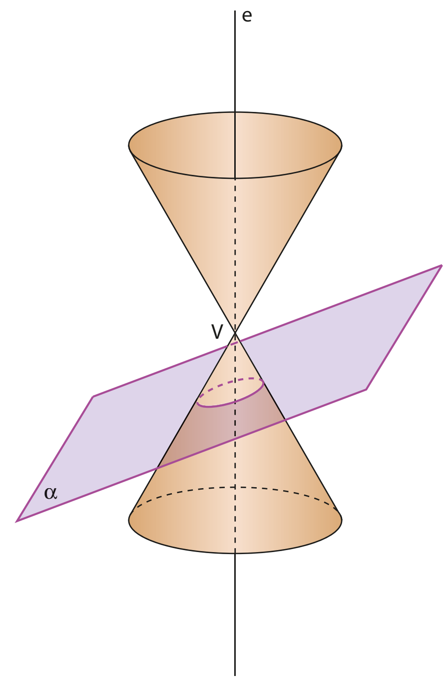
SHEILA TERRY/SPL/LATINSTOCK/COLEÇÃO PARTICULAR

Apolônio de Perga demonstrando suas teorias matemáticas em Alexandria. Gravura de C. Laplante, data desconhecida.

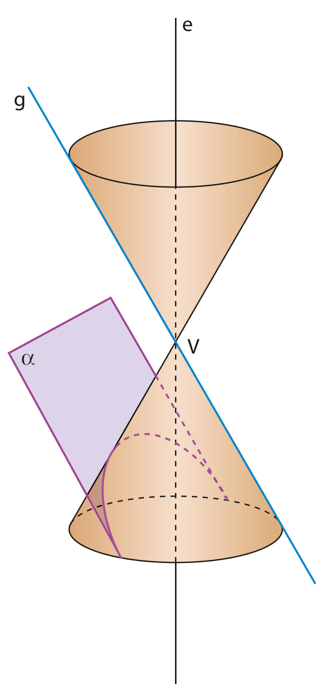
Se o plano α é perpendicular à reta **e**, a seção obtida é uma **circunferência**. Em particular, se α passa por **V**, a seção obtida é um ponto.



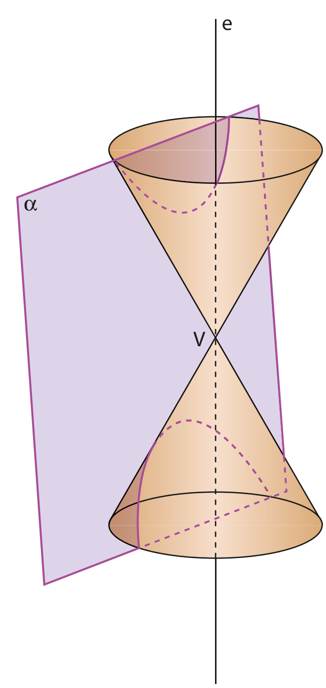
Se o plano α é oblíquo à reta **e**, mas corta apenas uma das folhas da superfície cônica, a seção obtida é uma **elipse**.



Se o plano $\boldsymbol{\alpha}$ é paralelo a uma geratriz **g** da superfície cônica, a seção obtida é uma **parábola**.



Se o plano $\boldsymbol{\alpha}$ é oblíquo à reta **e** e corta as duas folhas da superfície cônica, a seção obtida é uma **hipérbole**.



Neste capítulo faremos um estudo inicial da elipse, da hipérbole e da parábola, denominadas, juntamente com a circunferência, **seções cônicas**.

Elipse

Observe as fotos abaixo.

GRAY BUILDINGS, DISTRICT OF COLUMBIA/GOOGLE EARTH

Imagem I. Parque *The Ellipse* (A elipse), na cidade de Washington, EUA, 2015.

PETER MUKHERJEE/E+/GETTY IMAGES

Imagem II. O contorno destacado da cuba de louça nos remete a uma elipse.

A imagem I mostra um importante marco da cidade de Washington, capital dos Estados Unidos: um parque chamado *The Ellipse* (A elipse).

A imagem II mostra uma cuba de louça usada em pias de banheiros. Seus contornos lembram a cônica que passaremos a estudar: a elipse.

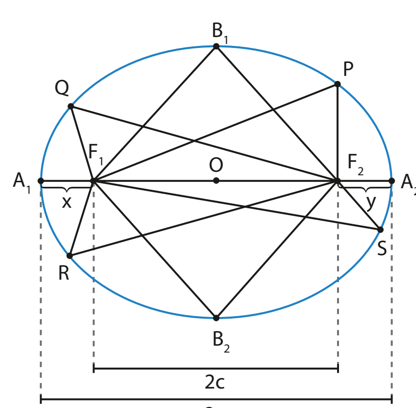
O que é elipse?

Dados dois pontos distintos $\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$, pertencentes a um plano α, seja 2c a distância entre eles e **O** o ponto médio de $\overline{F_1F_2}$. **Elipse** é o conjunto dos pontos de α cuja soma das distâncias a $\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$ é igual à constante 2a ($2a > 2c$).

$$\text{elipse} = \{P \in \alpha \mid PF_1 + PF_2 = 2a\}$$

Assim, temos:

$$QF_1 + QF_2 = 2a$$
$$RF_1 + RF_2 = 2a$$
$$SF_1 + SF_2 = 2a$$
$$A_1F_1 + A_1F_2 = 2a$$
$$B_1F_1 + B_1F_2 = 2a$$
$$A_2F_1 + A_2F_2 = 2a$$
$$B_2F_1 + B_2F_2 = 2a$$



Notemos que $A_1A_2 = 2a$, pois:

$$A_1F_1 + A_1F_2 = A_2F_2 + A_2F_1$$

então:

$$x + (x + 2c) = y + (y + 2c)$$

portanto, $x = y$.

Daí:

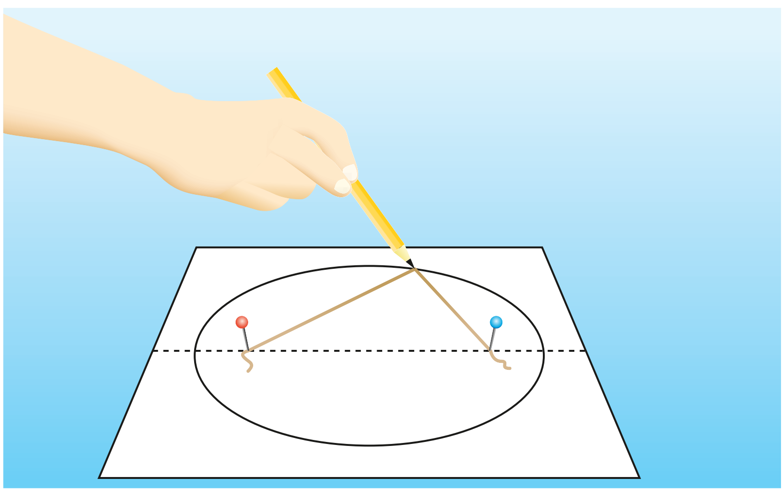
$$A_1A_2 = A_1F_1 + F_1F_2 + F_2A_2 = x + 2c + y = 2(x + c) = 2a$$

PENSE NISTO:

Por que o ponto **O** é também ponto médio de $\overline{A_1A_2}$?

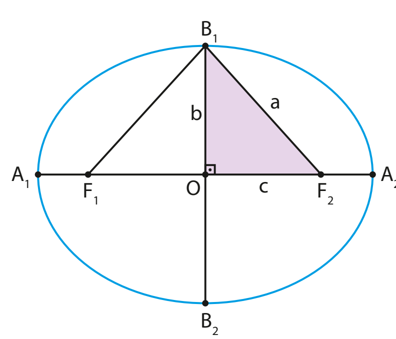
Observe a figura a seguir para compreender o traçado de uma elipse.

ZAPT



Um barbante de comprimento 2a é fixado em dois pregos distantes 2c um do outro (observe que $2a > 2c$). Mantendo o barbante esticado, desloca-se a ponta do lápis. A curva que ele descreverá será uma elipse.

Elementos principais



$\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$: focos

O: centro

$\overline{A_1A_2}$: eixo maior

$\overline{B_1B_2}$: eixo menor

$\overline{A_1A_2}$ e $\overline{B_1B_2}$ são perpendiculares entre si

2c: distância focal

2a: medida do eixo maior

2b: medida do eixo menor

$\dfrac{c}{a}$: excentricidade (*)

(*) Veja, na seção *Aplicações* das páginas 96 e 97, o infográfico "As órbitas dos planetas".

PENSE NISTO:

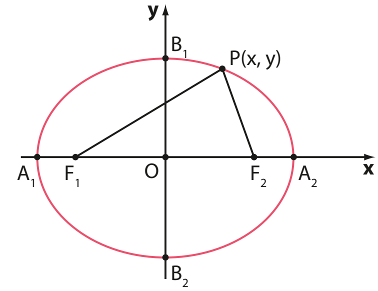
Por que a medida de $\overline{B_1F_2}$ é igual a **a**?

Numa elipse, a medida do semieixo maior **a**, a medida do semieixo menor **b** e a metade da distância focal **c** verificam a relação:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

que decorre do teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo retângulo OF_2B_1.

Equação reduzida (I)



Tomemos um sistema cartesiano ortogonal tal que:

$$\overline{A_1A_2} \subset Ox \ \text{ e } \ \overline{B_1B_2} \subset Oy$$

É fácil verificar que os focos são os pontos:

$$F_1(-c, 0) \ \text{ e } \ F_2(c, 0)$$

Chama-se **equação reduzida da elipse** a equação que o ponto genérico da curva, P(x, y), verifica.

$$P \in \text{elipse} \Leftrightarrow PF_1 + PF_2 = 2a$$

Vamos deduzi-la.

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Elevando os dois membros ao quadrado e desenvolvendo, temos:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \Rightarrow$$
$$4cx - 4a^2 = -4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx$$

Elevando os dois membros ao quadrado novamente, temos:

$$a^2(x-c)^2 + a^2y^2 = (a^2 - cx)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

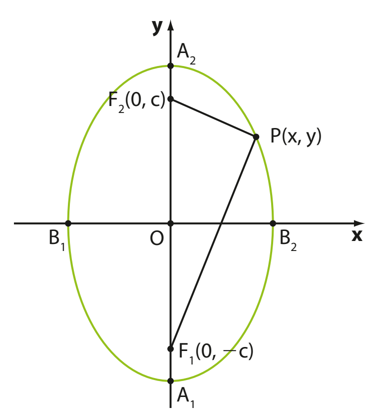
e, dividindo os dois membros da igualdade por a^2b^2, resulta:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Equação reduzida (II)

Analogamente, se a elipse apresenta $\overline{A_1A_2} \subset Oy$ e $\overline{B_1B_2} \subset Ox$, temos:

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$
$$\sqrt{(x-0)^2 + (y+c)^2} + \sqrt{(x-0)^2 + (y-c)^2} = 2a$$



e, repetindo o raciocínio anterior, decorre novamente a equação da elipse:

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1}$$

EXEMPLO 1

Uma elipse com eixo maior de medida 8 e distância focal de medida 6 apresenta:

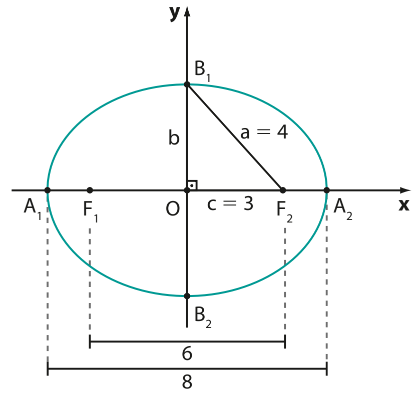
$$\left.\begin{array}{l} a = 4 \\ c = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 16 - 9 = 7 \Rightarrow b = \sqrt{7}$$

Se o eixo maior da elipse estiver contido no eixo **x**, a posição da elipse é a indicada na figura, isto é:

$$\overline{A_1A_2} \subset Ox \text{ e } \overline{B_1B_2} \subset Oy$$

então sua equação é:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$$



EXEMPLO 2

Uma elipse com eixo maior de medida 8 e eixo menor de medida $2\sqrt{7}$, com $\overline{A_1A_2} \subset Oy$ e $\overline{B_1B_2} \subset Ox$, isto é, na posição indicada na figura, tem equação:

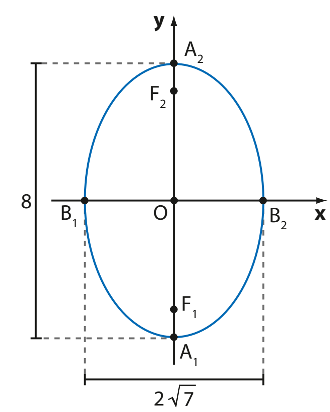
$$\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{7} = 1$$

ou ainda:

$$\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{16} = 1$$

PENSE NISTO:

Quais são as coordenadas dos focos dessa elipse?

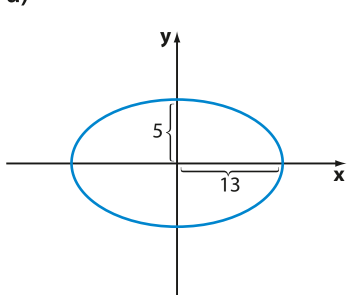


EXERCÍCIOS

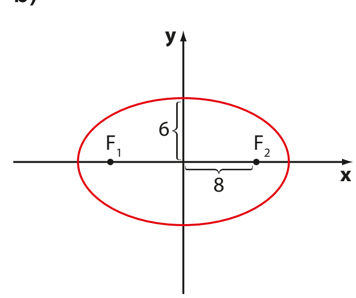
FAÇA NO CADERNO

1 Determine as equações das elipses seguintes.

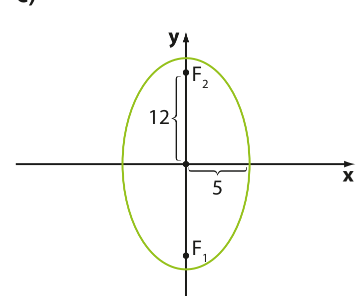
a)



b)



c)



2 Determine as coordenadas dos focos de cada elipse do exercício anterior.

3 Determine a equação da elipse cujos focos são $F_1(-12, 0)$ e $F_2(12, 0)$ e que contém o ponto $P\left(12, \frac{27}{5}\right)$.

4 Calcule a distância focal e a excentricidade da elipse λ: $x^2 + 3y^2 = 6$.

5 Determine a equação da elipse com centro na origem, que passa pelo ponto $P\left(1, \sqrt{6}\right)$ e tem um foco $F_1(0, -2)$.

6 Determine a equação da elipse cujos focos são os pontos $F_1(2, 0)$ e $F_2(-2, 0)$, sendo 6 cm a medida de seu eixo menor.

7 Encontre as coordenadas dos focos da elipse de equação $9x^2 + 16y^2 = 4$.

8 Represente no plano cartesiano a elipse cuja equação é $x^2 + 2y^2 = 4$ e obtenha as coordenadas dos focos.

9 Qual é a equação do conjunto dos pontos $P(x, y)$ cuja soma das distâncias a $F_1(0, -1)$ e $F_2(0, 1)$ é 8?

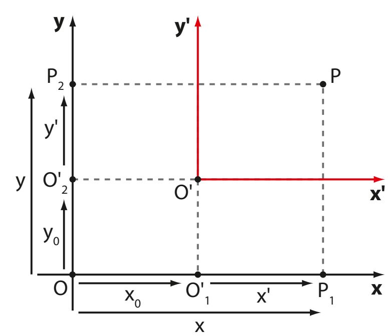
10 Os pontos $A(3, 0)$ e $B(x, y)$ pertencem a uma elipse cujos focos são $F_1(-2, 0)$ e $F_2(2, 0)$. Calcule o perímetro do triângulo BF_1F_2.

Translação de sistema

Sejam $P(x, y)$ e $O'(x_0, y_0)$ dois pontos referidos a um sistema cartesiano xOy.

Se x'O'y' é um sistema tal que x' // x, y' // y e **x'**, **y'** têm respectivamente o mesmo sentido positivo de **x**, **y**, dizemos que x'O'y' foi obtido por uma translação de xOy.

Vamos estabelecer uma relação entre as coordenadas de **P** nos sistemas x'O'y' e xOy.



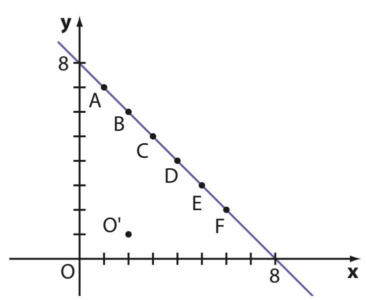
No eixo Ox, temos: $OP_1 = OO'_1 + O'_1P_1 \Rightarrow$ $\boxed{x = x_0 + x'}$

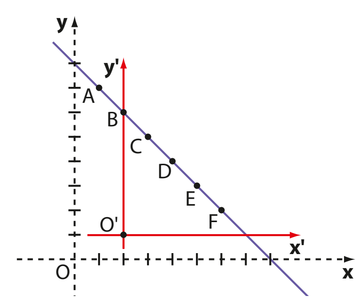
No eixo Oy, temos: $OP_2 = OO'_2 + O'_2P_2 \Rightarrow$ $\boxed{y = y_0 + y'}$

EXEMPLO 3

Consideremos a reta de equação $x + y - 8 = 0$. Eis alguns pontos que pertencem a essa reta:

$A(1, 7)$, $B(2, 6)$, $C(3, 5)$, $D(4, 4)$, $E(5, 3)$, $F(6, 2)$





Se é dada uma translação no sistema xOy, de modo que a nova origem seja $O'(2, 1)$, todos os pontos citados mudam de coordenadas, obedecendo à lei:

$$\underset{\text{(nova)}}{x'} = \underset{\text{(antiga)}}{x} - \underset{\text{(origem } \mathbf{O'}\text{)}}{2}$$
$$y' = y - 1$$

Em relação ao sistema x'O'y' temos as novas coordenadas para os pontos **A** a **F**:

$A(-1, 6)$, $B(0, 5)$, $C(1, 4)$, $D(2, 3)$, $E(3, 2)$, $F(4, 1)$

A equação da reta no sistema x'O'y' é obtida a partir de $x + y - 8 = 0$, fazendo $x = x' + 2$ e $y = y' + 1$. Assim:

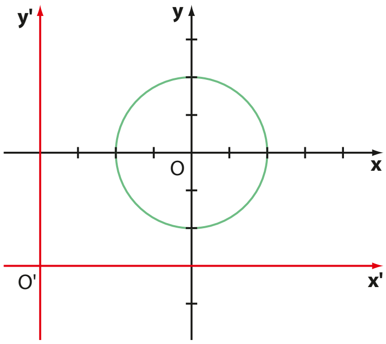
$$x + y - 8 = 0 \Rightarrow (x' + 2) + (y' + 1) - 8 = 0 \Rightarrow x' + y' - 5 = 0$$

EXEMPLO 4

Consideremos a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 4$. Seu centro no sistema xOy é (0, 0) e seu raio é 2.

Se é dada uma translação no sistema xOy, de modo que a nova origem seja $O'(-4, -3)$, todos os pontos mudam de coordenadas, obedecendo à lei:

$$\underset{\text{(nova)}}{x'} = \underset{\text{(antiga)}}{x} + 4 \qquad \text{e} \qquad \underset{\text{(nova)}}{y'} = \underset{\text{(antiga)}}{y} + 3$$



A equação da circunferência em relação ao sistema x'O'y' pode ser obtida a partir de $x^2 + y^2 = 4$.

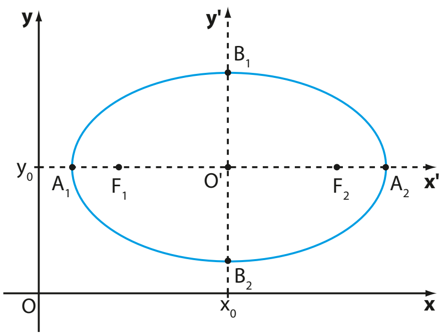
Assim:

$$x^2 + y^2 = 4$$
$$(x' - 4)^2 + (y' - 3)^2 = 4$$

Elipses com centro fora da origem e eixos paralelos aos eixos x e y

Se uma elipse tem centro no ponto $O'(x_0, y_0)$ e $\overline{A_1A_2}$ // Ox, sua equação em relação ao sistema auxiliar x'O'y' é:

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1$$

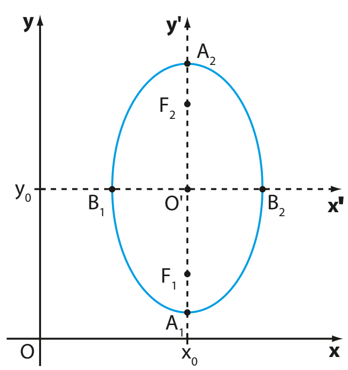


Portanto, de acordo com as "fórmulas" da translação vistas, sua equação relativamente ao sistema xOy é:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Analogamente, se uma elipse tem centro no ponto $O'(x_0, y_0)$ e $\overline{A_1A_2}$ // Oy, sua equação relativamente ao sistema xOy é:

$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} + \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1$$



EXEMPLO 5

Uma elipse que tem centro no ponto O'(3, 5), semieixo maior a = 2 e semieixo menor b = 1 apresenta a equação:

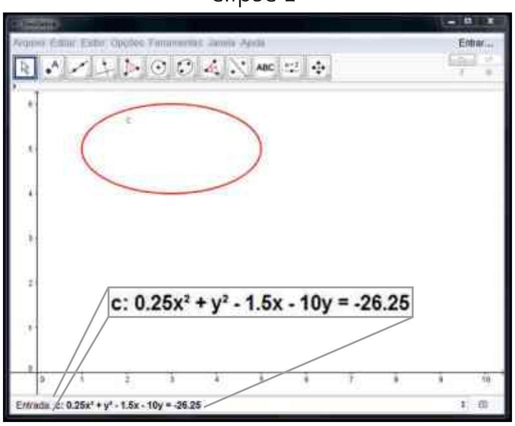
$$\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y-5)^2}{1} = 1 \text{ (se o eixo maior é paralelo ao eixo } \mathbf{x}) \qquad (\mathrm{I})$$

ou:

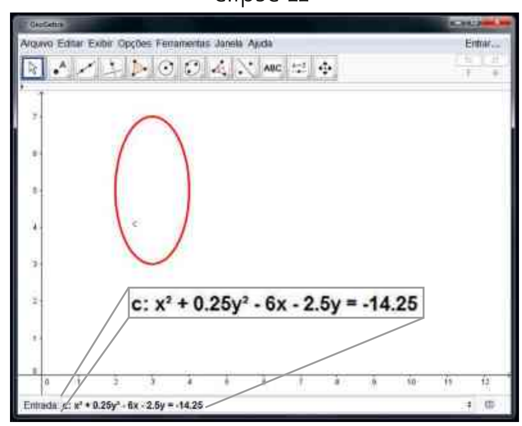
$$\frac{(x-3)^2}{1} + \frac{(y-5)^2}{4} = 1 \text{ (se o eixo maior é paralelo ao eixo } \mathbf{y}) \qquad (\mathrm{II})$$

Observe os dois gráficos dessas elipses traçados com auxílio do GeoGebra.

elipse I



elipse II



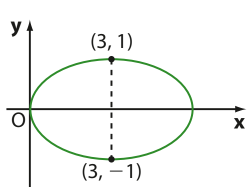
IMAGENS: GEOGEBRA

EXERCÍCIOS

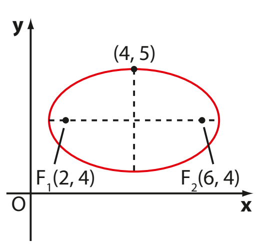
FAÇA NO CADERNO

11 Determine as equações das elipses seguintes.

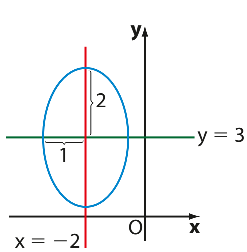
a)



b)



c)



12 Determine as coordenadas dos focos de cada elipse nos itens *a* e *c* do exercício anterior.

13 O ponto C(−3, −2) é o centro de uma elipse tangente aos eixos coordenados. Se os eixos de simetria da elipse são paralelos aos eixos coordenados, escreva a equação da elipse.

14 Determine a equação da elipse cujo centro é C(−2, −1), a qual passa pelos pontos A(−1, −1) e B(−2, −3), tendo os seus eixos paralelos aos eixos coordenados.

15 A metade do eixo maior de uma elipse mede 5 cm e a distância focal é de 4 cm, sendo (2, 1) o centro dessa elipse. Se o eixo menor é paralelo ao eixo coordenado Ox, escreva a equação reduzida dessa elipse.

16 Determine os focos da cônica de equação:

$$\frac{(x-3)^2}{169} + \frac{(y-2)^2}{144} = 1$$

Aplicações

As órbitas dos planetas

O modelo heliocêntrico

O movimento dos planetas e a configuração do Sistema Solar podem ser relacionados por um **modelo heliocêntrico**, proposto inicialmente pelo astrônomo Aristarco de Samos (310 a.C.-230 a.C.) e retomado, entre outros, pelo astrônomo polonês Nicolau Copérnico (1473-1543). Copérnico era um astrônomo com grande inclinação para a Matemática e, entre outras realizações, acreditava que a Terra é um planeta como todos os outros e que gira em órbita circular ao redor do Sol (supostamente imóvel). Copérnico ordenou os planetas considerando sua distância em relação ao Sol e concluiu que, à medida que o planeta se aproxima do Sol, maior é sua velocidade orbital.

A teoria heliocêntrica de Copérnico (considerada mais simples que a de Cláudio Ptolomeu, que perdurou por toda a Idade Média) derrubou a crença de que o homem era o centro da criação do Universo.

O astrônomo polonês Nicolau Copérnico e a sua representação do Modelo Heliocêntrico, em que as órbitas dos planetas em torno do Sol são **circulares**.

JEAN-LEON HUENS.COPERNICUS THEORISED THAT THE EARTH WAS THE CENTER OF THE UNIVERSE, 1974 NATIONAL GEOGRAPHIC SOCIETY/CORBIS/LATINSTOCK

Mercúrio

- Período de revolução (intervalo de tempo para que o planeta dê uma volta completa em torno do Sol): 88 dias terrestres.
- Diâmetro: 4 878 km
- Excentricidade de sua órbita: **0,206 = 20,6%**

Terra

- Período de revolução: 365 dias e 4 horas.
- Diâmetro: 12 800 km (pouco maior que o diâmetro de Vênus).
- A atmosfera terrestre nos protege contra pequenos corpos celestes externos (meteoros, por exemplo), que, em sua maioria, se queimam por meio do atrito com o ar antes de colidirem com a superfície terrestre.
- Excentricidade de sua órbita: **0,0167 = 1,67%**

O Sol

- Ocupa posição teoricamente fixa, correspondente a um dos focos das órbitas elípticas dos planetas.
- Para termos uma ideia do seu tamanho, seriam necessários 1 300 000 planetas com o mesmo diâmetro da Terra para preencher o interior do Sol.
- A temperatura em sua superfície é de aproximadamente 6 000 °C.

Vênus

- Período de revolução: 225 dias terrestres.
- Diâmetro: 12 000 km
- Excentricidade de sua órbita: **0,0068 = 0,68%**

A excentricidade

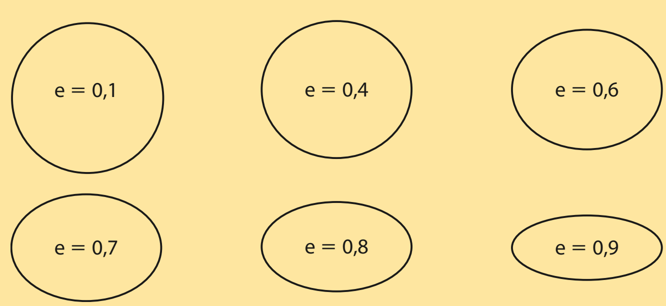
As órbitas elípticas ocupam diferentes planos no espaço e têm diferentes tamanhos e formas. Para entender o aspecto dessas órbitas, é necessário entender o conceito de **excentricidade**.

Se uma elipse tem eixo maior de medida 2a e distância focal 2c, sua excentricidade (ou "achatamento") é dada por:

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$$

Como $c < a$, vemos que **e** é sempre um número pertencente ao intervalo $]0, 1[$, isto é, $0 < e < 1$. Elipses que têm excentricidade próxima de 0 são pouco achatadas e têm forma muito próxima à de uma circunferência. Elipses que têm excentricidade próxima de 1 são bem achatadas.

Observe, na ilustração ao lado, as seis elipses, de diferentes excentricidades, tendo todas um eixo maior com medida igual a 2 cm.

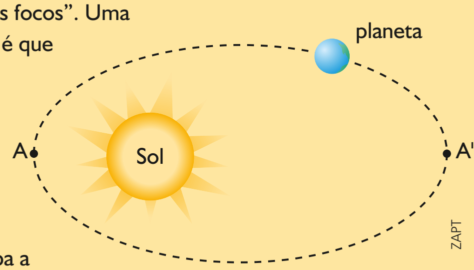


Com base em medições, os astrônomos calcularam as excentricidades das órbitas dos planetas, mostradas neste infográfico. Observe, no infográfico, que, embora as órbitas dos planetas sejam elipses, de modo geral suas excentridades são tão pequenas que elas se parecem com círculos.

CASA PAULISTANA DE COMUNICAÇÃO

As órbitas elípticas

Em 1546 (três anos após a morte de Copérnico), nasceu o astrônomo Tycho Brahe, que, usando instrumentos projetados e fabricados por ele mesmo, registrou as posições de planetas e estrelas com precisão admirável para a época (em que não existiam os telescópios). Brahe contratou, em 1600, um matemático alemão chamado Johannes Kepler (na época com 29 anos) para ajudá-lo na análise das informações coletadas. Com a morte de Brahe em 1601, Kepler deu continuidade à análise dos dados e determinou que a trajetória dos planetas em relação ao Sol não eram circunferências e sim **elipses**. No ano de 1609, Kepler enuncia a lei das órbitas elípticas: "A órbita de cada planeta é uma elipse com o Sol posicionado em um dos focos". Uma consequência dessa lei é que a distância do Sol a um planeta varia ao longo do seu movimento orbital (sendo mínima quando o planeta ocupa a posição **A** e máxima quando ocupa a posição **A'**). Foram as descobertas de Galileu Galilei (1564-1642) que proporcionaram grande quantidade de evidências, consolidando o sistema heliocêntrico.



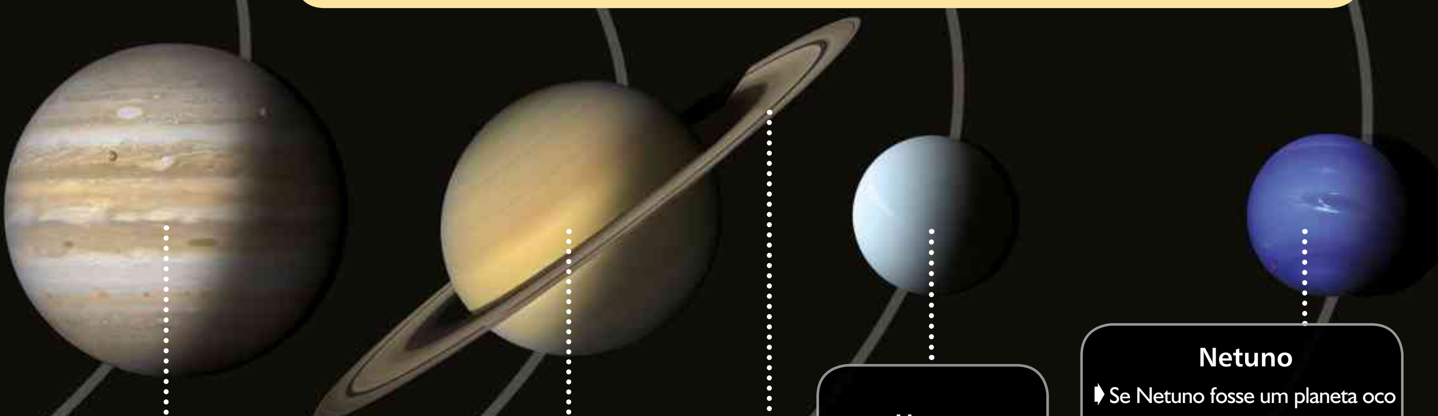
ZAPT


COLEÇÃO PARTICULAR. SHEILA TERRY/SCIENCE PHOTO LIBRARY

Neste quadro, observamos Johannes Kepler (à esquerda) e Tycho Brahe trabalhando com base nos dados das posições dos planetas levantados por Brahe. Autor e data desconhecidos.

Marte

- Período de revolução: 690 dias terrestres.
- Diâmetro: 6 800 km
- Excentricidade de sua órbita: **0,093 = 9,3%**
- Marte e os planetas mais próximos do Sol (Terra, Vênus e Mercúrio) são chamados de **planetas sólidos**.

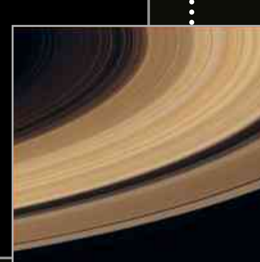


Júpiter

- É o maior planeta do Sistema Solar (diâmetro da ordem de 142 984 km).
- Período de revolução: 12 anos terrestres.
- Júpiter e os planetas mais distantes do Sol (Saturno, Urano e Netuno) são chamados de **planetas gasosos**.
- Excentricidade de sua órbita: **0,048 = 4,8%**

Saturno

- Esse planeta é visivelmente achatado nos polos. Dessa forma, o seu diâmetro (medido na Linha do Equador) é da ordem de 119 300 km.
- Período de revolução: 29 anos e 6 meses terrestres.
- O sistema de anéis faz de Saturno um objeto celeste singular no Sistema Solar. Esses anéis são formados por poeira e água na forma sólida.
- Excentricidade de sua órbita: **0,056 = 5,6%**


NASA/JPL/SPACE SCIENCE INSTITUTE

Urano

- Diâmetro: 51 800 km
- Período de revolução: 84 anos terrestres.
- Excentricidade de sua órbita: **0,0461 = 4,61%**

Netuno

- Se Netuno fosse um planeta oco poderia conter, em seu interior, aproximadamente 60 planetas com o mesmo diâmetro da Terra.
- Diâmetro: 49 500 km
- Período de revolução 165 anos.
- Excentricidade de sua órbita: **0,0097 = 0,97%**

ELEMENTOS SEM PROPORÇÃO ENTRE SI E EM CORES FANTASIA.

Fontes de pesquisa: *Movimento dos Planetas: Tycho, Kepler e Galileo*. Disponível em: <astro.if.ufrgs.br/movplan2/movplan2.htm>. Acesso em: 15 mar. 2016.; *O modelo heliocêntrico de Copérnico*. Disponível em: <www.ghtc.usp.br/server/Sites-HF/Jose-Tarcisio-Costa/copernico.htm>. Acesso em: 15 mar. 2016.

Hipérbole

Você já deve ter observado o que acontece quando se acende um abajur em um ambiente escuro: na parede, é possível visualizar duas regiões iluminadas. Seus contornos têm a forma da cônica que passaremos a estudar: a hipérbole.

MISHA GORDON/ALAMY/FOTOARENA

Veja agora a foto ao lado, que mostra um conhecido ponto turístico de Brasília: a Catedral Metropolitana.

Projetada por Oscar Niemeyer, ela apresenta dezesseis pilares dispostos ao longo de um círculo. Os contornos desses pilares lembram uma hipérbole.

CASSANDRA CURY/PULSAR IMAGENS

Catedral Metropolitana de Brasília (DF) em 2014.

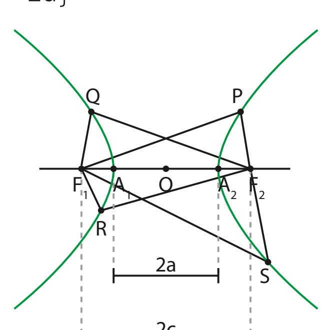
O que é hipérbole?

Dados dois pontos distintos $\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$, pertencentes a um plano α, seja 2c a distância entre eles e **O** o ponto médio do segmento $\overline{F_1F_2}$. **Hipérbole** é o conjunto dos pontos de α cuja diferença (em valor absoluto) das distâncias a $\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$ é a constante 2a (com $0 < 2a < 2c$).

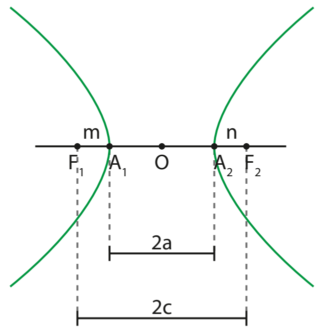
$$\text{hipérbole} = \{P \in \alpha \mid |PF_1 - PF_2| = 2a\}$$

Assim, temos:

$$|QF_2 - QF_1| = 2a$$
$$|RF_2 - RF_1| = 2a$$
$$|SF_1 - SF_2| = 2a$$
$$|A_1F_2 - A_1F_1| = 2a$$
$$|A_2F_1 - A_2F_2| = 2a$$



Observe a figura abaixo. Vamos mostrar que m = n.



De fato:

$$|A_2F_1 - A_2F_2| = 2a \Rightarrow A_2F_1 - A_2F_2 = 2a \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (2c - n) - n = 2a$$

então: c = a + n (1)

$$|A_1F_2 - A_1F_1| = 2a \Rightarrow A_1F_2 - A_1F_1 = 2a \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (2c - m) - m = 2a$$

então: c = a + m (2)

De (1) e (2), resulta m = n.

PENSE NISTO:

Por que o ponto **O** também é ponto médio do segmento $\overline{A_1A_2}$?

Elementos principais

F_1 e **F_2**: focos

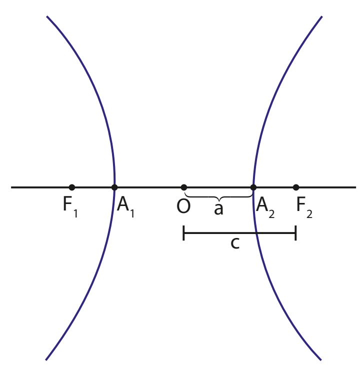
O: centro

$\overline{A_1A_2}$: eixo real ou transverso

2c: distância focal, em que $c = OF_1 = OF_2$

2a: medida do eixo real, em que $a = OA_1 = OA_2$

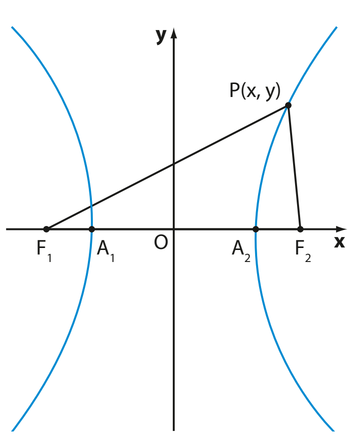
$\frac{c}{a}$: excentricidade



Equação reduzida (I)

Tomemos um sistema cartesiano ortogonal tal que $\overline{F_1F_2}$ esteja contido no eixo **x** e a reta perpendicular a esse segmento, passando por **O** (ponto médio de $\overline{F_1F_2}$) seja o eixo **y**. O eixo real é $\overline{A_1A_2}$ e sua medida é 2a. Os focos são os pontos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$.

$$P \in \text{hipérbole} \Leftrightarrow |PF_1 - PF_2| = 2a$$



Chama-se **equação reduzida da hipérbole** a equação que o ponto genérico da hipérbole, P(x, y), verifica.

Vamos deduzi-la:

$$|PF_1 - PF_2| = 2a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = \pm 2a$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a$$

Elevando os dois membros ao quadrado e desenvolvendo, temos:

$$(x+c)^2 + y^2 = (x-c)^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4cx - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Elevando os dois membros ao quadrado novamente, temos:

$$(cx - a^2)^2 = a^2 \cdot (x-c)^2 + a^2y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

Chamando $c^2 - a^2 = b^2$ (observe que $a < c \Rightarrow c^2 - a^2 > 0$), temos que:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

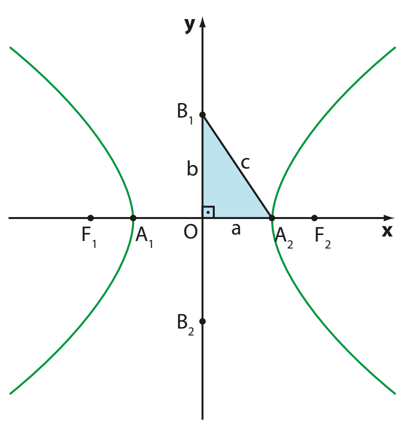
Dividindo membro a membro por a^2b^2, resulta na equação reduzida da hipérbole:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Observe que, se x = 0, temos:

$$\frac{0}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} = -1 \Rightarrow y^2 = -b^2$$

Como $b \in \mathbb{R}_+^*$, temos que $y \notin \mathbb{R}$. Desse modo, não há pontos em comum entre a hipérbole e o eixo **y**. Os pontos $B_1(0, b)$ e $B_2(0, -b)$ não pertencem à hipérbole mas determinam o segmento $\overline{B_1B_2}$ de medida 2b, que é chamado **eixo imaginário da hipérbole**.

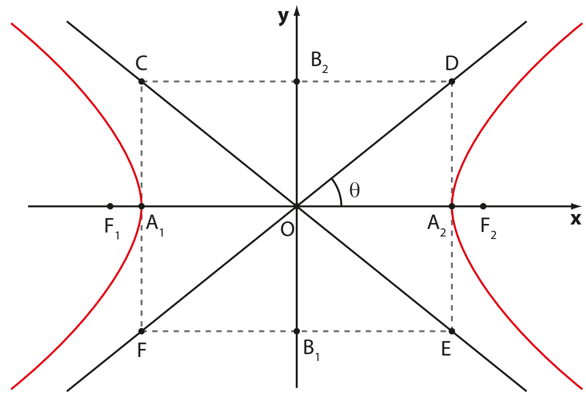


$\overline{B_1B_2}$: eixo imaginário

$B_1B_2 = 2b$: medida do eixo imaginário

Relação notável: $\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$

Traçando por $\mathbf{A_1}$ e $\mathbf{A_2}$ retas verticais e traçando por $\mathbf{B_1}$ e $\mathbf{B_2}$ retas horizontais, obtemos o retângulo CDEF, cujos vértices são as interseções dessas retas.



A reta suporte da diagonal $\overline{DF}$ passa por O(0, 0) e tem coeficiente angular igual a $\text{tg } \theta = \frac{b}{a}$.

Sua equação reduzida é $y = \frac{b}{a}x$.

Analogamente, a equação da reta suporte da diagonal $\overline{CE}$ é $y = -\frac{b}{a}x$.

As retas de equações $y = \pm\frac{b}{a}x$ são chamadas **assíntotas** da hipérbole.

As assíntotas não intersectam a hipérbole, mas, na medida em que tomamos pontos da hipérbole muito afastados do centro **O** (para a esquerda de **O** ou à direita de **O**), o traçado da hipérbole "aproxima-se" das assíntotas.

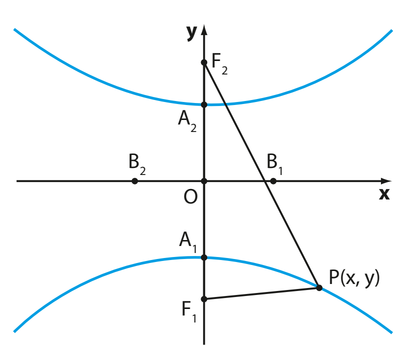
Equação reduzida (II)

Analogamente ao que vimos, se a hipérbole apresenta eixo real $\overline{A_1A_2} \subset Oy$ e eixo imaginário $\overline{B_1B_2} \subset Ox$, temos:

$$F_1(0, -c) \text{ e } F_2(0, c) \text{ em que } c > 0$$

Se P(x, y) pertence à hipérbole, então:

$$|PF_1 - PF_2| = 2a \Rightarrow PF_1 - PF_2 = \pm 2a \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y+c)^2} - \sqrt{(x-0)^2 + (y-c)^2} = \pm 2a$$



Daí obtemos a equação da hipérbole:

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1}$$

As assíntotas têm equações $y = \pm\frac{a}{b}x$.

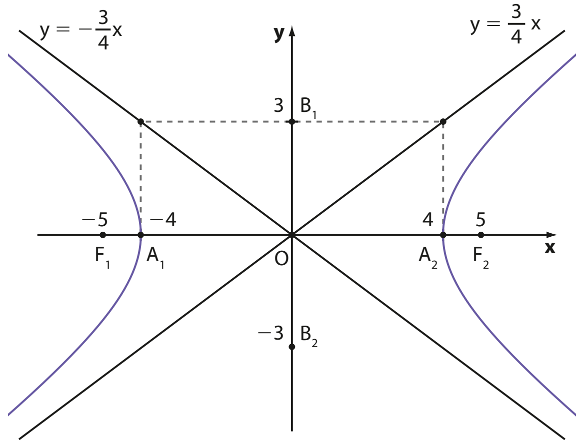
EXEMPLO 6

Uma hipérbole com eixo real de medida 8 e distância focal igual a 10 apresenta:

$$b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 16 = 9$$

Se o eixo real da hipérbole estiver contido no eixo **x**, a posição da hipérbole é a indicada na figura, isto é, $\overline{A_1A_2} \subset Ox$ e $\overline{B_1B_2} \subset Oy$, então sua equação é:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

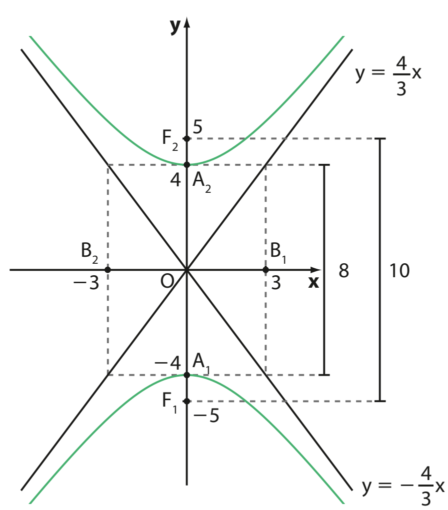


As assíntotas dessa hipérbole têm equações $y = \pm\frac{3}{4}x$.

EXEMPLO 7

Uma hipérbole com eixo real de medida 8 e distância focal igual a 10, na posição indicada na figura, isto é, $\overline{A_1A_2} \subset Oy$ e $\overline{B_1B_2} \subset Ox$, tem equação:

$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$$



Esta equação, evidentemente, não é equivalente à equação da hipérbole do exemplo 6:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

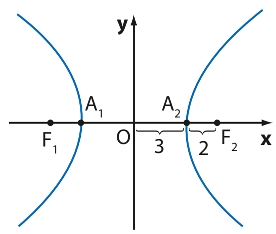
As assíntotas dessa hipérbole têm equações $y = \pm\frac{4}{3}x$.

EXERCÍCIOS

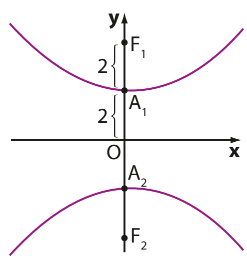
FAÇA NO CADERNO

17 Em cada caso, determine as equações das hipérboles seguintes e de suas assíntotas:

a)



b)



18 Determine as coordenadas dos focos de cada hipérbole do exercício anterior.

19 Obtenha a distância focal da hipérbole cuja equação é $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{7} = 1$. Quais são as equações das assíntotas?

20 Faça o que se pede:

a) Calcule a excentricidade da hipérbole cuja equação é $\frac{y^2}{12} - \frac{x^2}{4} = 1$.

b) Represente essa hipérbole e suas assíntotas no plano cartesiano.

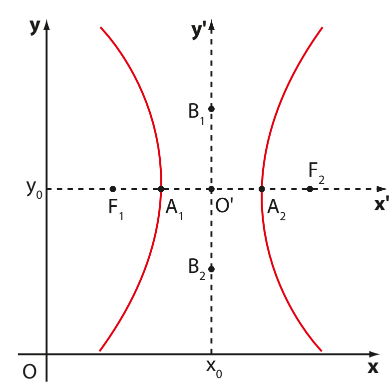
21 Construa os gráficos das cônicas λ: $x^2 - y^2 = 1$ e λ': $y^2 - x^2 = 1$. Seus gráficos são coincidentes?

22 Determine as coordenadas dos focos da hipérbole cuja equação é $3x^2 - y^2 = 300$.

Hipérboles com centro fora da origem

Se uma hipérbole tem centro no ponto $O'(x_0, y_0)$ e $\overline{A_1A_2}$ // Ox, sua equação em relação ao sistema auxiliar x'O'y' é:

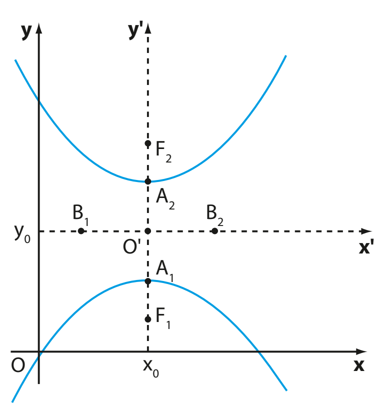
$$\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} = 1$$



Portanto, sua equação relativamente ao sistema xOy é:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Observe a hibérbole a seguir, que tem centro no ponto $O'(x_0, y_0)$ e $\overline{A_1A_2}$ // Oy.



Analogamente, sua equação relativamente ao sistema xOy é:

$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1$$

EXEMPLO 8

Uma hipérbole que tem centro no ponto O'(−2, −3), semieixo real a = 5 e semieixo imaginário b = 6 apresenta equação:

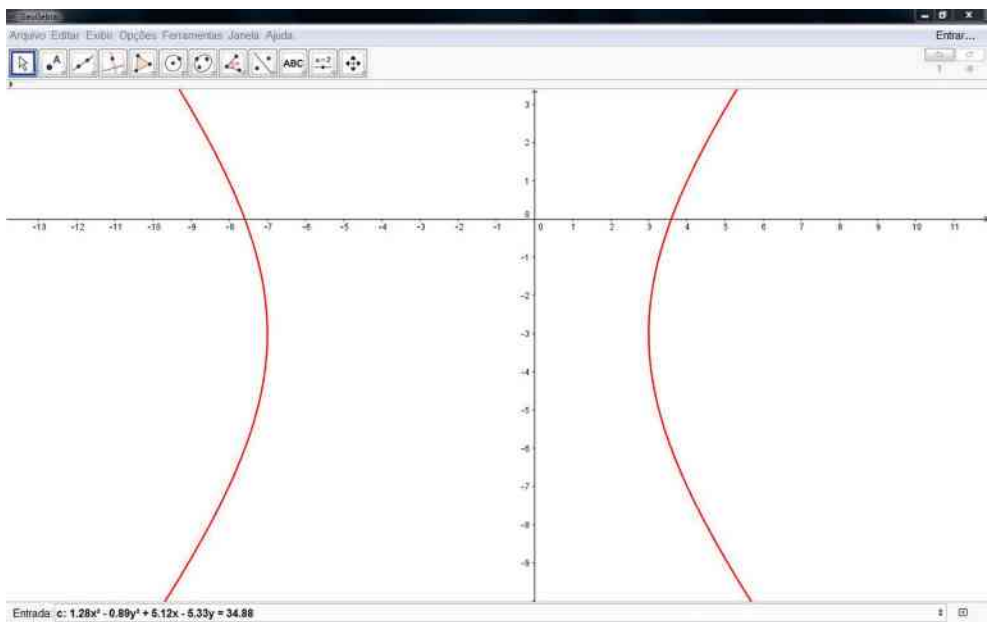
$$\frac{(x+2)^2}{25} - \frac{(y+3)^2}{36} = 1 \text{ (se o eixo real é paralelo ao eixo } \mathbf{x}\text{) (I)}$$

ou:

$$\frac{(y+3)^2}{25} - \frac{(x+2)^2}{36} = 1 \text{ (se o eixo real é paralelo ao eixo } \mathbf{y}\text{) (II)}$$

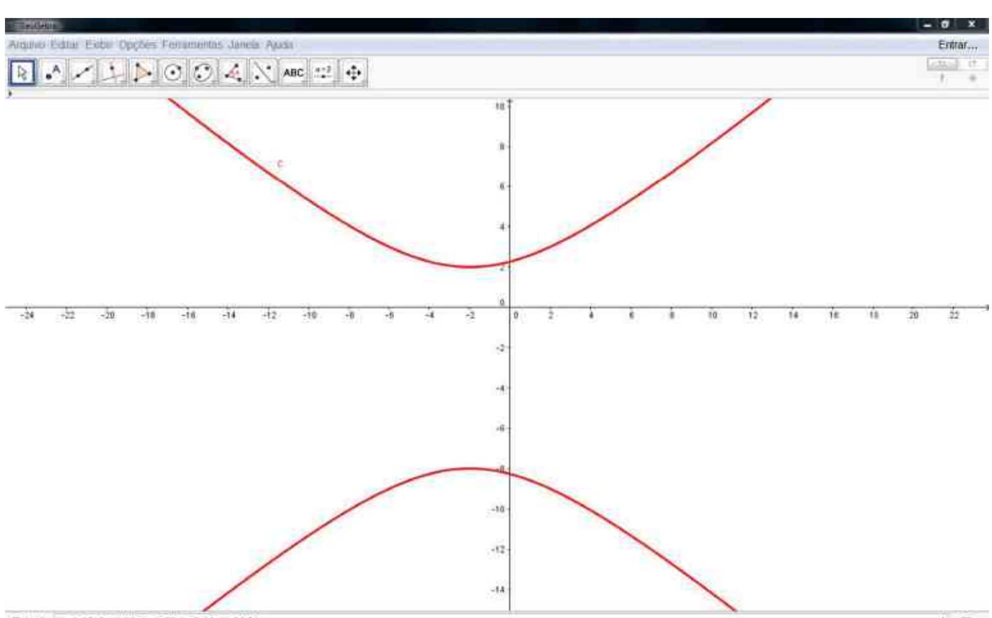
Veja, a seguir, as hipérboles de equações (I) e (II) construídos com auxílio do GeoGebra.

hipérbole I



GEOGEBRA

hipérbole II

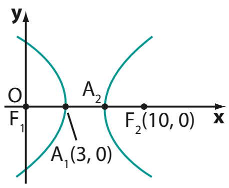


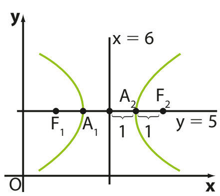
GEOGEBRA

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

23 Determine as equações das hipérboles abaixo:

a) 

b) 

24 Quais são as coordenadas dos focos de cada hipérbole do exercício anterior?

25 Obtenha os focos da hipérbole cuja equação é $\dfrac{(x + 1)^2}{13} - \dfrac{(y + 2)^2}{3} = 1$.

26 Qual é a distância focal da hipérbole cuja equação é $\dfrac{(y - 7)^2}{2} - \dfrac{(x + 9)^2}{47} = 1$?

27 Qual é a excentricidade da hipérbole cuja equação é $\dfrac{(x - 2)^2}{16} - \dfrac{y^2}{20} = 1$? Faça um esboço dessa cônica no plano cartesiano.

Hipérboles e funções recíprocas

OBSERVAÇÃO

Dizemos que uma hipérbole é **equilátera** se sua equação apresenta a = b.

Vamos determinar a equação de uma hipérbole especial com as seguintes características:

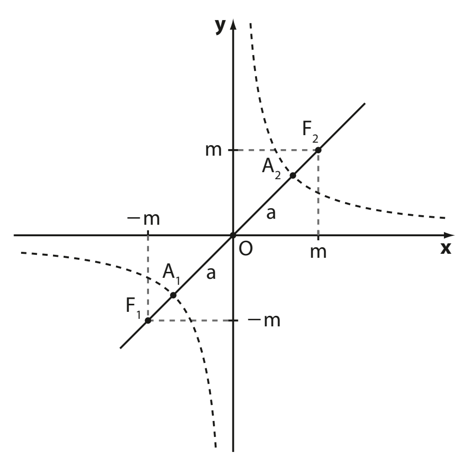
- focos $F_1(-m, -m)$ e $F_2(m, m)$, com $m \in \mathbb{R}^*_+$, ambos na bissetriz dos quadrantes ímpares;
- hipérbole equilátera, ou seja, com a = b.

Sabemos que a distância focal será:

$2c = F_1F_2 = \sqrt{(m + m)^2 + (m + m)^2} = 2m\sqrt{2}$

Como $c^2 = a^2 + b^2$ e a = b, temos:

$$(m\sqrt{2})^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow 2m^2 = 2a^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a = m \text{ (medida do semieixo real)}$$



Um ponto P(x, y) pertencente a essa hipérbole deve verificar a condição:

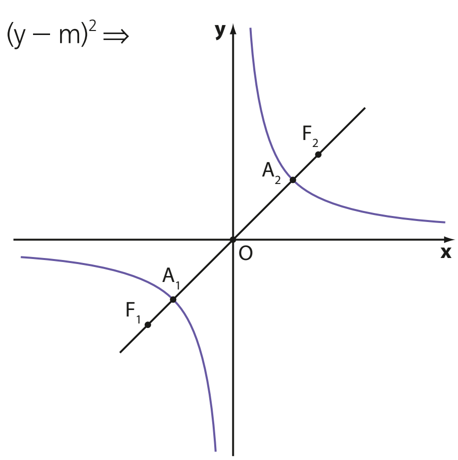
$$|PF_1 - PF_2| = 2a$$

Então:

$$\sqrt{(x + m)^2 + (y + m)^2} - \sqrt{(x - m)^2 + (y - m)^2} = \pm 2m \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sqrt{(x + m)^2 + (y + m)^2} = \pm 2m + \sqrt{(x - m)^2 + (y - m)^2}$$

Elevando os dois membros ao quadrado, temos:

$$(x + m)^2 + (y + m)^2 = 4m^2 \pm 4m\sqrt{(x - m)^2 + (y - m)^2} + (x - m)^2 + (y - m)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4xm + 4ym = 4m^2 \pm 4m\sqrt{(x - m)^2 + (y - m)^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x + y - m = \pm\sqrt{(x - m)^2 + (y - m)^2}$$



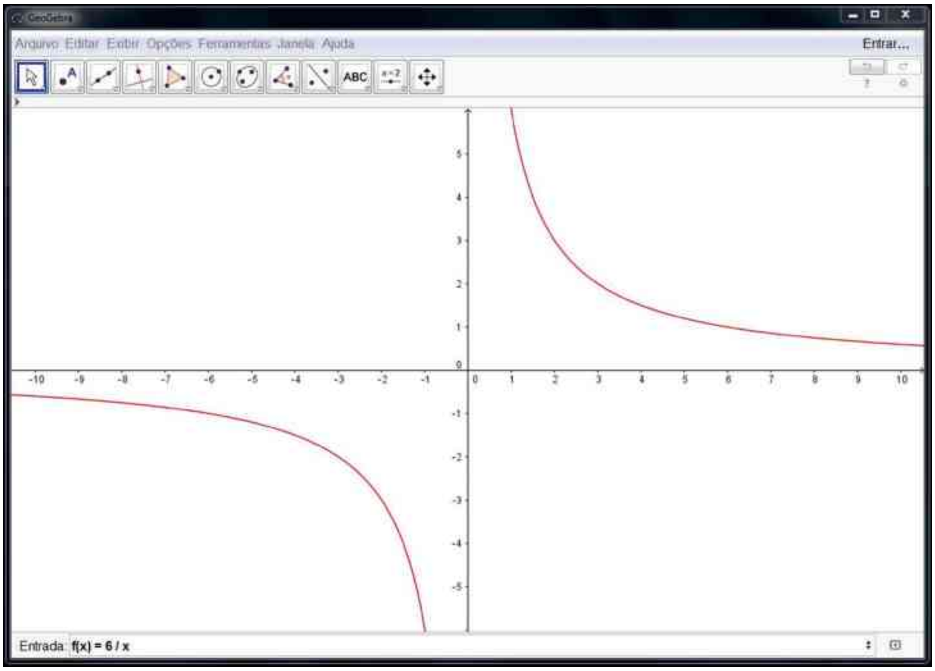
Elevando os dois membros ao quadrado novamente e fazendo as simplificações, chegamos finalmente a:

$$xy = \frac{m^2}{2}$$

que é a equação da hipérbole.

Se chamarmos a constante $\dfrac{m^2}{2}$ de **k**, a equação da hipérbole será xy = k. Observe que essa equação pode ser vista como $y = \dfrac{k}{x}$, portanto, a hipérbole é simplesmente o gráfico dessa função.

Observe, como exemplo, o gráfico da função recíproca $y = \frac{6}{x}$, construído com auxílio do GeoGebra.



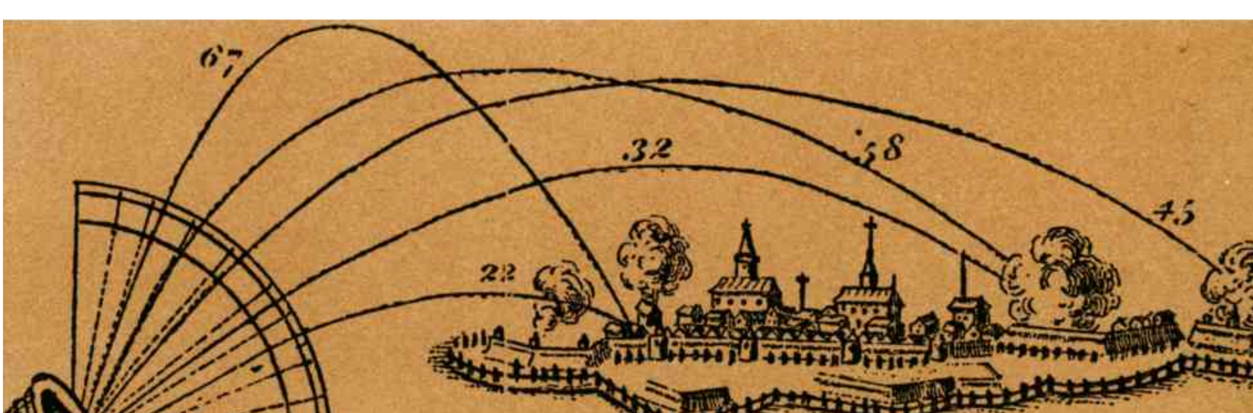
Do estudo de funções temos que o gráfico de uma função definida por $y = \frac{k}{x}$ (com $k \neq 0$), chamada de função recíproca, é uma hipérbole. Agora, temos a comprovação disso.

Se duas grandezas **x** e **y** são inversamente proporcionais, isto é, se $x \cdot y = k$, o gráfico da função que relaciona os valores de **x** com os valores de **y** são os pontos de uma hipérbole.

Parábola

A curva que descreve, por exemplo, o movimento de uma bala lançada por um canhão é chamada parábola.

O movimento com trajetória parabólica já era estudado por Galileu Galilei no século XVI. Observe abaixo uma ilustração elaborada por esse cientista.



Gravura que mostra trajetórias parabólicas de balas de canhão. Os números, próximos a cada parábola, indicam a inclinação do canhão em relação à direção horizontal.

As fotos seguintes mostram cartões-postais de duas cidades brasileiras. Na primeira, vemos as fontes de água do parque do Ibirapuera, em São Paulo. Na segunda, a ponte Juscelino Kubitschek, em Brasília.

ALEXANDRE CARVALHO/FOTOARENA

Lago do parque do Ibirapuera, São Paulo (SP), em 2012.

PAULO FRIDMAN/PULSAR IMAGENS

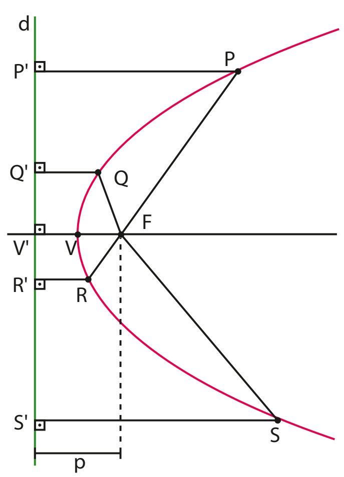
Ponte Juscelino Kubitschek, Brasília (DF), em 2010.

As imagens que acabamos de ver nos remetem a formas que se assemelham a parábolas. O gráfico de uma função do 2º grau é uma parábola. Façamos agora o estudo detalhado dessa cônica.

O que é parábola?

Dados um ponto **F** pertencente a um plano α e uma reta **d** contida em α, com $F \notin d$, seja **p** a distância entre o ponto **F** e a reta **d**. **Parábola** é o conjunto dos pontos de α que estão à mesma distância de **F** e de **d**.

$$\text{parábola} = \{P \in \alpha \mid PF = PP'\}$$



Assim, temos:

$$VF = VV'$$
$$PF = PP'$$
$$QF = QQ'$$
$$RF = RR'$$
$$SF = SS'$$

Elementos principais

F: foco

d: diretriz

p: parâmetro

V: vértice

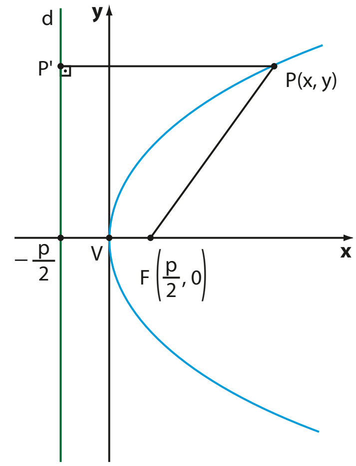
$\overleftrightarrow{VF}$: eixo de simetria (é a reta que passa por **F** e é perpendicular à diretriz)

Relação notável: $\boxed{VF = \dfrac{p}{2}}$, pois $VF = VV'$.

Equação reduzida (I)

Tomemos um sistema cartesiano ortogonal com origem no vértice da parábola e eixo das abscissas passando pelo foco. Como a distância entre **F** e **d** é **p**, temos que $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, e a diretriz **d** tem equação:

$$x = -\frac{p}{2}$$



Nessas condições, chama-se **equação reduzida da parábola** a equação que o ponto genérico da curva P(x, y) vai verificar. Vamos deduzi-la.

$$P \in \text{parábola} \Leftrightarrow PF = PP'$$

Então:

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + (y - y)^2}$$

Elevando os dois membros ao quadrado e desenvolvendo, obtemos:

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \Rightarrow x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$

Simplificando, resulta:

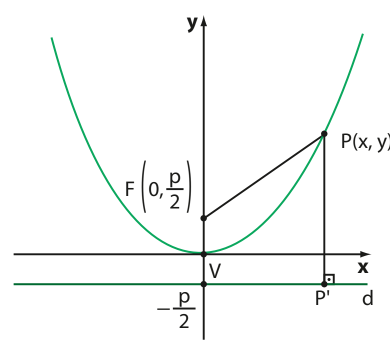
$$y^2 = 2px$$

Equação reduzida (II)

Analogamente ao que já vimos, se a parábola apresentar vértice na origem e foco no eixo das ordenadas, temos:

$$PF = PP'$$

$$\sqrt{(x - 0)^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{(x - x)^2 + \left(y + \frac{p}{2}\right)^2}$$



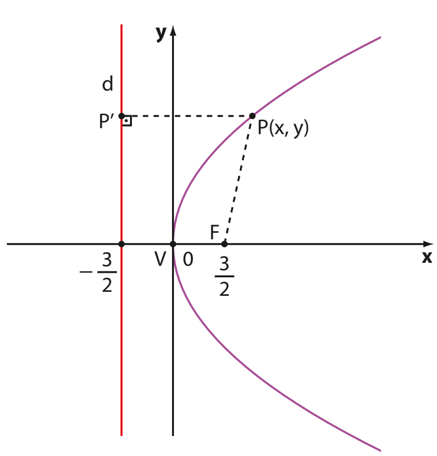
Daí, decorre a equação da parábola:

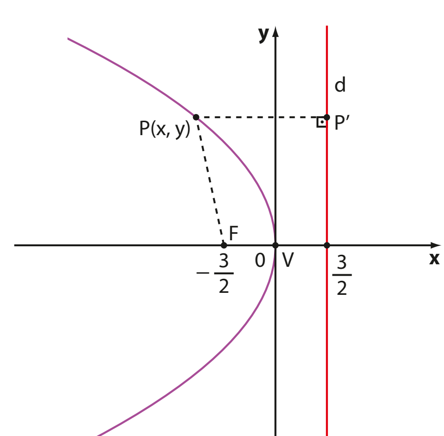
$$x^2 = 2py$$

EXEMPLO 9

Uma parábola com parâmetro p = 3, vértice **V** na origem e foco **F** no eixo Ox tem equação:

$y^2 = 6x$, se **F** está à direita de **V** ou $y^2 = -6x$, se **F** está à esquerda de **V**





Observe que:

- Se **F** está à direita de **V**, temos: $P'\left(-\frac{3}{2}, y\right)$ e $F\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

$$d_{PP'} = d_{PF} \Rightarrow \sqrt{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + (y - y)^2} = \sqrt{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{x^2} + 3x + \cancel{\frac{9}{4}} = \cancel{x^2} - 3x + \cancel{\frac{9}{4}} + y^2 \Rightarrow y^2 = 6x$$

- Se **F** está à esquerda de **V**, temos: $P'\left(\frac{3}{2}, y\right)$ e $F\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$

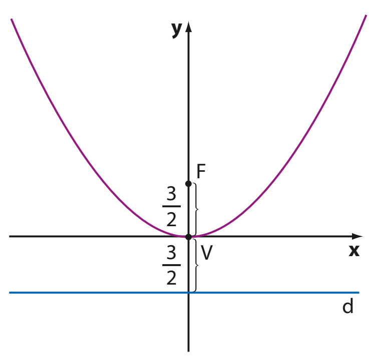
$$d_{PP'} = d_{PF} \Rightarrow \sqrt{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y - y)^2} = \sqrt{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + y^2} \Rightarrow$$

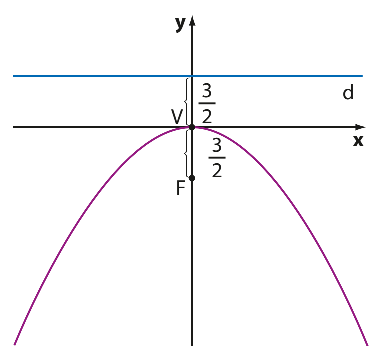
$$\Rightarrow \cancel{x^2} - 3x + \cancel{\frac{9}{4}} = \cancel{x^2} + 3x + \cancel{\frac{9}{4}} + y^2 \Rightarrow y^2 = -6x$$

EXEMPLO 10

Uma parábola com parâmetro p = 3, vértice **V** na origem e foco **F** no eixo dos **y** tem equação:

$x^2 = 6y$, se **F** está acima de **V** ou $x^2 = -6y$, se **F** está abaixo de **V**





PENSE NISTO:

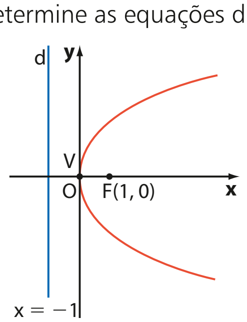
Observando esses últimos exemplos (9 e 10), que parábolas podem ser gráficos de funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$?

EXERCÍCIOS

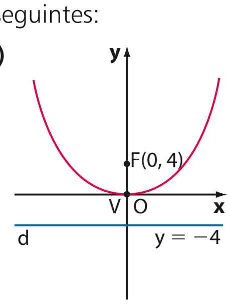
FAÇA NO CADERNO

28 Determine as equações das parábolas seguintes:

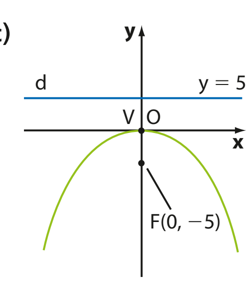
a)



b)



c)



29 Qual é a equação da diretriz da parábola de equação $2x^2 - 7y = 0$?

30 Determine as coordenadas do foco **F** e a equação da diretriz da parábola de equação $y^2 - 16x = 0$.

31 Em cada caso, obtenha as coordenadas do foco, a equação da diretriz e represente graficamente a parábola dada por:

a) $y^2 = -16x$ **b)** $x^2 = 2y$ **c)** $y^2 = x$

32 Uma parábola tem vértice na origem, eixo de simetria coincidente com o eixo das abscissas e passa pelo ponto P(4, −7). Qual é sua equação?

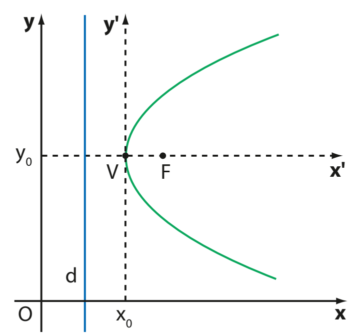
Parábolas com vértice fora da origem

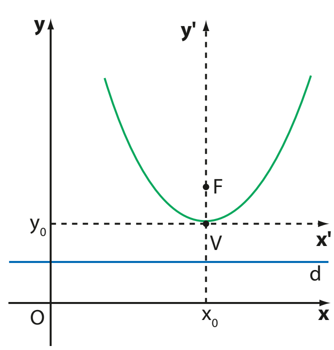
Se uma parábola tem vértice no ponto $V(x_0, y_0)$ e $\overleftrightarrow{VF} \,//\, Ox$, sua equação em relação ao sistema auxiliar x'Vy' é:

$$(y')^2 = 2px'$$

Portanto, sua equação relativamente ao sistema xOy é:

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$$





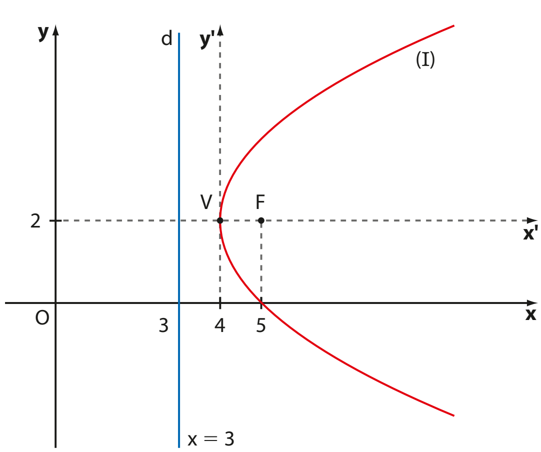
Analogamente, se uma parábola tem vértice no ponto $V(x_0, y_0)$ e $\overleftrightarrow{VF} \,//\, Oy$, sua equação relativamente ao sistema xOy é:

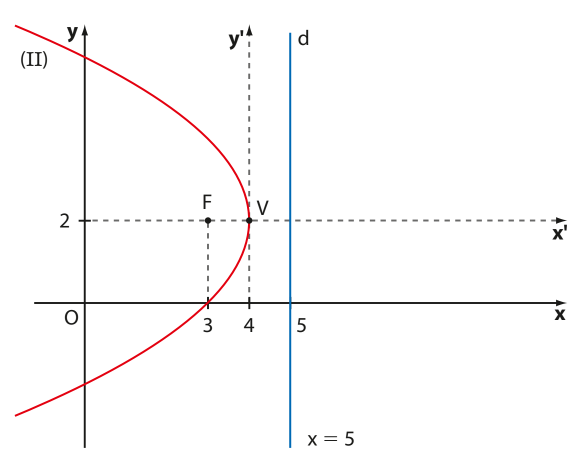
$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$$

EXEMPLO 11

Uma parábola de parâmetro p = 2, vértice V(4, 2) e eixo de simetria $\overleftrightarrow{VF}$ paralelo ao eixo Ox tem equação:

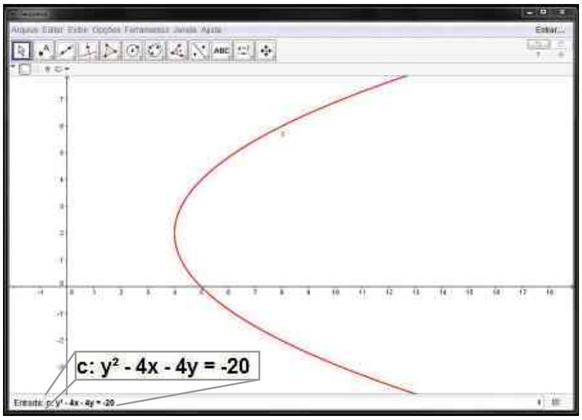
$(y - 2)^2 = 4(x - 4)$ se **F** está à direita de **V** ou $(y - 2)^2 = -4(x - 4)$ se **F** está à esquerda de **V**



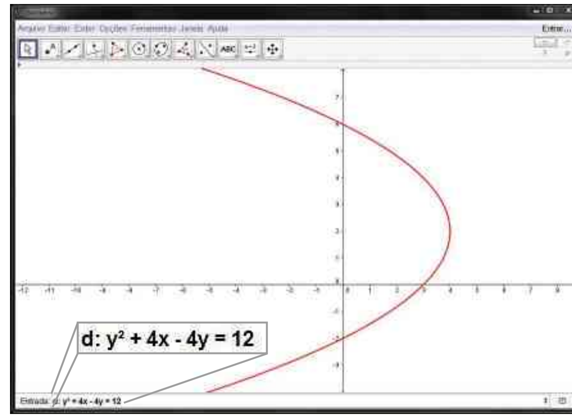


Observe as parábolas I e II construídas com o GeoGebra.

parábola I



parábola II



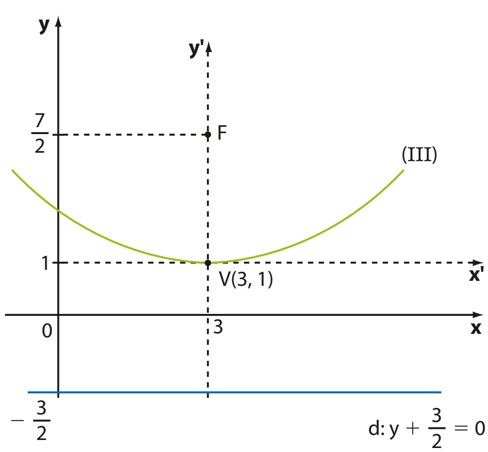
IMAGENS: GEOGEBRA

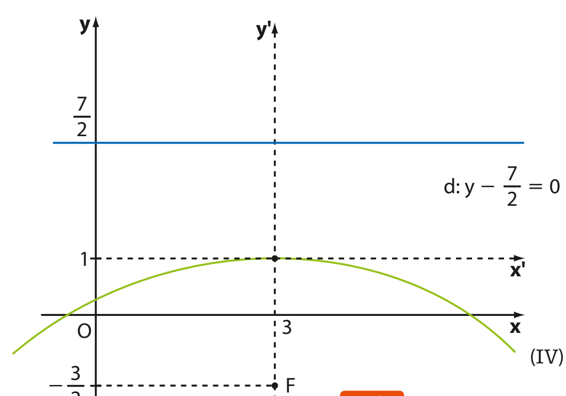
EXEMPLO **12**

Uma parábola de parâmetro $p = 5$, vértice $V(3, 1)$ e eixo de simetria $\overleftrightarrow{VF}$ paralelo ao eixo Oy tem equação:

$(x - 3)^2 = 10(y - 1)$ ou $(x - 3)^2 = -10(y - 1)$

se **F** está acima de **V** — se **F** está abaixo de **V**



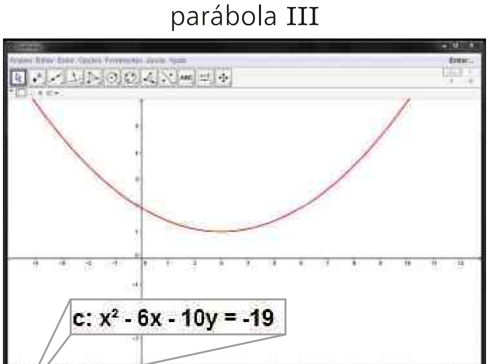


PENSE NISTO:

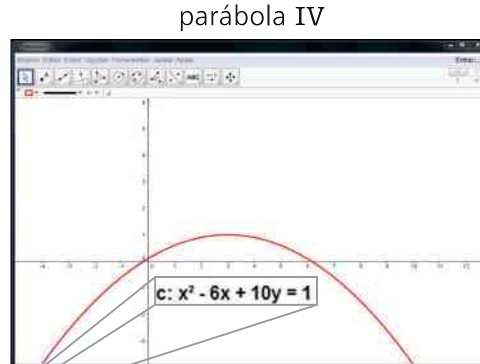
Em que ponto cada uma das parábolas do exemplo 12 intersectam o eixo Oy?

Observe as parábolas (III) e (IV) construídas com o GeoGebra.

parábola III



parábola IV



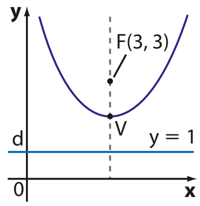
IMAGENS: GEOGEBRA

EXERCÍCIOS

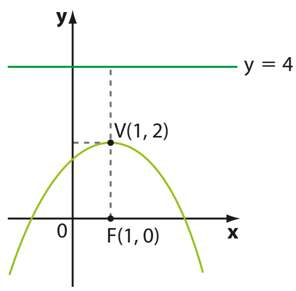
FAÇA NO CADERNO

33 Determine a equação de cada parábola representada a seguir:

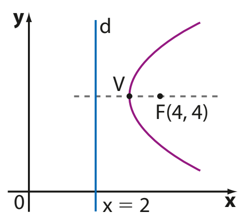
a)



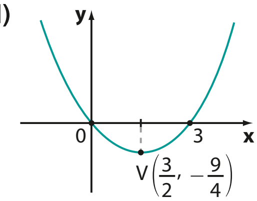
b)



c)



d)



34 Determine o foco e o vértice da parábola $\lambda: (y + 3)^2 = 12(x - 2)$.

35 Escreva a equação da diretriz da parábola representada pela equação $y = -(x + 5)^2$.

36 Determine as coordenadas do vértice da parábola cuja equação é $y^2 - 7x - 6y + 9 = 0$.

37 Obtenha a equação da parábola cuja diretriz é $d: x = -2$ e cujo foco é $F(6, 0)$.

38 Qual é a equação do conjunto dos pontos $P(x, y)$ que são equidistantes da reta $d: y = 3$ e do ponto $F(-2, -3)$?

39 Dê a equação da parábola simétrica relativamente ao eixo dos **y** e que passa pelos pontos de interseção da reta de equação $x + y = 0$ com a circunferência de equação $x^2 + y^2 - 8y = 0$.

Parábolas e funções quadráticas

Note que uma parábola com equação $x^2 = 2py$ tem eixo de simetria vertical coincidente com o eixo das ordenadas. Então, para cada valor real atribuído a **x** existe em correspondência um único valor correspondente de **y**. Assim, a lei $y = \frac{1}{2p}x^2$ define uma função cujo gráfico é precisamente a parábola. Isso já foi visto no estudo de funções e agora é comprovado. Por exemplo, as funções $y = x^2 \left(\text{em que } p = \frac{1}{2}\right)$, $y = 3x^2 \left(\text{em que } p = \frac{1}{6}\right)$ e $y = -4x^2 \left(\text{em que } p = \frac{1}{8}\right)$ têm gráficos que são parábolas com vértice na origem.

Observe que uma parábola de equação $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$ possui vértice $V(x_0, y_0)$ e eixo de simetria vertical. Podemos escrevê-la na forma:

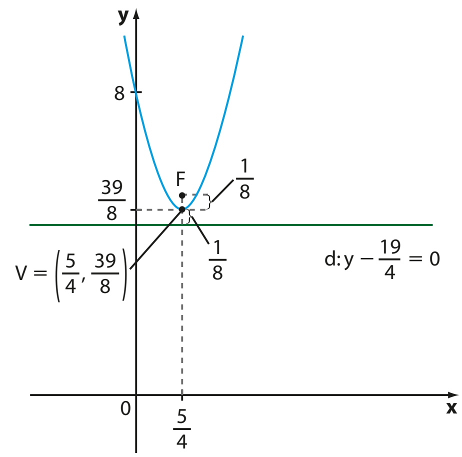
$$x^2 - 2x_0x + x_0^2 = 2py - 2py_0$$

ou ainda:

$y = \frac{1}{2p}x^2 - \frac{x_0}{p} \cdot x + \frac{x_0^2 + 2py_0}{2p}$, que corresponde à lei de uma função quadrática.

No estudo de funções, vimos que a função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ (com $a \neq 0$) tem por gráfico uma parábola, o que agora foi comprovado ao verificar que: $a = \frac{1}{2p}$, $b = -\frac{x_0}{p}$ e $c = \frac{x_0^2 + 2py_0}{2p}$.

Por exemplo, a função dada por $y = 2x^2 - 5x + 8$ tem por gráfico uma parábola com $2 = \frac{1}{2p}$, $-5 = -\frac{x_0}{p}$ e $8 = \frac{x_0^2 + 2py_0}{2p}$, ou seja, $p = \frac{1}{4}$, $x_0 = \frac{5}{4}$ e $y_0 = \frac{39}{8}$; $V\left(\frac{5}{4}, \frac{39}{8}\right)$ e $F\left(\frac{5}{4}, 5\right)$.



Reconhecimento de uma cônica pela equação

Elipses

Comparemos as equações das elipses:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$
(elipse com eixo maior horizontal)

$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} + \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1$$
(elipse com eixo maior vertical)

Concluímos que:

- uma equação do 2º grau nas incógnitas **x** e **y** representa uma elipse com eixo maior paralelo a Ox ou Oy se for redutível à forma:
$$\frac{(x - x_0)^2}{k_1} + \frac{(y - y_0)^2}{k_2} = 1, \text{ com } k_1 > 0,\ k_2 > 0 \text{ e } k_1 \neq k_2$$
- se $k_1 > k_2$, $k_1 = a^2$ e $k_2 = b^2$, então o eixo maior é horizontal.
- se $k_1 < k_2$, $k_1 = b^2$ e $k_2 = a^2$, então o eixo maior é vertical.
- (x_0, y_0) é o centro da elipse.

PENSE NISTO:

Por que admitimos $k_1 \neq k_2$ na equação apresentada?

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

1 Caracterize a cônica representada pela equação $4x^2 + 9y^2 = 36$ e esboce seu gráfico.

Solução:

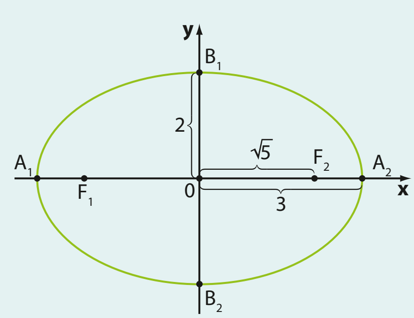
Dividindo os dois membros da equação por 36, temos:

$$\frac{4x^2}{36} + \frac{9y^2}{36} = \frac{36}{36} \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

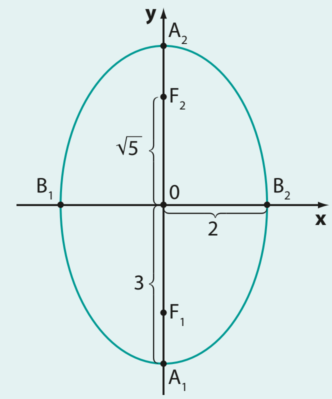
Portanto, a cônica é uma elipse com centro na origem e eixo maior horizontal tal que:

$$\left.\begin{matrix} a^2 = 9 \\ b^2 = 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{5}$$

Os focos são $F_1(-\sqrt{5}, 0)$ e $F_2(\sqrt{5}, 0)$.



2 Qual é a distância entre os focos da cônica cuja equação é $9x^2 + 4y^2 = 36$?



Solução:

Temos:

$$9x^2 + 4y^2 = 36 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

A cônica é uma elipse com centro (0, 0) e eixo maior vertical tal que:

$$\left.\begin{matrix} a^2 = 9 \\ b^2 = 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{5}$$

Portanto, os focos são:

$$F_1\left(0, -\sqrt{5}\right) \text{ e } F_2\left(0, \sqrt{5}\right)$$

e a distância entre eles é $2c = 2\sqrt{5}$.

3 Qual é a cônica representada pela equação $9x^2 + 16y^2 - 90x - 160y + 481 = 0$? Esboce seu gráfico.

Solução:

Vamos identificar a cônica com sua equação genérica $\dfrac{(x - x_0)^2}{k_1} + \dfrac{(y - y_0)^2}{k_2} = 1$, isto é:

$$k_2x^2 + k_1y^2 - 2k_2x_0x - 2k_1y_0y + \left(k_2x_0^2 + k_1y_0^2 - k_1k_2\right) = 0$$

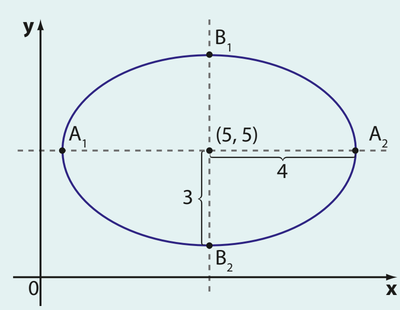
Temos coeficientes respectivamente iguais aos da equação dada, portanto:

$$k_2 = 9, \quad k_1 = 16, \quad 2k_2x_0 = 90, \quad 2k_1y_0 = 160, \quad k_2x_0^2 + k_1y_0^2 - k_1k_2 = 481$$

Daí, temos:

$$k_2 = 9, \quad k_1 = 16, \quad x_0 = 5, \quad y_0 = 5$$

Como $k_1 > k_2 > 0$, a equação representa uma elipse com eixo maior horizontal e centro (5, 5), sendo $a^2 = 16$ e $b^2 = 9$.



A equação reduzida dessa elipse é:

$$\frac{(x - 5)^2}{16} + \frac{(y - 5)^2}{9} = 1$$

A equação reduzida dessa elipse pode ser obtida de outro modo.

Vamos completar quadrados:

$$9x^2 - 90x + 16y^2 - 160y + 481 = 0$$

$$9(x^2 - 10x + \blacksquare) + 16(y^2 - 10y + \blacksquare) + 481 = 0$$

$$9 \cdot (x^2 - 10x + 25) + 16 \cdot (y^2 - 10y + 25) + 481 = 0 + 9 \cdot 25 + 16 \cdot 25$$

$$9 \cdot (x - 5)^2 + 16 \cdot (y - 5)^2 = 144$$

$$\frac{(x - 5)^2}{16} + \frac{(y - 5)^2}{9} = 1$$

Hipérboles

Comparemos as equações das hipérboles:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{-b^2} = 1$$

(hipérbole com eixo real horizontal)

$$\frac{(x - x_0)^2}{-b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1$$

(hipérbole com eixo real vertical)

Concluímos que:

- uma equação do 2º grau nas incógnitas **x** e **y** representa uma hipérbole com eixo real paralelo a Ox ou Oy se for redutível à forma:

$$\frac{(x - x_0)^2}{k_1} + \frac{(y - y_0)^2}{k_2} = 1$$

  em que $\mathbf{k_1}$ e $\mathbf{k_2}$ têm sinais contrários.
- se $k_1 > 0$ e $k_2 < 0$, então $k_1 = a^2$ e $k_2 = -b^2$; o eixo real é horizontal.
- se $k_1 < 0$ e $k_2 > 0$, então $k_1 = -b^2$ e $k_2 = a^2$; o eixo real é vertical.
- (x_0, y_0) é o centro da hipérbole.

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

4 Caracterize a cônica representada pela equação $4x^2 - 9y^2 = 36$ e esboce seu gráfico.

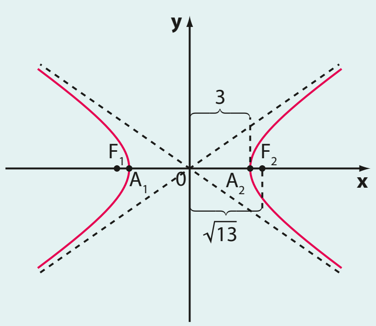
Solução:

Temos:

$$4x^2 - 9y^2 = 36 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$$

Portanto, a cônica é uma hipérbole com centro (0, 0) e eixo real horizontal. Temos:

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = 9 \Rightarrow a = 3 \\ b^2 = 4 \Rightarrow b = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow c = \sqrt{13}$$



Seus focos são:

$$F_1\left(-\sqrt{13}, 0\right) \text{ e } F_2\left(\sqrt{13}, 0\right)$$

5 Quais são os focos da cônica cuja equação é $x^2 - y^2 = 1$?

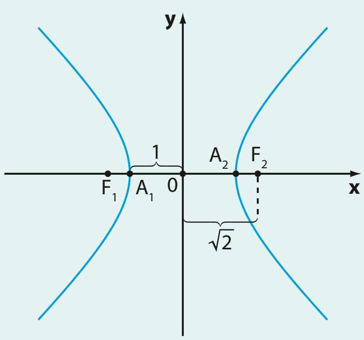
Solução:

A partir da equação dada, podemos escrever:

$$x^2 - y^2 = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{1} = 1$$

A cônica é uma hipérbole com centro (0, 0) e eixo real horizontal tal que:

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = 1 \\ b^2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$$



Portanto, os focos são:

$$F_1\left(-\sqrt{2}, 0\right) \text{ e } F_2\left(\sqrt{2}, 0\right)$$

6 Qual é a cônica representada pela equação $4x^2 - y^2 - 32x + 8y + 52 = 0$?

Solução:

Este exercício pode ser resolvido de dois modos:

1º modo:

Desenvolvendo a equação geral $\dfrac{(x - x_0)^2}{k_1} + \dfrac{(y - y_0)^2}{k_2} = 1$, obtemos:

$$\frac{x^2 - 2xx_0 + x_0^2}{k_1} + \frac{y^2 - 2yy_0 + y_0^2}{k_2} = 1$$

$$k_2x^2 - 2x_0k_2x + k_2x_0^2 + k_1y^2 - 2k_1y_0y + k_1y_0^2 - k_1k_2 = 0$$

Comparando com a equação $4x^2 - y^2 - 32x + 8y + 52 = 0$, temos:

$$\begin{cases} k_2 = 4 \\ k_1 = -1 \\ -2x_0k_2 = -32 \Rightarrow -2x_0 \cdot 4 = -32 \Rightarrow x_0 = 4 \\ -2y_0k_1 = 8 \Rightarrow -2y_0 \cdot (-1) = 8 \Rightarrow y_0 = 4 \\ k_2x_0^2 + k_1y_0^2 - k_1k_2 = 52 \text{ (Note que } 64 - 16 + 4 = 52) \end{cases}$$

Como $k_1 < 0$ e $k_2 > 0$, a equação representa uma hipérbole com eixo real vertical e centro (4, 4), sendo $a^2 = 4$ e $b^2 = 1$.

A equação reduzida é:

$$\frac{(y - 4)^2}{4} - \frac{(x - 4)^2}{1} = 1$$

2º modo:

Vamos completar os quadrados:

$$4(x^2 - 8x + \blacksquare) - (y^2 - 8y + \blacksquare) = -52$$

$$4 \cdot (x^2 - 8x + 16) - (y^2 - 8y + 16) = -52 + 4 \cdot 16 + (-16)$$

$$4 \cdot (x - 4)^2 - (y - 4)^2 = -4$$

Dividindo os dois membros por -4, obtemos:

$$\frac{(y - 4)^2}{4} - \frac{(x - 4)^2}{1} = 1$$

Parábolas

Desenvolvendo as equações das parábolas $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$ e $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$, obtemos respectivamente:

$$x = \frac{1}{2p} \cdot y^2 - \frac{y_0}{p} \cdot y + \frac{y_0^2 + 2px_0}{2p}$$

(parábola com eixo de simetria horizontal)

e

$$y = \frac{1}{2p} \cdot x^2 - \frac{x_0}{p} \cdot x + \frac{x_0^2 + 2py_0}{2p}$$

(parábola com eixo de simetria vertical)

Comparando as duas equações, concluímos que:

- uma equação do 2º grau nas incógnitas **x** e **y** representa uma parábola com eixo paralelo a Ox ou Oy se for redutível a uma das formas:

$$x = ay^2 + by + c \text{ (com } a \neq 0) \quad (1)$$

ou

$$y = ax^2 + bx + c \text{ (com } a \neq 0) \quad (2)$$

- Se redutível à forma (1), então a parábola tem eixo de simetria horizontal e $a = \frac{1}{2p}$, $b = -\frac{y_0}{p}$ e $c = \frac{y_0^2 + 2px_0}{2p}$.
- Se redutível à forma (2), então a parábola tem eixo de simetria vertical e $a = \frac{1}{2p}$, $b = -\frac{x_0}{p}$ e $c = \frac{x_0^2 + 2py_0}{2p}$.
- (x_0, y_0) é o vértice da parábola.

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

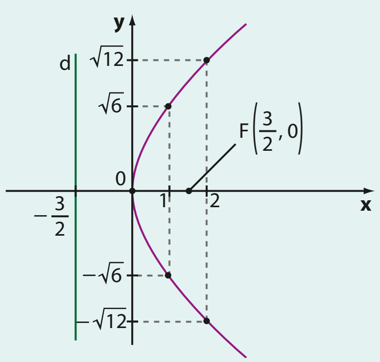
7 Qual é a cônica representada pela equação $y^2 = 6x$? Esboce seu gráfico.

Solução:

Temos:

$$y^2 = 6x \Rightarrow y^2 = 2 \cdot 3 \cdot x$$

Portanto, a cônica é uma parábola com vértice na origem, eixo de simetria horizontal e parâmetro $p = 3$.



8 Caracterize a cônica representada pela equação $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}y + \frac{5}{4}$ e esboce seu gráfico.

Solução:

A equação representa uma parábola com eixo de simetria horizontal.

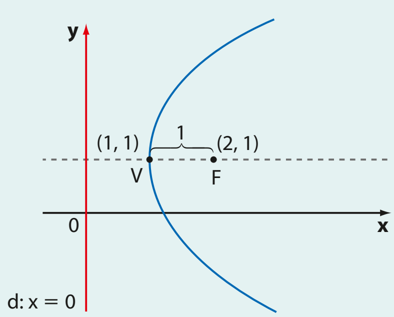
Comparando-a com a equação genérica:

$x = \frac{1}{2p} \cdot y^2 - \frac{y_0}{p} \cdot y + \frac{y_0^2 + 2px_0}{2p}$, decorre:

$$\frac{1}{2p} = \frac{1}{4}, \quad \frac{y_0}{p} = \frac{1}{2}, \quad \frac{y_0^2 + 2px_0}{2p} = \frac{5}{4}$$

Daí, obtemos:

$$p = 2,\ y_0 = 1,\ x_0 = 1$$



Assim, a parábola tem vértice (1, 1) e parâmetro $p = 2$.

A equação reduzida dessa parábola é:

$$(y - 1)^2 = 4 \cdot (x - 1)$$

A equação reduzida pode ser obtida de outro modo:

Completando quadrados, temos:

$$x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}y + \frac{5}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{4} \cdot (y^2 - 2y + \blacksquare) + \frac{5}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{4} \cdot (y^2 - 2y + 1) + \frac{5}{4} - \frac{1}{4} \cdot 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{4} \cdot (y - 1)^2 + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - 1 = \frac{1}{4} \cdot (y - 1)^2 \Leftrightarrow (y - 1)^2 = 4 \cdot (x - 1)$$

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

40 Caracterize a cônica representada pela equação em cada item a seguir.

a) $5x^2 + 8y^2 = 10$

b) $9x^2 + 25y^2 - 36x + 50y - 164 = 0$

c) $5x^2 - 4y^2 + 30x + 16y + 49 = 0$

d) $y^2 - 4x - 6y + 13 = 0$

e) $x^2 - 4x - 12y = 32$

f) $9x^2 + 5y^2 + 54x - 30y + 81 = 0$

Interseções de cônicas

É regra geral na Geometria Analítica que, dadas duas curvas f(x, y) = 0 e g(x, y) = 0, a interseção delas é o conjunto dos pontos que satisfazem o sistema:

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

Já aplicamos esse conceito para achar a interseção de duas retas, de uma reta e uma circunferência e de duas circunferências. O mesmo conceito se aplica para obter a interseção de uma reta e uma cônica, de duas cônicas etc.

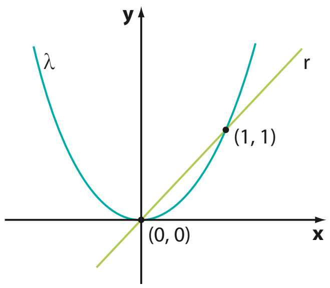
EXEMPLO 13

Vamos determinar os pontos comuns à reta r: $x - y = 0$ e à parábola λ: $y = x^2$.
Para isso, devemos resolver o sistema de equações:

$$\begin{cases} x = y & 1 \\ y = x^2 & 2 \end{cases}$$

Substituindo 1 em 2, resulta:

$$y = y^2 \Rightarrow y^2 - y = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \Rightarrow x = 0 \\ \text{ou} \\ y = 1 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$



Assim, temos: $r \cap \lambda = \{(0, 0), (1, 1)\}$.

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

41 Obtenha a interseção da parábola λ: $y^2 = x$ com a elipse λ': $x^2 + 5y^2 = 6$.

42 Determine o conjunto dos pontos em que a hipérbole de equação $4y^2 - x^2 = 1$ intersecta a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 9$.

43 Quantos pontos comuns têm a circunferência de equação $x^2 + y^2 - 2x - 4 = 0$ e a parábola de equação $2x^2 - 4x - y + 2 = 0$?

44 Calcule o comprimento da corda que a reta r: $y = x$ define na elipse λ: $9x^2 + 25y^2 = 225$.

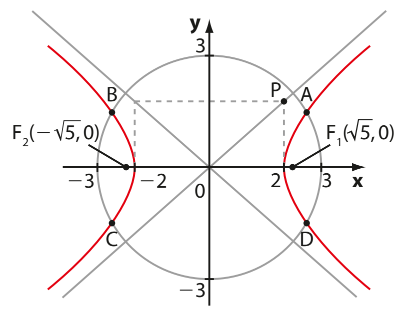
45 Calcule a distância entre os pontos de interseção das curvas de equações $x^2 + y = 10$ e $x + y = 10$.

46 (UFMG) Considere a parábola de equação $y = 8x - 2x^2$ e a reta que contém os pontos (4, 0) e (0, 8). Sejam **A** e **B** os pontos de interseção entre a reta e a parábola. Determine a equação da mediatriz do segmento $\overline{AB}$.

47 Determine $m \in \mathbb{R}$ de modo que a reta de equação $y = x + m$ intersecte a elipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

48 Calcule o valor do coeficiente angular $m \in \mathbb{R}$ para que a reta de equação $y = mx + 2$ e a parábola de equação $y^2 = 4x$ tenham interseção não vazia.

49 Observe a figura a seguir.



Com base nos dados da figura, determine:

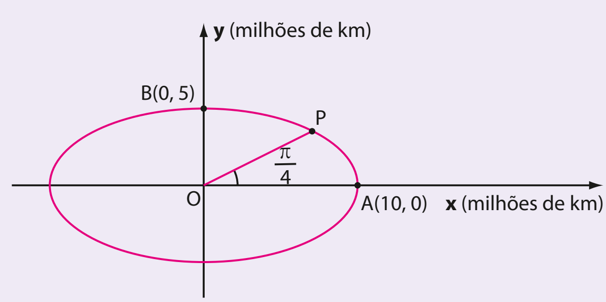
a) as coordenadas de **A**, **B**, **C** e **D**.

b) a ordenada de **P**.

50 Quantos pontos têm em comum a circunferência de equação $x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$ e a parábola de equação $3x^2 - y + 1 = 0$?

DESAFIO

(Unesp-SP) Suponha que um planeta **P** descreva uma órbita elíptica em torno de uma estrela **O**, de modo que, considerando um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, sendo a estrela **O** a origem do sistema, a órbita possa ser descrita aproximadamente pela equação $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$, com **x** e **y** em milhões de quilômetros. A figura representa a estrela **O**, a órbita descrita pelo planeta e sua posição no instante em que o ângulo $P\hat{O}A$ mede $\frac{\pi}{4}$.



(figura fora de escala)

A distância, em milhões de quilômetros, do planeta **P** à estrela **O**, no instante representado na figura, é:

a) $2\sqrt{5}$ **b)** $2\sqrt{10}$ **c)** $5\sqrt{2}$ **d)** $10\sqrt{2}$ **e)** $5\sqrt{10}$